Le morphisme de Lyashko-Looijenga : un groupe de réflexion virtuel ?

Vivien Ripoll

École Normale Supérieure
Département de Mathématiques et Applications

25 février 2010
Séminaire Chevalley

Groupe de réflexion complexe

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension n).

Définition

Un groupe de réflexion complexe (fini) est un sous-groupe fini de $GL(V)$ engendré par des réflexions complexes.

Groupe de réflexion complexe

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension n).

Définition

Un groupe de réflexion complexe (fini) est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions complexes.
Une réflexion complexe est un élément $s \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini, et tel que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_V)$ soit un hyperplan :

$$s \underset{\mathcal{B}}{\leftrightarrow} \text{matrice}\, \mathrm{Diag}(\zeta, 1, \ldots, 1)\ ,\ \text{avec } \zeta \text{ racine de l'unité.}$$

Groupe de réflexion complexe

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension n).

Définition

Un groupe de réflexion complexe (fini) est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions complexes.
Une réflexion complexe est un élément $s \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini, et tel que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_V)$ soit un hyperplan :

$$s \underset{\mathcal{B}}{\leftrightarrow} \text{matrice } \mathrm{Diag}(\zeta, 1, \ldots, 1)\ , \ \text{avec } \zeta \text{ racine de l'unité.}$$

- contient le cas réel (groupes de Coxeter finis)
- classifiés par Shephard-Todd (1954)
- mais pas de théorie de Coxeter

Théorie des invariants

Soit W un groupe de réflexion complexe.
W agit sur $S(V^*)$ (algèbre de polynômes $\mathbb{C}[v_1, \ldots, v_n]$).

Théorie des invariants

Soit W un groupe de réflexion complexe.
W agit sur $S(V^*)$ (algèbre de polynômes $\mathbb{C}[v_1, \ldots, v_n]$).

Théorème (Chevalley-Shephard-Todd)

Il existe des invariants fondamentaux $f_1, \ldots, f_n$, homogènes, tels que

$$S(V^*)^W = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] \ .$$

Leurs degrés $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ ne dépendent pas du choix de $f_1, \ldots, f_n$ (degrés invariants de W).

Théorie des invariants

Soit W un groupe de réflexion complexe.
W agit sur $S(V^*)$ (algèbre de polynômes $\mathbb{C}[v_1, \ldots, v_n]$).

Théorème (Chevalley-Shephard-Todd)

Il existe des invariants fondamentaux $f_1, \ldots, f_n$, homogènes, tels que

$$S(V^*)^W = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] \,.$$

Leurs degrés $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ ne dépendent pas du choix de $f_1, \ldots, f_n$ (degrés invariants de W).

$$\rightsquigarrow \text{isomorphisme : } \quad \begin{array}{ccc} W \backslash V & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}^n \\ \bar{v} & \mapsto & (f_1(v), \ldots, f_n(v)). \end{array}$$

Discriminant

$\mathcal{A} := \{$hyperplans de réflexions de $W\}$. Pour $H \in \mathcal{A}$:

- α_H : forme linéaire de noyau H
- e_H : ordre du sous-groupe parabolique W_H

Définition

Discriminant de W : $$\Delta_W := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H}.$$

Discriminant

$\mathcal{A} := \{$hyperplans de réflexions de $W\}$. Pour $H \in \mathcal{A}$:

- α_H : forme linéaire de noyau H
- e_H : ordre du sous-groupe parabolique W_H

Définition

Discriminant de W : $$\Delta_W := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H}.$$

- $\Delta_W \in \mathbb{C}[V]^W = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$
- Δ_W est l'équation de l'hypersurface $\mathcal{H}$, quotient de $\bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ dans $W \backslash V$.

Cas basique du type **A** :

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 = \mathrm{Disc}(T^n - \sigma_1 T^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n; T)$$

Groupe de réflexion complexe bien engendré

Désormais on suppose que W agit de façon **irréductible** sur le $\mathbb{C}$-e.v. V de dimension n.

Définition

Le groupe W est dit bien engendré s'il peut être engendré par n réflexions (comme dans le cas réel).

Groupe de réflexion complexe bien engendré

Désormais on suppose que W agit de façon **irréductible** sur le $\mathbb{C}$-e.v. V de dimension n.

Définition

Le groupe W est dit bien engendré s'il peut être engendré par n réflexions (comme dans le cas réel).

$f_1, \dots, f_n$ de degrés $d_1 \leq \cdots \leq d_n = h$ (*nombre de Coxeter*).

Proposition

Si W est bien engendré, le discriminant Δ_W est ***monique de degré*** *n* ***en*** *f_n. On peut choisir les invariants fondamentaux $f_1, \dots, f_n$ de sorte que :*

$$\Delta_W = f_n^n + a_2 f_n^{n-2} + a_3 f_n^{n-3} + \cdots + a_{n-1} f_n + a_n,$$

avec $a_i \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$ (polynôme homogène, de degré ih).

Morphisme de Lyashko-Looijenga

$$\Delta_W = X_n^n + a_2 X_n^{n-2} + \cdots + a_n, \text{ avec } a_i \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}].$$

Définition (Morphisme de Lyashko-Looijenga de W)

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{LL}: & \mathbb{C}^{n-1} & \to & \mathbb{C}^{n-1} \\ & (X_1, \ldots, X_{n-1}) & \mapsto & (a_2, \ldots, a_n) \end{array}$$

C'est un morphisme algébrique, quasi-homogène pour les poids : $\deg(X_j) = d_j$, $\deg(a_i) = ih$.

Morphisme de Lyashko-Looijenga

$$\Delta_W = X_n^n + a_2 X_n^{n-2} + \cdots + a_n, \text{ avec } a_i \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}].$$

Définition (Morphisme de Lyashko-Looijenga de W)

$$\mathrm{LL}: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n-1} & \to & \mathbb{C}^{n-1} \\ (X_1, \ldots, X_{n-1}) & \mapsto & (a_2, \ldots, a_n) \end{array}$$

C'est un morphisme algébrique, quasi-homogène pour les poids : $\deg(X_j) = d_j$, $\deg(a_i) = ih$.

On pose $Y := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}] \quad (\rightsquigarrow W\backslash V \simeq Y \times \mathbb{C})$.

$$\begin{array}{cccl} \mathrm{LL}: & Y & \to & E_n = \{\text{configurations de } n \text{ points centrés de } \mathbb{C}\} \\ & y & \mapsto & \{\text{racines, avec multiplicités, de } \Delta_W(y, X_n) \text{ en } X_n\} \end{array}$$

Morphisme de Lyashko-Looijenga

$\Delta_W = X_n^n + a_2 X_n^{n-2} + \cdots + a_n$, avec $a_i \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$.

Définition (Morphisme de Lyashko-Looijenga de W)

$$\text{LL}: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n-1} & \to & \mathbb{C}^{n-1} \\ (X_1, \ldots, X_{n-1}) & \mapsto & (a_2, \ldots, a_n) \end{array}$$

C'est un morphisme algébrique, quasi-homogène pour les poids : $\deg(X_j) = d_j$, $\deg(a_i) = ih$.

On pose $Y := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}] \quad (\rightsquigarrow W \backslash V \simeq Y \times \mathbb{C})$.

$$\text{LL}: \begin{array}{ccl} Y & \to & E_n = \{\text{configurations de } n \text{ points centrés de } \mathbb{C}\} \\ y & \mapsto & \{\text{racines, avec multiplicités, de } \Delta_W(y, X_n) \text{ en } X_n\} \end{array}$$

Géométriquement, $\text{LL}(y)$ représente les **intersections** (avec multiplicités) de l'hypersurface $\mathcal{H} = \{\Delta = 0\}$ avec la droite complexe $L_y = \{(y, X_n), X_n \in \mathbb{C}\}$.

