Groupes de réflexion, géométrie du discriminant et partitions non-croisées

Vivien RIPOLL

École Normale Supérieure — Université Paris Diderot

9 juillet 2010
Soutenance de thèse

Groupes de réflexion complexes

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Une réflexion de V est un élément $s \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini, tel que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_V)$ soit un hyperplan.

Groupes de réflexion complexes

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Une réflexion de V est un élément $s \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini, tel que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_V)$ soit un hyperplan.
Un groupe de réflexion complexe est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions.

Groupes de réflexion complexes

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Une réflexion de V est un élément $s \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini, tel que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_V)$ soit un hyperplan.
Un groupe de réflexion complexe est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions.

- contient les groupes de Weyl et groupes de Coxeter finis ;

Groupes de réflexion complexes

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Une réflexion de V est un élément $s \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini, tel que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_V)$ soit un hyperplan.
Un groupe de réflexion complexe est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions.

- contient les groupes de Weyl et groupes de Coxeter finis ;
- quel substitut pour la théorie de Coxeter ?

Factorisations dans un groupe engendré

W groupe quelconque, et S une partie génératrice de W.
$\rightsquigarrow$ fonction longueur ℓ_S sur W.

Factorisations dans un groupe engendré

W groupe quelconque, et S une partie génératrice de W.
$\rightsquigarrow$ fonction longueur ℓ_S sur W.

Définition (S-factorisations)

$(w_1, \ldots, w_p)$ est une S-factorisation (large) de $w \in W$ si

- $w_1 \ldots w_p = w$;

Factorisations dans un groupe engendré

W groupe quelconque, et S une partie génératrice de W.
$\rightsquigarrow$ fonction longueur ℓ_S sur W.

Définition (S-factorisations)

$(w_1, \dots, w_p)$ est une S-factorisation (large) de $w \in W$ si

- $w_1 \dots w_p = w$;
- $\ell_S(w_1) + \cdots + \ell_S(w_p) = \ell_S(w)$.

Factorisations dans un groupe engendré

W groupe quelconque, et S une partie génératrice de W.
$\rightsquigarrow$ fonction longueur ℓ_S sur W.

Définition (S-factorisations)

$(w_1, \dots, w_p)$ est une S-factorisation (large) de $w \in W$ si

- $w_1 \dots w_p = w$;
- $\ell_S(w_1) + \cdots + \ell_S(w_p) = \ell_S(w)$.

Exemple : (W, S) système de Coxeter fini

Factorisations **strictes** maximales de w_0 $\leftrightarrow$ **galeries** reliant une chambre à son opposée. [Deligne]

Factorisations dans un groupe engendré

W groupe quelconque, et S une partie génératrice de W.
$\rightsquigarrow$ fonction longueur ℓ_S sur W.

Définition (S-factorisations)

$(w_1, \ldots, w_p)$ est une S-factorisation (large) de $w \in W$ si

- $w_1 \ldots w_p = w$;
- $\ell_S(w_1) + \cdots + \ell_S(w_p) = \ell_S(w)$.

Exemple : (W, S) système de Coxeter fini

Factorisations **strictes** maximales de $w_0 \leftrightarrow$ **galeries** reliant une chambre à son opposée. [Deligne]

Définition (Ordre de divisibilité $\preccurlyeq_S$)

$v \preccurlyeq_S w$ ssi v est un « S-facteur » (à gauche) de w.

Factorisations dans un groupe engendré

W groupe quelconque, et S une partie génératrice de W.
$\rightsquigarrow$ fonction longueur ℓ_S sur W.

Définition (S-factorisations)

$(w_1, \dots, w_p)$ est une S-factorisation (large) de $w \in W$ si

- $w_1 \dots w_p = w$;
- $\ell_S(w_1) + \cdots + \ell_S(w_p) = \ell_S(w)$.

Exemple : (W, S) système de Coxeter fini

Factorisations **strictes** maximales de $w_0 \leftrightarrow$ **galeries** reliant une chambre à son opposée. [Deligne]

Définition (Ordre de divisibilité $\preccurlyeq_S$)

$v \preccurlyeq_S w$ ssi v est un « S-facteur » (à gauche) de w.