Un revêtement ramifié

$$E_n^{\mathrm{reg}} := \{\text{configurations de } n \text{ points } \textbf{distincts}\} \subseteq E_n$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &:= \mathrm{LL}^{-1}(E_n - E_n^{\mathrm{reg}}) \\
&= \{y \in Y \mid \Delta_W(y, X_n) \text{ a des racines multiples en } X_n\} \\
&= \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\} \,,
\end{aligned}$$

Un revêtement ramifié

$$E_n^{\mathrm{reg}} := \{\text{configurations de } n \text{ points } \textbf{distincts}\} \subseteq E_n$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &:= \mathrm{LL}^{-1}(E_n - E_n^{\mathrm{reg}}) \\ &= \{y \in Y \mid \Delta_W(y, X_n) \text{ a des racines multiples en } X_n\} \\ &= \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\} ,\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}D_{\mathrm{LL}} &:= \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, X_n); X_n) \\ &= \mathrm{Disc}(X_n^n + a_2 X_n^{n-2} + \cdots + a_n; X_n).\end{aligned}$$

Un revêtement ramifié

$$E_n^{\text{reg}} := \{\text{configurations de } n \text{ points } \textbf{distincts}\} \subseteq E_n$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &:= \mathrm{LL}^{-1}(E_n - E_n^{\text{reg}}) \\ &= \{y \in Y \mid \Delta_W(y, X_n) \text{ a des racines multiples en } X_n\} \\ &= \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\}\ , \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{LL}} &:= \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, X_n); X_n) \\ &= \mathrm{Disc}(X_n^n + a_2 X_n^{n-2} + \cdots + a_n; X_n). \end{aligned}$$

Théorème (Looijenga, Lyashko, Bessis)

- *L'extension d'anneaux* $\mathbb{C}[a_2, \ldots, a_n] \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ *est libre, de rang* $n!h^n/|W|$.
- LL *est un morphisme fini, et un revêtement ramifié.*
- *sa restriction* $Y - \mathcal{K} \twoheadrightarrow E_n^{\text{reg}}$ *est un revêtement non ramifié de degré* $n!h^n/|W|$.

Nombre de Lyashko-Looijenga

$$\begin{aligned}
\deg(\mathrm{LL}) &= \prod_{i=2}^{n} \deg(a_i) \Big/ \prod_{j=1}^{n-1} \deg(X_j) \\
&= \prod_{i=2}^{n} ih \Big/ \prod_{j=1}^{n-1} d_j \\
&= \frac{n!h^n}{|W|}
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ **nombre de Lyashko-Looijenga** de W.

Nombre de Lyashko-Looijenga

$$\begin{aligned}\deg(\mathrm{LL}) &= \prod_{i=2}^{n} \deg(a_i) \Big/ \prod_{j=1}^{n-1} \deg(X_j) \\ &= \prod_{i=2}^{n} ih \Big/ \prod_{j=1}^{n-1} d_j \\ &= \frac{n!\,h^n}{|W|}\end{aligned}$$

$\leadsto$ **nombre de Lyashko-Looijenga** de W.

C'est aussi le nombre de décompositions réduites d'un élément de Coxeter c de W :

$$\mathrm{Red}_{\mathcal{R}}(c) := \{(r_1, \ldots, r_n) \in \mathcal{R}^n \mid r_1 \ldots r_n = c\}.$$

... ce n'est pas un hasard...

1 Revêtement LL et factorisations d'un élément de Coxeter
- Définition de LL
- Factorisations d'un élément de Coxeter
- Factorisations en (n-1) blocs

2 Jacobien et discriminant
- Extension finie graduée d'anneaux de polynômes
- Extension « bien ramifiée »
- Cas de LL

3 Treillis des partitions non-croisées de type W
- Définitions
- Nombres de Fuss-Catalan de type W

4 Perspectives

Éléments de Coxeter

$$V^{\mathrm{reg}} := V - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H.$$

Régularité de Springer :

$w \in W$ est dit ζ-régulier (pour $\zeta \in \mathbb{C}$) s'il a un vecteur propre dans V^{reg} pour la valeur propre ζ.

Éléments de Coxeter

$$V^{\mathrm{reg}} := V - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H.$$

Régularité de Springer :
$w \in W$ est dit ζ-régulier (pour $\zeta \in \mathbb{C}$) s'il a un vecteur propre dans V^{reg} pour la valeur propre ζ.

Définition (Élément de Coxeter)

Un élément de Coxeter est un élément $e^{2i\pi/h}$-régulier de W.

Si W est bien engendré, il existe des éléments de Coxeter (« h est régulier »), et ils sont tous conjugués.

Éléments de Coxeter

$$V^{\mathrm{reg}} := V - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H.$$

Régularité de Springer :
$w \in W$ est dit ζ-régulier (pour $\zeta \in \mathbb{C}$) s'il a un vecteur propre dans V^{reg} pour la valeur propre ζ.

Définition (Élément de Coxeter)

Un élément de Coxeter est un élément $e^{2i\pi/h}$-régulier de W.

Si W est bien engendré, il existe des éléments de Coxeter (« h est régulier »), et ils sont tous conjugués.

Cas réel : équivalent à la définition usuelle (produit des réflexions selon les murs d'une chambre de l'arrangement).

Factorisations par blocs

$\mathcal{R}$: ensemble de toutes les réflexions de W.
Longueur ℓ relative à $\mathcal{R}$: pour $w \in W$,

$$\ell(w) = \min\{p \in \mathbb{N} \mid \exists r_1, \dots, r_p \in \mathcal{R}, w = r_1 \dots r_p\}.$$

Factorisations par blocs

$\mathcal{R}$: ensemble de toutes les réflexions de W.
Longueur ℓ relative à $\mathcal{R}$: pour $w \in W$,

$$\ell(w) = \min\{p \in \mathbb{N} \mid \exists r_1, \ldots, r_p \in \mathcal{R}, w = r_1 \ldots r_p\}.$$

Soit c un élément de Coxeter de W.

Définition

$(w_1, \ldots, w_p)$ est une factorisation par blocs de c si :

Factorisations par blocs

$\mathcal{R}$: ensemble de toutes les réflexions de W.
Longueur ℓ relative à $\mathcal{R}$: pour $w \in W$,

$$\ell(w) = \min\{p \in \mathbb{N} \mid \exists r_1, \dots, r_p \in \mathcal{R}, w = r_1 \dots r_p\}.$$

Soit c un élément de Coxeter de W.

Définition

$(w_1, \dots, w_p)$ est une factorisation par blocs de c si :

- $w_1, \dots, w_p \in W - \{1\}$;

Factorisations par blocs

$\mathcal{R}$: ensemble de toutes les réflexions de W.
Longueur ℓ relative à $\mathcal{R}$: pour $w \in W$,

$$\ell(w) = \min\{p \in \mathbb{N} \mid \exists r_1, \dots, r_p \in \mathcal{R}, w = r_1 \dots r_p\}.$$

Soit c un élément de Coxeter de W.

Définition

$(w_1, \dots, w_p)$ est une factorisation par blocs de c si :

- $w_1, \dots, w_p \in W - \{1\}$;
- $w_1 \dots w_p = c$;

Factorisations par blocs

$\mathcal{R}$: ensemble de toutes les réflexions de W.
Longueur ℓ relative à $\mathcal{R}$: pour $w \in W$,

$$\ell(w) = \min\{p \in \mathbb{N} \mid \exists r_1, \dots, r_p \in \mathcal{R}, w = r_1 \dots r_p\}.$$

Soit c un élément de Coxeter de W.

Définition

$(w_1, \dots, w_p)$ est une factorisation par blocs de c si :

- $w_1, \dots, w_p \in W - \{1\}$;
- $w_1 \dots w_p = c$;
- $\ell(w_1) + \cdots + \ell(w_p) = \ell(c) = n$.

Factorisations par blocs

$\mathcal{R}$: ensemble de toutes les réflexions de W.
Longueur ℓ relative à $\mathcal{R}$: pour $w \in W$,

$$\ell(w) = \min\{p \in \mathbb{N} \mid \exists r_1, \dots, r_p \in \mathcal{R}, w = r_1 \dots r_p\}.$$

Soit c un élément de Coxeter de W.

Définition

$(w_1, \dots, w_p)$ est une factorisation par blocs de c si :

- $w_1, \dots, w_p \in W - \{1\}$;
- $w_1 \dots w_p = c$;
- $\ell(w_1) + \dots + \ell(w_p) = \ell(c) = n$.

Factorisations par blocs

$\mathcal{R}$: ensemble de toutes les réflexions de W.
Longueur ℓ relative à $\mathcal{R}$: pour $w \in W$,

$$\ell(w) = \min\{p \in \mathbb{N} \mid \exists r_1, \ldots, r_p \in \mathcal{R}, w = r_1 \ldots r_p\}.$$

Soit c un élément de Coxeter de W.

Définition

$(w_1, \ldots, w_p)$ est une factorisation par blocs de c si :

- $w_1, \ldots, w_p \in W - \{1\}$;
- $w_1 \ldots w_p = c$;
- $\ell(w_1) + \cdots + \ell(w_p) = \ell(c) = n$.

$\mathrm{FACT}_p(c) := \{\text{factorisations en } p \text{ blocs}\}$

Factorisations par blocs

$\mathcal{R}$: ensemble de toutes les réflexions de W.
Longueur ℓ relative à $\mathcal{R}$: pour $w \in W$,

$$\ell(w) = \min\{p \in \mathbb{N} \mid \exists r_1, \dots, r_p \in \mathcal{R}, w = r_1 \dots r_p\}.$$

Soit c un élément de Coxeter de W.

Définition

$(w_1, \dots, w_p)$ est une factorisation par blocs de c si :

- $w_1, \dots, w_p \in W - \{1\}$;
- $w_1 \dots w_p = c$;
- $\ell(w_1) + \dots + \ell(w_p) = \ell(c) = n$.

$\mathrm{FACT}_p(c) := \{$factorisations en p blocs$\}$
$\rightsquigarrow$ détermine une partition de n, et même une composition (partition ordonnée) de n.
Ex. : $\mathrm{FACT}_n(c) = \mathrm{FACT}_{1^n}(c) = \mathrm{Red}_{\mathcal{R}}(c)$.

Factorisations issues de la topologie

Hypersurface $\mathcal{H} \subseteq W\backslash V \simeq Y \times \mathbb{C}$.

$$(y, x) \in \mathcal{H} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathrm{LL}(y)$$

Factorisations issues de la topologie

Hypersurface $\mathcal{H} \subseteq W \backslash V \simeq Y \times \mathbb{C}$.

$$(y, x) \in \mathcal{H} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathrm{LL}(y)$$

Constructions des « **tunnels** » de Bessis

$$\rightsquigarrow \text{ une application } \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & W \\ (y, x) & \mapsto & c_{y,x} \end{array}$$

Factorisations issues de la topologie

Hypersurface $\mathcal{H} \subseteq W\backslash V \simeq Y \times \mathbb{C}$.

$$(y,x) \in \mathcal{H} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathrm{LL}(y)$$

Constructions des « **tunnels** » de Bessis

$$\rightsquigarrow \text{ une application } \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & W \\ (y,x) & \mapsto & c_{y,x} \end{array}$$

telle que, si $(x_1, \dots, x_p)$ est le support ordonné de $\mathrm{LL}(y)$ (pour l'ordre lex. sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$), alors :

$(c_{y,x_1}, \dots, c_{y,x_p}) \in \mathrm{FACT}_p(c)$.

Factorisations issues de la topologie

Hypersurface $\mathcal{H} \subseteq W\backslash V \simeq Y \times \mathbb{C}$.

$$(y, x) \in \mathcal{H} \iff x \in \mathrm{LL}(y)$$

Constructions des « **tunnels** » de Bessis

$\rightsquigarrow$ une application $\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & W \\ (y, x) & \mapsto & c_{y,x} \end{array}$

telle que, si $(x_1, \ldots, x_p)$ est le support ordonné de $\mathrm{LL}(y)$ (pour l'ordre lex. sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$), alors :

$(c_{y,x_1}, \ldots, c_{y,x_p}) \in \mathrm{FACT}_p(c)$.

Notation : $\mathrm{fact}(y) := (c_{y,x_1}, \ldots, c_{y,x_p})$.

Factorisations issues de la topologie

Hypersurface $\mathcal{H} \subseteq W\backslash V \simeq Y \times \mathbb{C}$.

$$(y, x) \in \mathcal{H} \iff x \in \mathrm{LL}(y)$$

Constructions des « **tunnels** » de Bessis

$\rightsquigarrow$ une application $\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & W \\ (y, x) & \mapsto & c_{y,x} \end{array}$

telle que, si $(x_1, \ldots, x_p)$ est le support ordonné de $\mathrm{LL}(y)$ (pour l'ordre lex. sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$), alors :

$(c_{y,x_1}, \ldots, c_{y,x_p}) \in \mathrm{FACT}_p(c)$.

Notation : $\mathrm{fact}(y) := (c_{y,x_1}, \ldots, c_{y,x_p})$.

On peut caractériser la longueur et la classe de conjugaison de $c_{y,x}$ selon la position de (y, x) dans $\mathcal{H}$ ...

Stratification de $W\backslash V$ et éléments de Coxeter paraboliques

Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) : $\mathcal{L} := \{\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.

Stratification de $W\backslash V$ et éléments de Coxeter paraboliques

Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) :
$\mathcal{L} := \{\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.
Quotient par $W \rightsquigarrow$ stratification $\bar{\mathcal{L}} = W\backslash\mathcal{L} = (W \cdot L)_{L\in\mathcal{L}}$.

Stratification de $W \backslash V$ et éléments de Coxeter paraboliques

Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) :
$\mathcal{L} := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.
Quotient par $W \rightsquigarrow$ stratification $\bar{\mathcal{L}} = W \backslash \mathcal{L} = (W \cdot L)_{L \in \mathcal{L}}$.
Pour $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}$, $\Lambda^0 := \Lambda$ privée de ses strates intérieures.

Stratification de $W \backslash V$ et éléments de Coxeter paraboliques

Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) :
$\mathcal{L} := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.
Quotient par $W \rightsquigarrow$ stratification $\bar{\mathcal{L}} = W \backslash \mathcal{L} = (W \cdot L)_{L \in \mathcal{L}}$.
Pour $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}$, $\Lambda^0 := \Lambda$ privée de ses strates intérieures.

Bijection [Steinberg] :
$\mathcal{L} \leftrightarrow \{\text{sous-groupes paraboliques de } W\} =: SGP(W)$.

Stratification de $W\backslash V$ et éléments de Coxeter paraboliques

Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) :
$\mathcal{L} := \{\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.
Quotient par $W \rightsquigarrow$ stratification $\bar{\mathcal{L}} = W\backslash\mathcal{L} = (W\cdot L)_{L\in\mathcal{L}}$.
Pour $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}$, $\Lambda^0 := \Lambda$ privée de ses strates intérieures.

Bijection [Steinberg] :
$\mathcal{L} \leftrightarrow \{$sous-groupes paraboliques de $W\} =: SGP(W)$.
$\rightsquigarrow$ bijections naturelles :

$$\bar{\mathcal{L}} \quad \leftrightarrow \quad SGP(W)/\text{conj.}$$

Stratification de $W\backslash V$ et éléments de Coxeter paraboliques

Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) :
$\mathcal{L} := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.
Quotient par $W \rightsquigarrow$ stratification $\bar{\mathcal{L}} = W\backslash\mathcal{L} = (W \cdot L)_{L \in \mathcal{L}}$.
Pour $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}$, $\Lambda^0 := \Lambda$ privée de ses strates intérieures.

Bijection [Steinberg] :
$\mathcal{L} \leftrightarrow \{$sous-groupes paraboliques de $W\} =: SGP(W)$.
$\rightsquigarrow$ bijections naturelles :

$$\bar{\mathcal{L}} \quad \leftrightarrow \quad SGP(W)/\text{conj.} \quad \leftrightarrow \quad \text{Cox-parab}(W)/\text{conj.}$$

Cox-parab(W) : éléments de Coxeter paraboliques,
i.e. éléments de Coxeter d'un s.g.p. de W.

Stratification de $W\backslash V$ et éléments de Coxeter paraboliques

Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) :
$\mathcal{L} := \{\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.
Quotient par $W \rightsquigarrow$ stratification $\bar{\mathcal{L}} = W\backslash\mathcal{L} = (W\cdot L)_{L\in\mathcal{L}}$.
Pour $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}$, $\Lambda^0 := \Lambda$ privée de ses strates intérieures.

Bijection [Steinberg] :
$\mathcal{L} \leftrightarrow \{\text{sous-groupes paraboliques de } W\} =: SGP(W)$.
$\rightsquigarrow$ bijections naturelles :

$$
\begin{array}{ccccc}
\bar{\mathcal{L}} & \leftrightarrow & SGP(W)/\text{conj.} & \leftrightarrow & \text{Cox-parab}(W)/\text{conj.} \\
\text{codim}(\Lambda) & \leftrightarrow & \text{rang}(W') & \leftrightarrow & \ell(c')
\end{array}
$$

Cox-parab(W) : éléments de Coxeter paraboliques,
i.e. éléments de Coxeter d'un s.g.p. de W.