$\{$diviseurs de w pour $\preccurlyeq_S\} \simeq \{$2-factorisations de $w\}$.

Prototype : partitions non-croisées d'un n-gone

- $W = \mathfrak{S}_n$;

Prototype : partitions non-croisées d'un n-gone

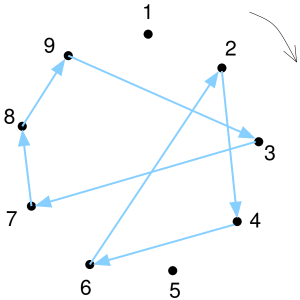
- $W = \mathfrak{S}_n$;
- partie génératrice $T = \{\text{toutes les transpositions}\}$;

Prototype : partitions non-croisées d'un *n*-gone

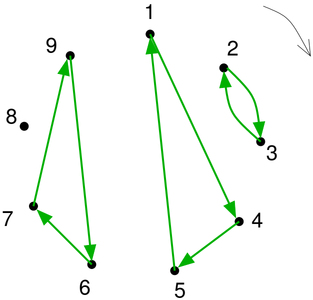
- $W = \mathfrak{S}_n$;
- partie génératrice $T = \{\text{toutes les transpositions}\}$;
- T-factorisations de $c = n\text{-cycle } (1\ 2\ \ldots\ n)$?

Prototype : partitions non-croisées d'un n-gone

- $W = \mathfrak{S}_n$;
- partie génératrice $T = \{\text{toutes les transpositions}\}$;
- T-factorisations de $c = n\text{-cycle } (1\ 2\ \ldots\ n)$?



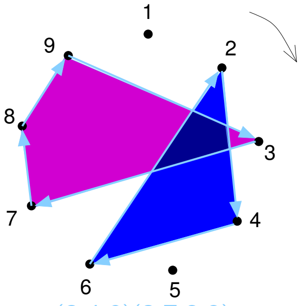
$\sigma = (2\ 4\ 6)(3\ 7\ 8\ 9)$



$\tau = (1\ 4\ 5)(2\ 3)(6\ 7\ 9)$

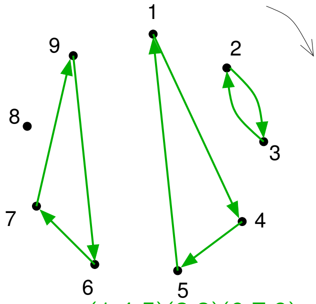
Prototype : partitions non-croisées d'un n-gone

- $W = \mathfrak{S}_n$;
- partie génératrice $T = \{\text{toutes les transpositions}\}$;
- T-factorisations de $c = n\text{-cycle } (1\ 2\ \ldots\ n)$?



$\sigma = (2\ 4\ 6)(3\ 7\ 8\ 9)$

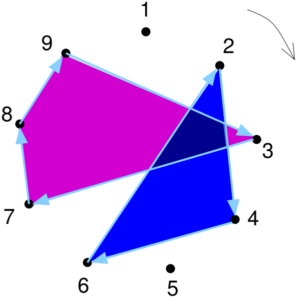
croisée



$\tau = (1\ 4\ 5)(2\ 3)(6\ 7\ 9)$

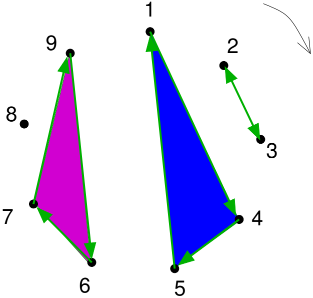
Prototype : partitions non-croisées d'un n-gone

- $W = \mathfrak{S}_n$;
- partie génératrice $T = \{\text{toutes les transpositions}\}$;
- T-factorisations de $c = n\text{-cycle } (1\ 2\ \ldots\ n)$?