Factorisations et LL

Proposition

*Soit $y \in Y$. Pour tout $x \in \mathrm{LL}(y)$, $c_{y,x}$ est un élément de Coxeter parabolique de W. Sa **longueur** est égale à la multiplicité de x dans $\mathrm{LL}(y)$; sa **classe de conjugaison** correspond à l'unique strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}$ telle que $(y, x) \in \Lambda^0$.*

Factorisations et LL

Proposition

Soit $y \in Y$. Pour tout $x \in \mathrm{LL}(y)$, $c_{y,x}$ est un élément de Coxeter parabolique de W. Sa ***longueur*** *est égale à la multiplicité de x dans $\mathrm{LL}(y)$; sa* ***classe de conjugaison*** *correspond à l'unique strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}$ telle que $(y, x) \in \Lambda^0$.*

Factorisation par blocs $\rightsquigarrow$ **composition** de n

$\omega \in E_n \rightsquigarrow$ **composition** de n (multiplicités dans l'ordre lex.)

Factorisations et LL

Proposition

*Soit $y \in Y$. Pour tout $x \in \mathrm{LL}(y)$, $c_{y,x}$ est un élément de Coxeter parabolique de W. Sa **longueur** est égale à la multiplicité de x dans $\mathrm{LL}(y)$; sa **classe de conjugaison** correspond à l'unique strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}$ telle que $(y, x) \in \Lambda^0$.*

Factorisation par blocs $\rightsquigarrow$ **composition** de n

$\omega \in E_n \rightsquigarrow$ **composition** de n (multiplicités dans l'ordre lex.)

Prop. $\Rightarrow$ compatibilité de fact(y) et LL(y) (même composition)

Factorisations et LL

Proposition

*Soit $y \in Y$. Pour tout $x \in \mathrm{LL}(y)$, $c_{y,x}$ est un élément de Coxeter parabolique de W. Sa **longueur** est égale à la multiplicité de x dans $\mathrm{LL}(y)$; sa **classe de conjugaison** correspond à l'unique strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}$ telle que $(y, x) \in \Lambda^0$.*

Factorisation par blocs $\rightsquigarrow$ **composition** de n

$\omega \in E_n \rightsquigarrow$ **composition** de n (multiplicités dans l'ordre lex.)

Prop. $\Rightarrow$ compatibilité de $\mathrm{fact}(y)$ et $\mathrm{LL}(y)$ (même composition)

Théorème (Bessis)

*L'application $Y \xrightarrow{\mathrm{LL} \times \mathrm{fact}} E_n \times \mathrm{FACT}(c)$ est **injective**, et son image est l'ensemble des paires compatibles.*

Factorisations et LL

Proposition

*Soit $y \in Y$. Pour tout $x \in \mathrm{LL}(y)$, $c_{y,x}$ est un élément de Coxeter parabolique de W. Sa **longueur** est égale à la multiplicité de x dans $\mathrm{LL}(y)$; sa **classe de conjugaison** correspond à l'unique strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}$ telle que $(y, x) \in \Lambda^0$.*

Factorisation par blocs $\rightsquigarrow$ **composition** de n

$\omega \in E_n \rightsquigarrow$ **composition** de n (multiplicités dans l'ordre lex.)

Prop. $\Rightarrow$ compatibilité de fact(y) et LL(y) (même composition)

Théorème (Bessis)

*L'application $Y \xrightarrow{\mathrm{LL} \times \mathrm{fact}} E_n \times \mathrm{FACT}(c)$ est **injective**, et son image est l'ensemble des paires compatibles.*

$\forall \omega \in E_n$, fact induit $\mathrm{LL}^{-1}(\omega) \xrightarrow{\sim} \mathrm{FACT}_\mu(c)$, où $\mu = \mathrm{compo}(\omega)$.

Décompositions réduites de c

$$|\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(c)| \quad = \quad |\operatorname{FACT}_{\mu}(c)| \quad \text{pour } \mu = (1, \ldots, 1)$$

Décompositions réduites de c

$$
\begin{aligned}
|\,\mathrm{Red}_{\mathcal{R}}(c)| &= |\,\mathrm{FACT}_{\mu}(c)| \quad \text{pour } \mu = (1, \ldots, 1) \\
&= |\,\mathrm{LL}^{-1}(\omega)| \quad \text{pour } \omega \in E_n^{\mathrm{reg}}
\end{aligned}
$$

Décompositions réduites de c

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(c)| &= |\mathrm{FACT}_{\mu}(c)| \quad \text{pour } \mu = (1, \ldots, 1) \\
&= |\mathrm{LL}^{-1}(\omega)| \quad \text{pour } \omega \in E_n^{\mathrm{reg}} \\
&= \deg(\mathrm{LL}) \\
&= \frac{n!\, h^n}{|W|}
\end{aligned}
$$

Décompositions réduites de c

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(c)| &= |\mathrm{FACT}_{\mu}(c)| \quad \text{pour } \mu = (1, \ldots, 1) \\
&= |\mathrm{LL}^{-1}(\omega)| \quad \text{pour } \omega \in E_n^{\mathrm{reg}} \\
&= \deg(\mathrm{LL}) \\
&= \frac{n!\,h^n}{|W|}
\end{aligned}
$$

Peut-on calculer de même $|\mathrm{FACT}_{n-1}(c)| = |\mathrm{FACT}_{2^1 1^{n-2}}(c)|$?

1. Revêtement LL et factorisations d'un élément de Coxeter
   - Définition de LL
   - Factorisations d'un élément de Coxeter
   - Factorisations en (n-1) blocs
2. Jacobien et discriminant
   - Extension finie graduée d'anneaux de polynômes
   - Extension « bien ramifiée »
   - Cas de LL
3. Treillis des partitions non-croisées de type W
   - Définitions
   - Nombres de Fuss-Catalan de type W
4. Perspectives

Composantes irréductibles de $\mathcal{K}$

Partie ramifiée de LL : $\mathcal{K} \twoheadrightarrow E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$.
$\mathcal{K} = \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\}$.

Composantes irréductibles de $\mathcal{K}$

Partie ramifiée de LL : $\mathcal{K} \twoheadrightarrow E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$.
$\mathcal{K} = \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\}$. On note :
$\bar{\mathcal{L}}_2 :=$ {strates de $\bar{\mathcal{L}}$ de codimension 2}

Composantes irréductibles de $\mathcal{K}$

Partie ramifiée de LL : $\mathcal{K} \twoheadrightarrow E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$.
$\mathcal{K} = \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\}$. On note :
$\bar{\mathcal{L}}_2 :=$ {strates de $\bar{\mathcal{L}}$ de codimension 2} et

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & W\backslash V \simeq Y \times \mathbb{C} & \to & Y \\ & \bar{v} = (y, x) & \mapsto & y \end{array}$$

Composantes irréductibles de $\mathcal{K}$

Partie ramifiée de LL : $\mathcal{K} \twoheadrightarrow E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$.
$\mathcal{K} = \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\}$. On note :
$\bar{\mathcal{L}}_2 :=$ {strates de $\bar{\mathcal{L}}$ de codimension 2} et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} W\backslash V \simeq Y \times \mathbb{C} & \to & Y \\ \bar{v} = (y, x) & \mapsto & y \end{array}$$

Proposition

Les composantes irréductibles de $\mathcal{K}$ sont les $\varphi(\Lambda)$, pour $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$.

Composantes irréductibles de $\mathcal{K}$

Partie ramifiée de LL : $\mathcal{K} \twoheadrightarrow E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$.
$\mathcal{K} = \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\}$. On note :
$\bar{\mathcal{L}}_2 := \{$strates de $\bar{\mathcal{L}}$ de codimension 2$\}$ et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} W\backslash V \simeq Y \times \mathbb{C} & \to & Y \\ \bar{v} = (y, x) & \mapsto & y \end{array}$$

Proposition

Les composantes irréductibles de $\mathcal{K}$ sont les $\varphi(\Lambda)$, pour $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$.

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{K} & \Leftrightarrow \exists x \in \mathrm{LL}(y), \text{ tel que } \ell(c_{y,x}) \geq 2 \\ & \Leftrightarrow \exists x \in \mathrm{LL}(y), \exists \Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2, \text{ tel que } (y, x) \in \Lambda \\ & \Leftrightarrow \exists \Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2, \text{ tel que } y \in \varphi(\Lambda). \end{aligned}$$

Restriction de LL à une composante de $\mathcal{K}$

On écrit $D = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$, avec D_Λ irréductibles de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n-1}]$ tels que $\varphi(\Lambda) = \{D_\Lambda = 0\}$.

Restriction de LL à une composante de $\mathcal{K}$

On écrit $D = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$, avec D_Λ irréductibles de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n-1}]$ tels que $\varphi(\Lambda) = \{D_\Lambda = 0\}$.
On définit la restriction

$$\mathrm{LL}_\Lambda : \varphi(\Lambda) \to E_n - E_n^{\mathrm{reg}} .$$

Restriction de LL à une composante de $\mathcal{K}$

On écrit $D = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$, avec D_Λ irréductibles de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n-1}]$ tels que $\varphi(\Lambda) = \{D_\Lambda = 0\}$.
On définit la restriction

$$\mathrm{LL}_\Lambda : \varphi(\Lambda) \to E_n - E_n^{\mathrm{reg}} \ .$$

LL_Λ correspond à l'extension

$$\mathbb{C}[a_2, \dots, a_n]/(D) \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_{n-1}]/(D_\Lambda) \ .$$

Restriction de LL à une composante de $\mathcal{K}$

On écrit $D = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$, avec D_Λ irréductibles de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ tels que $\varphi(\Lambda) = \{D_\Lambda = 0\}$.
On définit la restriction

$$\mathrm{LL}_\Lambda : \varphi(\Lambda) \to E_n - E_n^{\mathrm{reg}} \ .$$

LL_Λ correspond à l'extension

$$\mathbb{C}[a_2, \ldots, a_n]/(D) \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_{n-1}]/(D_\Lambda) \ .$$

$$\frac{\prod \deg(a_i)}{\deg(D)} \Big/ \frac{\prod \deg(X_j)}{\deg(D_\Lambda)} = \frac{(n-2)!h^{n-2}}{|W|}$$

Factorisations « de type Λ »

Théorème (R.)

Pour toute strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}_2$:

- LL_Λ *est un morphisme fini de* *degré* $\frac{(n-2)!\ h^{n-1}}{|W|} \deg D_\Lambda$;

Factorisations « de type Λ »

Théorème (R.)

Pour toute strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}_2$:

- LL_Λ *est un morphisme fini de* *degré* $\frac{(n-2)!\ h^{n-1}}{|W|} \deg D_\Lambda$;
- *le nombre de factorisations de c en $n-2$ réflexions + un élément de longueur 2 et de classe de conjugaison correspondant à Λ (dans un ordre quelconque) est :*

$$|\,\mathrm{FACT}^{\Lambda}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\ h^{n-1}}{|W|} \deg D_\Lambda\ .$$

Factorisations « de type Λ »

Théorème (R.)

Pour toute strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}_2$:

- LL_Λ *est un morphisme fini de* *degré* $\frac{(n-2)!\ h^{n-1}}{|W|} \deg D_\Lambda$;
- *le nombre de factorisations de c en $n-2$ réflexions + un élément de longueur 2 et de classe de conjugaison correspondant à Λ (dans un ordre quelconque) est :*

$$|\operatorname{FACT}_{n-1}^{\Lambda}(c)| = \frac{(n-1)!\ h^{n-1}}{|W|} \deg D_\Lambda \ .$$

$$\begin{aligned}
|\operatorname{FACT}_{n-1}^{\Lambda}(c)| &= (n-1)\ |\operatorname{FACT}_{(2,1,\dots,1)}^{\Lambda}(c)| \\
&= (n-1)\ |\mathrm{LL}^{-1}(\omega) \cap \varphi(\Lambda)| \qquad \text{pour} \\
&\qquad\qquad \omega \text{ de composition}(2,1,\dots,1) \\
&= (n-1)\ |\mathrm{LL}_\Lambda^{-1}(\omega)| \\
&= (n-1)\ \deg(\mathrm{LL}_\Lambda)
\end{aligned}$$

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$|\,\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$ *s'exprime en fonction de* $\sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg(D_\Lambda)$.

Comment calculer ceci **de manière globale** (sans cas-par-cas) ?

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$|\,\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$ *s'exprime en fonction de* $\sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg(D_\Lambda)$.

Comment calculer ceci **de manière globale** (sans cas-par-cas) ?

$$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$$

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$|\,\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$ *s'exprime en fonction de* $\sum_{\Lambda\in\bar{\mathcal{L}}_2} \deg(D_\Lambda)$.

Comment calculer ceci **de manière globale** (sans cas-par-cas) ?

$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda\in\bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$

Soit $J_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Jac}((a_2,\dots,a_n)/(X_1,\dots,X_{n-1}))$.

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$|\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$ *s'exprime en fonction de* $\sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg(D_\Lambda)$.

Comment calculer ceci **de manière globale** (sans cas-par-cas) ?

$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$

Soit $J_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Jac}((a_2, \ldots, a_n)/(X_1, \ldots, X_{n-1}))$.

Expérimentalement

$$J_{\mathrm{LL}} \stackrel{?}{=} \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$$

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$|\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$ *s'exprime en fonction de* $\sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg(D_\Lambda)$.

Comment calculer ceci **de manière globale** (sans cas-par-cas) ?

$$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda} \qquad J_{\mathrm{LL}} \stackrel{?}{=} \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$$

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$|\,\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$ *s'exprime en fonction de* $\sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg(D_\Lambda)$.

Comment calculer ceci **de manière globale** (sans cas-par-cas) ?

$$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda} \qquad J_{\mathrm{LL}} \overset{?}{=} \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$$

$$\Delta_W = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H} \qquad J_W = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H - 1}$$

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$|\,\mathrm{FACT}_{n-1}(c)\,|$ *s'exprime en fonction de* $\sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg(D_\Lambda)$.

Comment calculer ceci **de manière globale** (sans cas-par-cas) ?

$$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda} \qquad J_{\mathrm{LL}} \stackrel{?}{=} \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$$

?

$$\Delta_W = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H} \qquad J_W = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H - 1}$$

Extension finie graduée d'anneaux de polynômes

$X_1, \ldots, X_n$ indéterminées de degrés $b_1, \ldots, b_n$.
$B := \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$

Extension finie graduée d'anneaux de polynômes

$X_1, \ldots, X_n$ indéterminées de degrés $b_1, \ldots, b_n$.
$B := \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$
Soient $f_1, \ldots, f_n \in B$, polynômes homogènes pondérés, de degrés $a_1, \ldots, a_n$

Extension finie graduée d'anneaux de polynômes

$X_1, \ldots, X_n$ indéterminées de degrés $b_1, \ldots, b_n$.
$B := \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$
Soient $f_1, \ldots, f_n \in B$, polynômes homogènes pondérés, de degrés $a_1, \ldots, a_n$, et f le morphisme quasi-homogène associé

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)). \end{array}$$

Extension finie graduée d'anneaux de polynômes

$X_1, \ldots, X_n$ indéterminées de degrés $b_1, \ldots, b_n$.
$B := \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$
Soient $f_1, \ldots, f_n \in B$, polynômes homogènes pondérés, de degrés $a_1, \ldots, a_n$, et f le morphisme quasi-homogène associé

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)). \end{array}$$

On pose $A := \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$.

Extension finie graduée d'anneaux de polynômes

$X_1, \ldots, X_n$ indéterminées de degrés $b_1, \ldots, b_n$.
$B := \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$
Soient $f_1, \ldots, f_n \in B$, polynômes homogènes pondérés, de degrés $a_1, \ldots, a_n$, et f le morphisme quasi-homogène associé

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)). \end{array}$$

On pose $A := \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$.
On considère le cas où l'extension d'anneaux $A \subseteq B$ est finie (c'est équivalent à $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$).

Extension finie graduée d'anneaux de polynômes

$X_1, \ldots, X_n$ indéterminées de degrés $b_1, \ldots, b_n$.
$B := \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$
Soient $f_1, \ldots, f_n \in B$, polynômes homogènes pondérés, de degrés $a_1, \ldots, a_n$, et f le morphisme quasi-homogène associé

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)). \end{array}$$

On pose $A := \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$.
On considère le cas où l'extension d'anneaux $A \subseteq B$ est finie (c'est équivalent à $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$).
$\rightsquigarrow$ B est un A-module **libre** de type fini (Cohen-Macaulay), de rang
$r := \deg(f) = \prod a_j / \prod b_i$.

Ramification

Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ est un idéal premier de A : « $\mathfrak{q}$ est **au-dessus** de $\mathfrak{p}$ ».