$\sigma = (2\ 4\ 6)(3\ 7\ 8\ 9)$

croisée



$\tau = (1\ 4\ 5)(2\ 3)(6\ 7\ 9)$

non-croisée

Combinatoire des partitions non-croisées d'un n-gone

$$\{T\text{-diviseurs de } c\} \longleftrightarrow \{\text{partitions non-croisées d'un } n\text{-gone}\}$$

Combinatoire des partitions non-croisées d'un n-gone

$$\{T\text{-diviseurs de } c\} \longleftrightarrow \{\text{partitions non-croisées d'un } n\text{-gone}\}$$

Théorème (Kreweras 1972)

Le nombre de T-factorisations larges de c en p blocs est le ***nombre de Fuss-Catalan***

$$\mathrm{Cat}^{(p)}(n) = \frac{1}{n}\binom{pn}{n-1} = \prod_{i=2}^{n} \frac{i+(p-1)n}{i}.$$

Partitions non-croisées de type W

Dorénavant, on suppose que $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ est un g. r. c. irréductible et bien engendré, *i.e.* il peut être engendré par n réflexions.

Partitions non-croisées de type W

Dorénavant, on suppose que $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ est un g. r. c. irréductible et bien engendré, *i.e.* il peut être engendré par n réflexions.

- partie génératrice $R := \{\text{toutes les réflexions de } W\}$.
  ($\rightsquigarrow$ longueur ℓ_R, R-factorisations, ordre $\preccurlyeq_R$)

Partitions non-croisées de type W

Dorénavant, on suppose que $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ est un g. r. c. irréductible et bien engendré, *i.e.* il peut être engendré par n réflexions.

- partie génératrice $R := \{\text{toutes les réflexions de } W\}$.
  ($\rightsquigarrow$ longueur ℓ_R, R-factorisations, ordre $\preccurlyeq_R$)
- c : élément de Coxeter de W (élément h-régulier).

Partitions non-croisées de type W

Dorénavant, on suppose que $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ est un g. r. c. irréductible et bien engendré, *i.e.* il peut être engendré par n réflexions.

- partie génératrice $R := \{\text{toutes les réflexions de } W\}$.
  ($\rightsquigarrow$ longueur ℓ_R, R-factorisations, ordre $\preccurlyeq_R$)
- c : élément de Coxeter de W (élément h-régulier).

Définition (Partitions non-croisées de type W)

$$\mathrm{NCP}_W(c) := \{w \in W \mid w \preccurlyeq_R c\}$$

- $\mathrm{NCP}_W(c) \simeq \{\text{2-factorisations de } c\}$;

Partitions non-croisées de type W

Dorénavant, on suppose que $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ est un g. r. c. irréductible et bien engendré, *i.e.* il peut être engendré par n réflexions.

- partie génératrice $R := \{\text{toutes les réflexions de } W\}$.
  ($\rightsquigarrow$ longueur ℓ_R, R-factorisations, ordre $\preccurlyeq_R$)
- c : élément de Coxeter de W (élément h-régulier).

Définition (Partitions non-croisées de type W)

$$\mathrm{NCP}_W(c) := \{w \in W \mid w \preccurlyeq_R c\}$$

- $\mathrm{NCP}_W(c) \simeq \{\text{2-factorisations de } c\}$;
- sa structure ne dépend pas du choix de l'élément de Coxeter (conjugaison).

Nombres de Fuss-Catalan

Formule de Kreweras

- $W = \mathfrak{S}_n$;
- c : un n-cycle.

Le nombre de T-factorisations larges de c en p blocs est le **nombre de Fuss-Catalan**

$$\mathrm{Cat}^{(p)}(n) = \prod_{i=2}^{n} \frac{i + (p-1)n}{i} \ .$$

Nombres de Fuss-Catalan de type W

Formule de Chapoton

- $W = \mathfrak{S}_n$;
- c : un n-cycle.