Ramification

Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ est un idéal premier de A : « $\mathfrak{q}$ est **au-dessus** de $\mathfrak{p}$ ».
Théorème de Cohen-Macaulay :

$$\mathfrak{q} \text{ est de hauteur } 1 \iff \mathfrak{p} \text{ est de hauteur } 1 \ .$$

Ramification

Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ est un idéal premier de A : « $\mathfrak{q}$ est **au-dessus** de $\mathfrak{p}$ ».
Théorème de Cohen-Macaulay :

$$\mathfrak{q} \text{ est de hauteur } 1 \iff \mathfrak{p} \text{ est de hauteur } 1 \,.$$

Dans ce cas, on écrit $\mathfrak{q} = (Q)$ et $\mathfrak{p} = (P)$, avec P, Q polynômes irréductibles de A, B resp., et $(Q) \cap A = (P)$.

Ramification

Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ est un idéal premier de A : « $\mathfrak{q}$ est **au-dessus** de $\mathfrak{p}$ ».
Théorème de Cohen-Macaulay :

$$\mathfrak{q} \text{ est de hauteur 1} \iff \mathfrak{p} \text{ est de hauteur 1} .$$

Dans ce cas, on écrit $\mathfrak{q} = (Q)$ et $\mathfrak{p} = (P)$, avec P, Q polynômes irréductibles de A, B resp., et $(Q) \cap A = (P)$.

Indice de ramification de $\mathfrak{q}$ sur $\mathfrak{p}$:
$e(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) := v_Q(P)$ (noté simplement $e_{\mathfrak{q}}$ ou e_Q)

Ramification

Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ est un idéal premier de A : « $\mathfrak{q}$ est **au-dessus** de $\mathfrak{p}$ ».
Théorème de Cohen-Macaulay :

$$\mathfrak{q} \text{ est de hauteur } 1 \iff \mathfrak{p} \text{ est de hauteur } 1 .$$

Dans ce cas, on écrit $\mathfrak{q} = (Q)$ et $\mathfrak{p} = (P)$, avec P, Q polynômes irréductibles de A, B resp., et $(Q) \cap A = (P)$.

Indice de ramification de $\mathfrak{q}$ sur $\mathfrak{p}$:
$e(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) := v_Q(P)$ (noté simplement $e_\mathfrak{q}$ ou e_Q)
$\mathrm{Spec}_1(B) := \{\text{idéaux premiers de } B \text{ de hauteur } 1\}$

Ramification

Si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ est un idéal premier de A : « $\mathfrak{q}$ est **au-dessus** de $\mathfrak{p}$ ».
Théorème de Cohen-Macaulay :

$$\mathfrak{q} \text{ est de hauteur } 1 \iff \mathfrak{p} \text{ est de hauteur } 1 \ .$$

Dans ce cas, on écrit $\mathfrak{q} = (Q)$ et $\mathfrak{p} = (P)$, avec P, Q polynômes irréductibles de A, B resp., et $(Q) \cap A = (P)$.

Indice de ramification de $\mathfrak{q}$ sur $\mathfrak{p}$:
$e(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) := v_Q(P)$ (noté simplement $e_\mathfrak{q}$ ou e_Q)
$\mathrm{Spec}_1(B) := \{$idéaux premiers de B de hauteur $1\}$
$\mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B) := \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}_1(B) \mid e_\mathfrak{q} > 1\}$

Factorisation du Jacobien

Déterminant jacobien de l'extension $A \subseteq B$:

$$J_{B/A} := \mathrm{Jac}((f_1, \ldots, f_n)/(X_1, \ldots, X_n)) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Factorisation du Jacobien

Déterminant jacobien de l'extension $A \subseteq B$:

$$J_{B/A} := \mathrm{Jac}((f_1, \ldots, f_n)/(X_1, \ldots, X_n)) = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Théorème

Si $A \subseteq B$ est une extension polynomiale finie graduée, alors :

$$J_{B/A} \doteq \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}.$$

Lieu de ramification, lieu de branchement

On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$
$\rightsquigarrow$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.

Lieu de ramification, lieu de branchement

On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$
$\rightsquigarrow$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.
Lieu de ramification : $V_{\mathrm{ram}} := Z(J) = \bigcup_{Q \in \operatorname{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Z(Q)$

Lieu de ramification, lieu de branchement

On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$
$\rightsquigarrow$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.
Lieu de ramification : $V_{\text{ram}} := Z(J) = \bigcup_{Q \in \operatorname{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Z(Q)$
Lieu de branchement : $U_{\text{br}} := \left\{ u \in U \,,\, \left| f^{-1}(u) \right| < r \right\}$
$(r = \deg(f))$

Lieu de ramification, lieu de branchement

On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$
$\rightsquigarrow$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.
Lieu de ramification : $V_{\mathrm{ram}} := Z(J) = \bigcup_{Q \in \operatorname{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Z(Q)$
Lieu de branchement : $U_{\mathrm{br}} := \left\{ u \in U \,,\, \left| f^{-1}(u) \right| < r \right\}$
$(r = \deg(f))$

Propriétés

$$f(V_{ram}) = U_{br}$$

Lieu de ramification, lieu de branchement

On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$
$\leadsto$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.
Lieu de ramification : $V_{\text{ram}} := Z(J) = \bigcup_{Q \in \operatorname{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Z(Q)$
Lieu de branchement : $U_{\text{br}} := \left\{ u \in U \,,\ \left| f^{-1}(u) \right| < r \right\}$
$(r = \deg(f))$

Propriétés

$$f(V_{ram}) = U_{br}$$

De plus, la restriction de f : $V - f^{-1}(U_{br}) \twoheadrightarrow U - U_{br}$ est un revêtement de degré r.

Lieu de ramification, lieu de branchement

On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$
$\rightsquigarrow$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.
Lieu de ramification : $V_{\text{ram}} := Z(J) = \bigcup_{Q \in \operatorname{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Z(Q)$
Lieu de branchement : $U_{\text{br}} := \left\{ u \in U \,,\, \left| f^{-1}(u) \right| < r \right\}$
$(r = \deg(f))$

Propriétés

$$f(V_{ram}) = U_{br}$$

De plus, la restriction de f : $V - f^{-1}(U_{br}) \twoheadrightarrow U - U_{br}$ est un revêtement de degré r.

Question : $V_{\text{ram}} = f^{-1}(U_{\text{br}})$?

Extension « bien ramifiée »

Soit $J_0 \in A$ tel que $(J) \cap A = (J_0)$.

Extension « bien ramifiée »

Soit $J_0 \in A$ tel que $(J) \cap A = (J_0)$.
$\rightsquigarrow Z_U(J_0) = f(Z(J)) = f(V_{\mathrm{ram}}) = U_{\mathrm{br}}$.

Extension « bien ramifiée »

Soit $J_0 \in A$ tel que $(J) \cap A = (J_0)$.
$\rightsquigarrow Z_U(J_0) = f(Z(J)) = f(V_{\mathrm{ram}}) = U_{\mathrm{br}}$.

$J = \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$.

Extension « bien ramifiée »

Soit $J_0 \in A$ tel que $(J) \cap A = (J_0)$.
$\rightsquigarrow Z_U(J_0) = f(Z(J)) = f(V_{\text{ram}}) = U_{\text{br}}$.

$J = \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$.Posons $R := \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q}$.

Extension « bien ramifiée »

Soit $J_0 \in A$ tel que $(J) \cap A = (J_0)$.
$\rightsquigarrow Z_U(J_0) = f(Z(J)) = f(V_{\mathrm{ram}}) = U_{\mathrm{br}}$.

$J = \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$.Posons $R := \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q}$.
Nécessairement, $J_0 = R \times$ peut-être un autre terme.

Extension « bien ramifiée »

Soit $J_0 \in A$ tel que $(J) \cap A = (J_0)$.
$\rightsquigarrow Z_U(J_0) = f(Z(J)) = f(V_{\mathrm{ram}}) = U_{\mathrm{br}}$.

$J = \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$.Posons $R := \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q}$.
Nécessairement, $J_0 = R \times$ peut-être un autre terme.

Proposition (Extension bien ramifiée, 1)

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *pour* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}_1(A)$, *s'il existe* $\mathfrak{q}_0 \in \mathrm{Spec}_1(B)$ *ramifié au-dessus de* $\mathfrak{p}$, *alors tout autre* $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}_1(B)$ *au-dessus de* $\mathfrak{p}$ *est aussi ramifié ;*
- *si P est un polynôme irréductible de A, alors, en tant que polynôme de B, soit il est réduit, soit chacun de ses facteurs irréductibles apparaît au moins deux fois ;*
- $R \in A$.