Le nombre de T-factorisations larges de c en p blocs est le **nombre de Fuss-Catalan**

$$\mathrm{Cat}^{(p)}(n) = \prod_{i=2}^{n} \frac{i + (p-1)n}{i} .$$

Nombres de Fuss-Catalan de type W

Formule de Chapoton

- W = un g. r. c. bien engendré irréductible de rang n ;
- c : un n-cycle.

Le nombre de T-factorisations larges de c en p blocs est le **nombre de Fuss-Catalan**

$$\mathrm{Cat}^{(p)}(n) = \prod_{i=2}^{n} \frac{i + (p-1)n}{i} \ .$$

Nombres de Fuss-Catalan de type W

Formule de Chapoton

- $W =$ un g. r. c. bien engendré irréductible de rang n ;
- c : un élément de Coxeter.

Le nombre de T-factorisations larges de c en p blocs est le **nombre de Fuss-Catalan**

$$\mathrm{Cat}^{(p)}(n) = \prod_{i=2}^{n} \frac{i + (p-1)n}{i} .$$

Nombres de Fuss-Catalan de type W

Formule de Chapoton

- W = un g. r. c. bien engendré irréductible de rang n ;
- c : un élément de Coxeter.

Le nombre de R-factorisations larges de c en p blocs est le **nombre de Fuss-Catalan**

$$\mathrm{Cat}^{(p)}(n) = \prod_{i=2}^{n} \frac{i + (p-1)n}{i} \ .$$

Nombres de Fuss-Catalan de type W

Formule de Chapoton

- W = un g. r. c. bien engendré irréductible de rang n ;
- c : un élément de Coxeter.

Le nombre de R-factorisations larges de c en p blocs est le nombre de Fuss-Catalan de type W

$$\mathrm{Cat}^{(p)}(n) = \prod_{i=2}^{n} \frac{i + (p-1)n}{i} \ .$$

Nombres de Fuss-Catalan de type W

Formule de Chapoton

- $W =$ un g. r. c. bien engendré irréductible de rang n ;
- c : un élément de Coxeter.

Le nombre de R-factorisations larges de c en p blocs est le nombre de Fuss-Catalan de type W

$$\mathrm{Cat}^{(p)}(W) = \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i + (p-1)h}{d_i} \, .$$

Nombres de Fuss-Catalan de type W

Formule de Chapoton

- $W =$ un g. r. c. bien engendré irréductible de rang n ;
- c : un élément de Coxeter.

Le nombre de R-factorisations larges de c en p blocs est le nombre de Fuss-Catalan de type W

$$\mathrm{Cat}^{(p)}(W) = \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i + (p-1)h}{d_i} .$$

Preuve [Athanasiadis, Reiner, Bessis...] : cas par cas...

Nombres de Fuss-Catalan de type W

Formule de Chapoton

- $W =$ un g. r. c. bien engendré irréductible de rang n ;
- c : un élément de Coxeter.

Le nombre de R-factorisations larges de c en p blocs est le nombre de Fuss-Catalan de type W

$$\mathrm{Cat}^{(p)}(W) = \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i + (p-1)h}{d_i}\ .$$

Preuve [Athanasiadis, Reiner, Bessis...] : cas par cas...
Applications :

- $(p = 2)$: $|\,\mathrm{NCP}_W\,| =$ « nombre de Catalan de type W ».

Nombres de Fuss-Catalan de type W

Formule de Chapoton

- $W =$ un g. r. c. bien engendré irréductible de rang n ;
- c : un élément de Coxeter.

Le nombre de R-factorisations larges de c en p blocs est le nombre de Fuss-Catalan de type W

$$\mathrm{Cat}^{(p)}(W) = \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i + (p-1)h}{d_i} .$$

Preuve [Athanasiadis, Reiner, Bessis...] : cas par cas...
Applications :

- $(p = 2)$: $|\,\mathrm{NCP}_W\,| =$ « nombre de Catalan de type W ».
- nombre de décompositions R-réduites de c : $|\,\mathrm{Red}_R(c)| = n!\ h^n / \,|W|$.

L'espace-quotient $W\backslash V$

Soit $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexion complexe.
Il agit naturellement sur $\mathbb{C}[V]$.

L'espace-quotient $W\backslash V$

Soit $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexion complexe.
Il agit naturellement sur $\mathbb{C}[V]$.

Il existe des polynômes invariants $f_1, \ldots, f_n$, homogènes et algébriquement indépendants, tels que $\mathbb{C}[V]^W = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$ [Chevalley-Shephard-Todd].

L'espace-quotient $W\backslash V$

Soit $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexion complexe.
Il agit naturellement sur $\mathbb{C}[V]$.

Il existe des polynômes invariants $f_1, \ldots, f_n$, homogènes et algébriquement indépendants, tels que $\mathbb{C}[V]^W = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$ [Chevalley-Shephard-Todd].

$$\rightsquigarrow \text{isomorphisme : } \begin{array}{ccc} W\backslash V & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}^n \\ \bar{v} & \mapsto & (f_1(v), \ldots, f_n(v)). \end{array}$$

L'espace-quotient $W\backslash V$

Soit $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ un groupe de réflexion complexe.
Il agit naturellement sur $\mathbb{C}[V]$.

Il existe des polynômes invariants $f_1, \ldots, f_n$, homogènes et algébriquement indépendants, tels que $\mathbb{C}[V]^W = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$ [Chevalley-Shephard-Todd].

$$\rightsquigarrow \text{isomorphisme :} \quad \begin{array}{rcl} W\backslash V & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}^n \\ \bar{v} & \mapsto & (f_1(v), \ldots, f_n(v)). \end{array}$$

Définition

Les degrés $d_1 \leq \cdots \leq d_n = h$ de $f_1, \ldots, f_n$ ne dépendent pas du choix de $f_1, \ldots, f_n$, et sont appelés degrés invariants de W.

Exemple de $W = A_3$: discriminant (queue d'aronde)

$$\bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \subseteq V$$

Exemple de $W = A_3$: discriminant (queue d'aronde)

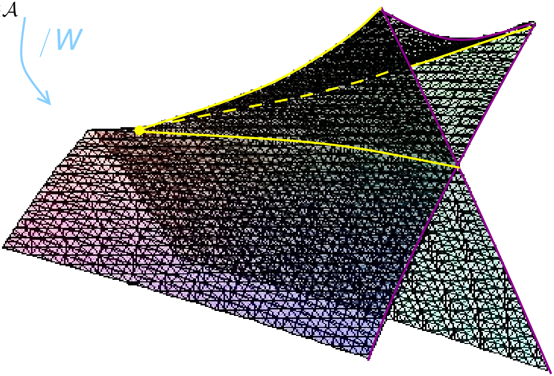
$$\bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \subseteq V$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle /W}$$

Exemple de $W = A_3$: discriminant (queue d'aronde)

$$\bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \subseteq V$$

$/W$



hypersurface $\mathcal{H}$ (discriminant) $\subseteq W \backslash V \simeq \mathbb{C}^3$

Stratifications

- $\mathcal{A}$: arrangement d'hyperplans de W.
- Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) : $\mathcal{L} := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.

Stratifications

- $\mathcal{A}$: arrangement d'hyperplans de W.
- Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) : $\mathcal{L} := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.

Bijections :

stratification $\mathcal{L}$ $\leftrightarrow$ $\{$sous-groupes paraboliques de $W\}$

Stratifications

- $\mathcal{A}$: arrangement d'hyperplans de W.
- Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) : $\mathcal{L} := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.

Bijections :

stratification $\bar{\mathcal{L}} = W \backslash \mathcal{L} \quad \leftrightarrow \quad$ s.g.p.$(W)/$conj.

Stratifications

- $\mathcal{A}$: arrangement d'hyperplans de W.
- Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) : $\mathcal{L} := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.

Bijections :

stratification $\bar{\mathcal{L}} = W \backslash \mathcal{L}$ $\quad\leftrightarrow\quad$ s.g.p.$(W)/$conj. $\quad\leftrightarrow\quad$ $\mathrm{NCP}_W/$conj.