Extension « bien ramifiée » (suite)

On dira dans ce cas que l'extension $A \subseteq B$ (ou le morphisme f) est bien ramifié(e).

Extension « bien ramifiée » (suite)

On dira dans ce cas que l'extension $A \subseteq B$ (ou le morphisme f) est bien ramifié(e).
Extension galoisienne $\Rightarrow$ bien ramifiée.

Extension « bien ramifiée » (suite)

On dira dans ce cas que l'extension $A \subseteq B$ (ou le morphisme f) est bien ramifié(e).
Extension galoisienne $\Rightarrow$ bien ramifiée.
Exemple d'extension « mal ramifiée » :
$A = \mathbb{C}[X^2Y, X^2 + Y] \subseteq \mathbb{C}[X, Y] = B$

Extension « bien ramifiée » (suite)

On dira dans ce cas que l'extension $A \subseteq B$ (ou le morphisme f) est bien ramifié(e).
Extension galoisienne $\Rightarrow$ bien ramifiée.
Exemple d'extension « mal ramifiée » :
$A = \mathbb{C}[X^2Y, X^2 + Y] \subseteq \mathbb{C}[X, Y] = B$
(X^2Y) est en-dessous de deux idéaux de B : (X) qui est ramifié (Y) qui ne l'est pas.
$J = X(Y - X^2)\,;\, J_0 = X^2Y(Y - X^2)^2\,;\, R = X^2(Y - X^2)^2 \notin A.$

Extension « bien ramifiée » (suite)

On dira dans ce cas que l'extension $A \subseteq B$ (ou le morphisme f) est bien ramifié(e).
Extension galoisienne $\Rightarrow$ bien ramifiée.
Exemple d'extension « mal ramifiée » :
$A = \mathbb{C}[X^2 Y, X^2 + Y] \subseteq \mathbb{C}[X, Y] = B$
$(X^2 Y)$ est en-dessous de deux idéaux de B : (X) qui est ramifié (Y) qui ne l'est pas.
$J = X(Y - X^2)$; $J_0 = X^2 Y(Y - X^2)^2$; $R = X^2(Y - X^2)^2 \notin A$.

Proposition (Extension bien ramifiée, 2)

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- *f est bien ramifiée ;*
- *$J_0 \doteq R$, i.e. $Z_U(R) = U_{br}$;*
- *$f^{-1}(U_{br}) = V_{ram}$;*
- *$f(V_{ram}) \cap f(V - V_{ram}) = \emptyset$.*

Groupe de réflexion virtuel

Récapitulatif

Soit $A \subseteq B$ une extension polynomiale finie graduée, et **bien ramifiée**, correspondant à un morphisme $f : V \to U$. Alors :

Groupe de réflexion virtuel

Récapitulatif

Soit $A \subseteq B$ une extension polynomiale finie graduée, et **bien ramifiée**, correspondant à un morphisme $f : V \to U$. Alors :

- le lieu de ramification V_{ram} a pour équation $J \doteq \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$ (**Jacobien**) ;

Groupe de réflexion virtuel

Récapitulatif

Soit $A \subseteq B$ une extension polynomiale finie graduée, et **bien ramifiée**, correspondant à un morphisme $f : V \to U$. Alors :

- le lieu de ramification V_{ram} a pour équation $J \doteq \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$ (**Jacobien**) ;
- le lieu de branchement U_{br} a pour équation $R := \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q}$ (« **discriminant** » **?**).

Groupe de réflexion virtuel

Récapitulatif

Soit $A \subseteq B$ une extension polynomiale finie graduée, et **bien ramifiée**, correspondant à un morphisme $f : V \to U$. Alors :

- le lieu de ramification V_{ram} a pour équation $J \doteq \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$ (**Jacobien**) ;
- le lieu de branchement U_{br} a pour équation $R := \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q}$ (« **discriminant** » **?**).

$\rightsquigarrow$ ressemble à une extension galoisienne (groupe de réflexion)

Groupe de réflexion virtuel

Récapitulatif

Soit $A \subseteq B$ une extension polynomiale finie graduée, et **bien ramifiée**, correspondant à un morphisme $f : V \to U$. Alors :

- le lieu de ramification V_{ram} a pour équation $J \doteq \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$ (**Jacobien**) ;
- le lieu de branchement U_{br} a pour équation $R := \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q}$ (« **discriminant** » **?**).

$\rightsquigarrow$ ressemble à une extension galoisienne (groupe de réflexion)

$\rightsquigarrow$ un « groupe de réflexions virtuel » ?

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, X_n); X_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, X_n); X_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- *Les $(D_\Lambda)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2}$ sont les polynômes ramifiés de l'extension, et $r_\Lambda = e_{D_\Lambda}$.*

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, X_n); X_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- *Les* $(D_\Lambda)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2}$ *sont les polynômes ramifiés de l'extension, et* $r_\Lambda = e_{D_\Lambda}$.
- *Pour* $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$*, soit* $w \in \text{Cox-parab}(W)$ *(de longueur* 2*), de classe de conjugaison correspondant à* Λ *; alors* $r_\Lambda = |\mathrm{Red}_{\mathcal{R}}(w)|$ *(= ordre de* w *si* W *est un groupe de* 2*-réflexions).*

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, X_n); X_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- *Les* $(D_\Lambda)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2}$ *sont les polynômes ramifiés de l'extension, et* $r_\Lambda = e_{D_\Lambda}$.
- *Pour* $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$*, soit* $w \in \text{Cox-parab}(W)$ *(de longueur* 2*), de classe de conjugaison correspondant à* Λ *; alors* $r_\Lambda = |\mathrm{Red}_{\mathcal{R}}(w)|$ *(= ordre de* w *si* W *est un groupe de* 2*-réflexions).*
- LL *est une extension bien ramifiée.*

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \operatorname{Disc}(\Delta_W(y, X_n); X_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- *Les* $(D_\Lambda)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2}$ *sont les polynômes ramifiés de l'extension, et* $r_\Lambda = e_{D_\Lambda}$.
- *Pour* $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$, *soit* $w \in \text{Cox-parab}(W)$ *(de longueur* 2*), de classe de conjugaison correspondant à* Λ *; alors* $r_\Lambda = |\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(w)|$ *(= ordre de* w *si* W *est un groupe de* 2*-réflexions).*
- LL *est une extension bien ramifiée.*
- $J_{\mathrm{LL}} \doteq \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$.

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, X_n); X_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- *Les* $(D_\Lambda)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2}$ *sont les polynômes ramifiés de l'extension, et* $r_\Lambda = e_{D_\Lambda}$.
- *Pour* $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$*, soit* $w \in \text{Cox-parab}(W)$ *(de longueur* 2*), de classe de conjugaison correspondant à* Λ *; alors* $r_\Lambda = |\mathrm{Red}_{\mathcal{R}}(w)|$ *(= ordre de* w *si* W *est un groupe de* 2*-réflexions).*
- LL *est une extension bien ramifiée.*
- $J_{\mathrm{LL}} \doteq \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$.

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, X_n); X_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- *Les* $(D_\Lambda)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2}$ *sont les polynômes ramifiés de l'extension, et* $r_\Lambda = e_{D_\Lambda}$.
- *Pour* $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$*, soit* $w \in \text{Cox-parab}(W)$ *(de longueur* 2*), de classe de conjugaison correspondant à* Λ *; alors* $r_\Lambda = |\mathrm{Red}_{\mathcal{R}}(w)|$ *(= ordre de* w *si* W *est un groupe de* 2*-réflexions).*
- LL *est une extension bien ramifiée.*
- $J_{\mathrm{LL}} \doteq \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$.

Ingrédients de la preuve : interprétation combinatoire de la ramification, propriétés de LL topologiques (revêtement) et combinatoires (fact), cadre général vu plus haut.

Enfin une formule explicite pour $|\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$

Corollaire

Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré, de rang n. Le nombre de factorisations d'un élément de Coxeter c en $n-1$ blocs est :

Enfin une formule explicite pour $|\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$

Corollaire

Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré, de rang n. Le nombre de factorisations d'un élément de Coxeter c en $n-1$ blocs est :

$$|\mathrm{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\ h^{n-1}}{|W|}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}h + \sum_{i=1}^{n-1} d_i\right) .$$

Enfin une formule explicite pour $|\operatorname{FACT}_{n-1}(c)|$

Corollaire

Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré, de rang n. Le nombre de factorisations d'un élément de Coxeter c en $n-1$ blocs est :

$$|\operatorname{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\ h^{n-1}}{|W|}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}h + \sum_{i=1}^{n-1} d_i\right).$$

(on calcule $\deg(D) - \deg(J)$).

Enfin une formule explicite pour $|\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$

Corollaire

Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré, de rang n. Le nombre de factorisations d'un élément de Coxeter c en $n-1$ blocs est :

$$|\mathrm{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\ h^{n-1}}{|W|}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}h + \sum_{i=1}^{n-1} d_i\right).$$

(on calcule $\deg(D) - \deg(J)$).

C'est en fait une conséquence d'une formule plus générale, connue au cas par cas, concernant les chaînes du treillis des partitions non-croisées de type W.

1. Revêtement LL et factorisations d'un élément de Coxeter
   - Définition de LL
   - Factorisations d'un élément de Coxeter
   - Factorisations en (n-1) blocs
2. Jacobien et discriminant
   - Extension finie graduée d'anneaux de polynômes
   - Extension « bien ramifiée »
   - Cas de LL
3. Treillis des partitions non-croisées de type W
   - **Définitions**
   - Nombres de Fuss-Catalan de type W
4. Perspectives

Treillis des partitions non-croisées de type W

Ordre de divisibilité associé à la longueur ℓ :

$$u \preccurlyeq v \text{ si et seulement si } \ell(u) + \ell(u^{-1}v) = \ell(v).$$

Treillis des partitions non-croisées de type W

Ordre de divisibilité associé à la longueur ℓ :

$$u \preccurlyeq v \text{ si et seulement si } \ell(u) + \ell(u^{-1}v) = \ell(v).$$

c un élément de Coxeter.

Treillis des partitions non-croisées de type W

Ordre de divisibilité associé à la longueur ℓ :

$$u \preccurlyeq v \text{ si et seulement si } \ell(u) + \ell(u^{-1}v) = \ell(v).$$

c un élément de Coxeter.

Définition (Treillis des partitions non-croisées de type W)

$$\mathrm{NCP}_W(c) := \{w \in W \mid w \preccurlyeq c\}$$

Treillis des partitions non-croisées de type W

Ordre de divisibilité associé à la longueur ℓ :

$$u \preccurlyeq v \text{ si et seulement si } \ell(u) + \ell(u^{-1}v) = \ell(v).$$

c un élément de Coxeter.

Définition (Treillis des partitions non-croisées de type W)

$$\mathrm{NCP}_W(c) := \{w \in W \mid w \preccurlyeq c\}$$

Objet combinatoire très riche.
Correspond aux simples du monoïde de tresses dual de W..

Chaînes dans NCP_W

Formule de Chapoton

Le nombre de chaînes (larges) $w_1 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq w_N \preccurlyeq c$ dans NCP_W est :

$$Z_W(N+1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i + Nh}{d_i}.$$

Chaînes dans NCP_W

Formule de Chapoton

Le nombre de chaînes (larges) $w_1 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq w_N \preccurlyeq c$ dans NCP_W est :

$$Z_W(N+1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i + Nh}{d_i}.$$

Appelés nombres de Fuss-Catalan de type W : $\mathrm{Cat}^{(N)}(W)$.

Chaînes dans NCP_W

Formule de Chapoton

Le nombre de chaînes (larges) $w_1 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq w_N \preccurlyeq c$ dans NCP_W est :

$$Z_W(N+1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i + Nh}{d_i}.$$

Appelés nombres de Fuss-Catalan de type W : $\mathrm{Cat}^{(N)}(W)$.

Preuve (Athanasiadis, Reiner, Bessis) : cas par cas avec la classification... même pour le cas $N = 1$ (qui donne $|\mathrm{NCP}_W|$).

Factorisations de c et chaînes de NCP_W

Factorisation $w_1 \ldots w_p = c$
$\mapsto$ chaîne $w_1 \preccurlyeq w_1 w_2 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq w_1 \ldots w_{p-1} \preccurlyeq c$.
Et inversement.

Factorisations de c et chaînes de NCP_W

Factorisation $w_1 \ldots w_p = c$
$\mapsto$ chaîne $w_1 \preccurlyeq w_1 w_2 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq w_1 \ldots w_{p-1} \preccurlyeq c$.
Et inversement.

Cependant : Factorisations **strictes**, vs. chaînes **larges**.

Factorisations de c et chaînes de NCP_W

Factorisation $w_1 \dots w_p = c$
$\mapsto$ chaîne $w_1 \preccurlyeq w_1 w_2 \preccurlyeq \dots \preccurlyeq w_1 \dots w_{p-1} \preccurlyeq c$.
Et inversement.

Cependant : Factorisations **strictes**, vs. chaînes **larges**.
Formules de passage :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cat}^{(N)}(W) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{N+1}{k} |\,\mathrm{FACT}_k(c)| \\
|\,\mathrm{FACT}_p(c)| &= \Delta^p Z_W(0) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \mathrm{Cat}^{(k)}(W)
\end{aligned}$$

Factorisations de c et chaînes de NCP_W

Factorisation $w_1 \dots w_p = c$
$\mapsto$ chaîne $w_1 \preccurlyeq w_1 w_2 \preccurlyeq \dots \preccurlyeq w_1 \dots w_{p-1} \preccurlyeq c$.
Et inversement.

Cependant : Factorisations **strictes**, vs. chaînes **larges**.
Formules de passage :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cat}^{(N)}(W) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{N+1}{k} |\,\mathrm{FACT}_k(c)| \\
|\,\mathrm{FACT}_p(c)| &= \Delta^p Z_W(0) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \mathrm{Cat}^{(k)}(W)
\end{aligned}
$$

(Δ : dérivée discrète $P \mapsto P(X+1) - P(X)$.)

Factorisations de c et chaînes de NCP_W

Factorisation $w_1 \dots w_p = c$
$\mapsto$ chaîne $w_1 \preccurlyeq w_1 w_2 \preccurlyeq \dots \preccurlyeq w_1 \dots w_{p-1} \preccurlyeq c$.
Et inversement.

Cependant : Factorisations **strictes**, vs. chaînes **larges**.
Formules de passage :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cat}^{(N)}(W) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{N+1}{k} |\,\mathrm{FACT}_k(c)| \\ |\,\mathrm{FACT}_p(c)| &= \Delta^p Z_W(0) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \mathrm{Cat}^{(k)}(W) \end{aligned}$$

(Δ : dérivée discrète $P \mapsto P(X+1) - P(X)$.)
On retrouve bien la formule pour $|\,\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$.

Conclusion, perspectives

- On n'a pas ajouté de nouveaux « cas-par-cas » dans la preuve ; mais on utilise les résultats du cas non ramifié ($|\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(c)|$).

Conclusion, perspectives

- On n'a pas ajouté de nouveaux « cas-par-cas » dans la preuve ; mais on utilise les résultats du cas non ramifié ($|\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(c)|$).
- On obtient des formules combinatoires plus fines, qui font apparaître de (nouveaux ?) invariants des groupes de réflexions (les $\deg(D_\Lambda)$).

Conclusion, perspectives

- On n'a pas ajouté de nouveaux « cas-par-cas » dans la preuve ; mais on utilise les résultats du cas non ramifié ($|\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(c)|$).
- On obtient des formules combinatoires plus fines, qui font apparaître de (nouveaux ?) invariants des groupes de réflexions (les $\deg(D_\Lambda)$).
- Peut-on aller plus loin (calcul de $|\operatorname{FACT}_k(c)|$) ? Problème de complexité des formules. Peut-on voir la formule de Chapoton comme une formule de ramification de LL ?

Conclusion, perspectives

- On n'a pas ajouté de nouveaux « cas-par-cas » dans la preuve ; mais on utilise les résultats du cas non ramifié ($|\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(c)|$).
- On obtient des formules combinatoires plus fines, qui font apparaître de (nouveaux ?) invariants des groupes de réflexions (les $\deg(D_\Lambda)$).
- Peut-on aller plus loin (calcul de $|\mathrm{FACT}_k(c)|$) ? Problème de complexité des formules. Peut-on voir la formule de Chapoton comme une formule de ramification de LL ?
- Quid des groupes de réflexions virtuels ?

Références

- **Orbites d'Hurwitz des factorisations primitives d'un élément de Coxeter**, J. Alg. 323 (2010), 1432-1453.
- **Discriminants and Jacobians of virtual reflection groups**, preprint arXiv :1001.4470.

Merci !