Stratifications

- $\mathcal{A}$: arrangement d'hyperplans de W.
- Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) : $\mathcal{L} := \{\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.

Bijections :

stratification $\bar{\mathcal{L}} = W\backslash\mathcal{L}$	$\leftrightarrow$	s.g.p.$(W)/$conj.	$\leftrightarrow$	$\mathrm{NCP}_W/$conj.
$\mathrm{codim}(\Lambda)$	$=$	$\mathrm{rang}(W_\Lambda)$	$=$	$\ell_R(w_\Lambda)$

Stratifications

- $\mathcal{A}$: arrangement d'hyperplans de W.
- Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) : $\mathcal{L} := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.

Bijections :

$$\begin{array}{ccccc} \text{stratification } \bar{\mathcal{L}} = W \backslash \mathcal{L} & \leftrightarrow & \text{s.g.p.}(W)/\text{conj.} & \leftrightarrow & \mathrm{NCP}_W/\text{conj.} \\ \operatorname{codim}(\Lambda) & = & \operatorname{rang}(W_\Lambda) & = & \ell_R(w_\Lambda) \end{array}$$

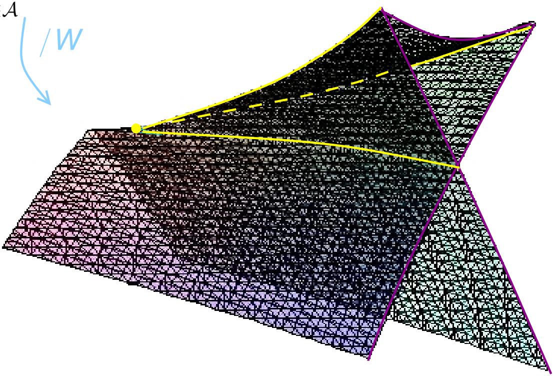
Discriminant Δ_W : équation de l'hypersurface $\mathcal{H} \subseteq W \backslash V$.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \text{quotient de } \textstyle\bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \text{ par } W \\ &= \text{union des strates de } \bar{\mathcal{L}} \text{ de codim. 1.} \end{aligned}$$

Exemple de $W = A_3$: discriminant (queue d'aronde)

$\bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \subseteq V$

$/W$



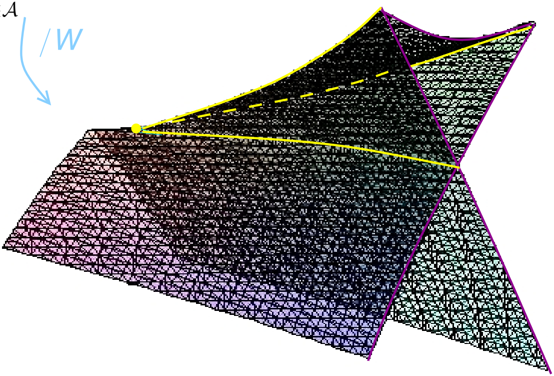
$$\mathcal{H} = \{\Delta_W = 0\} \subseteq W \backslash V \simeq \mathbb{C}^3$$

$$\Delta_W(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{Disc}(T^4 + f_1 T^2 - f_2 T + f_3 \ ; \ T)$$

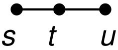
Exemple de $W = A_3$: discriminant (queue d'aronde)

$\bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \subseteq V$

$/W$



A_3



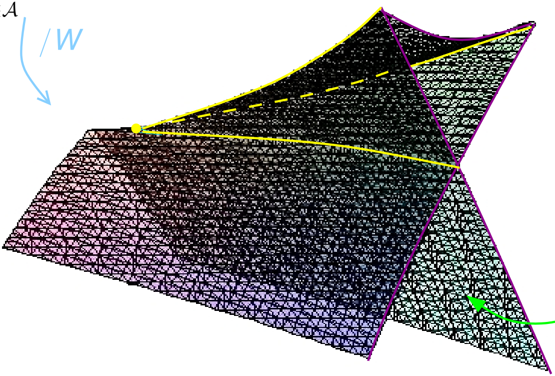
$$\mathcal{H} = \{\Delta_W = 0\} \subseteq W \backslash V \simeq \mathbb{C}^3$$

$$\Delta_W(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{Disc}(T^4 + f_1 T^2 - f_2 T + f_3 \;;\; T)$$

Exemple de $W = A_3$: discriminant (queue d'aronde)

$$\bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \subseteq V$$

$/W$



A_3

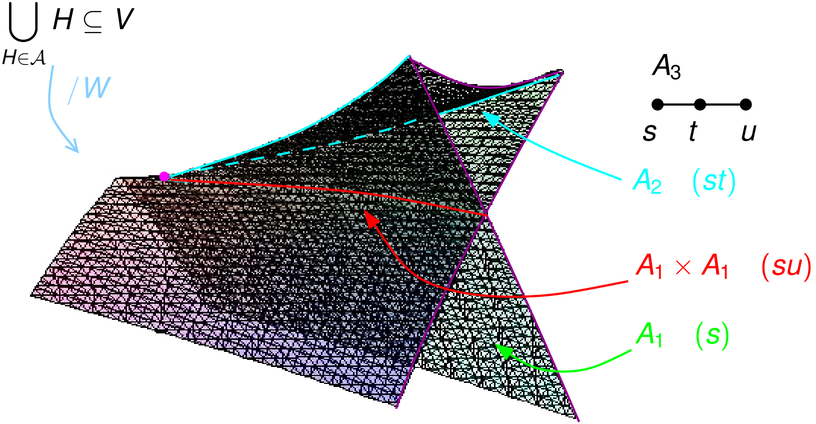
s — t — u

$A_1 \quad (s)$

$$\mathcal{H} = \{\Delta_W = 0\} \subseteq W \backslash V \simeq \mathbb{C}^3$$

$$\Delta_W(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{Disc}(T^4 + f_1 T^2 - f_2 T + f_3 \ ; \ T)$$

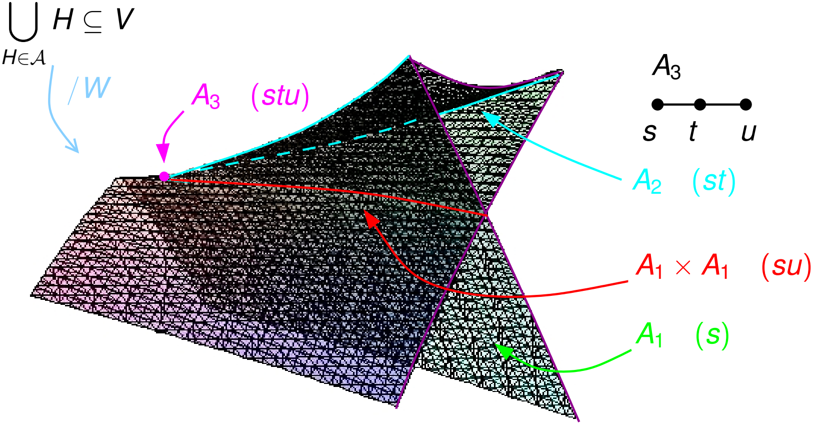
Exemple de $W = A_3$: discriminant (queue d'aronde)



$$\mathcal{H} = \{\Delta_W = 0\} \subseteq W\backslash V \simeq \mathbb{C}^3$$

$$\Delta_W(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{Disc}(T^4 + f_1 T^2 - f_2 T + f_3 \ ; \ T)$$

Exemple de $W = A_3$: discriminant (queue d'aronde)



$$\mathcal{H} = \{\Delta_W = 0\} \subseteq W \backslash V \simeq \mathbb{C}^3$$

$$\Delta_W(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{Disc}(T^4 + f_1 T^2 - f_2 T + f_3 \; ; \; T)$$

Discriminant d'un groupe bien engendré

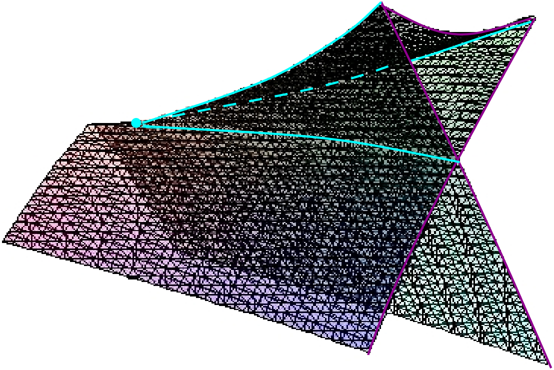
Proposition

Lorsque W est bien engendré, le discriminant Δ_W est ***monique de degré*** *n* ***en*** *f_n, l'invariant de plus haut degré. On peut choisir les invariants fondamentaux $f_1, \dots, f_n$ de sorte que :*

$$\Delta_W = f_n^n + a_2 f_n^{n-2} + a_3 f_n^{n-3} + \cdots + a_{n-1} f_n + a_n,$$

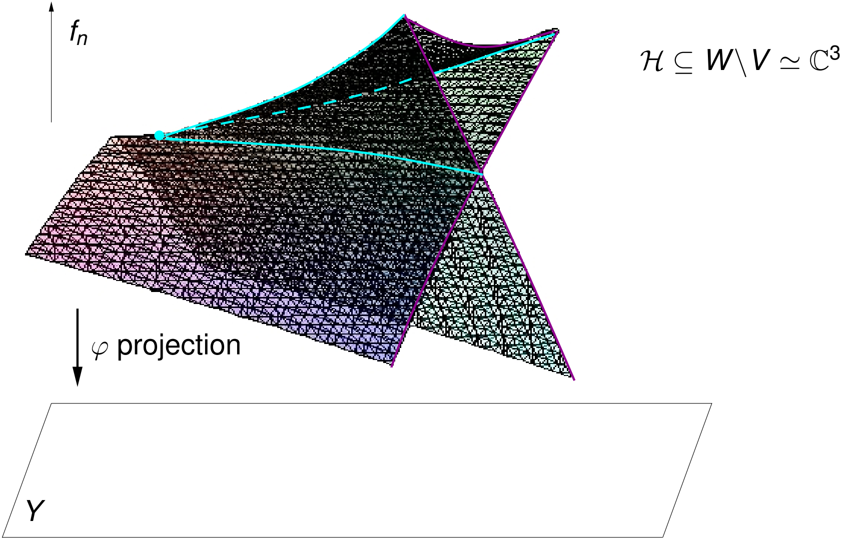
avec $a_i \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$ (polynôme homogène, de degré ih).

Revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations

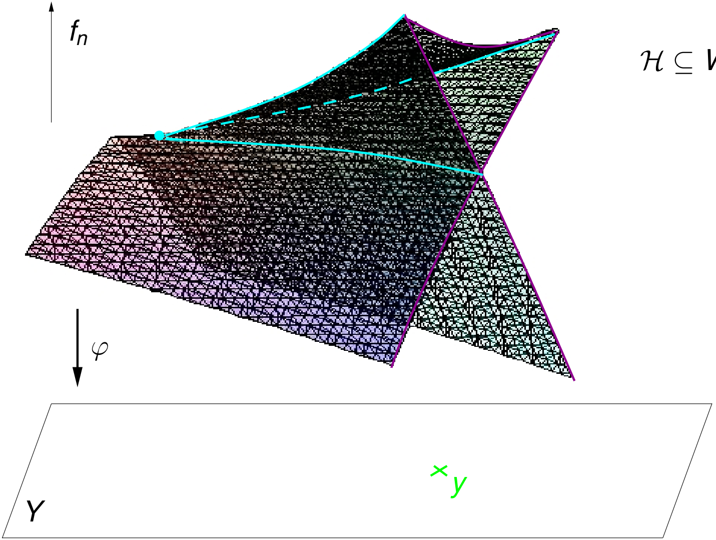


$\mathcal{H} \subseteq W \backslash V \simeq \mathbb{C}^3$

Revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations

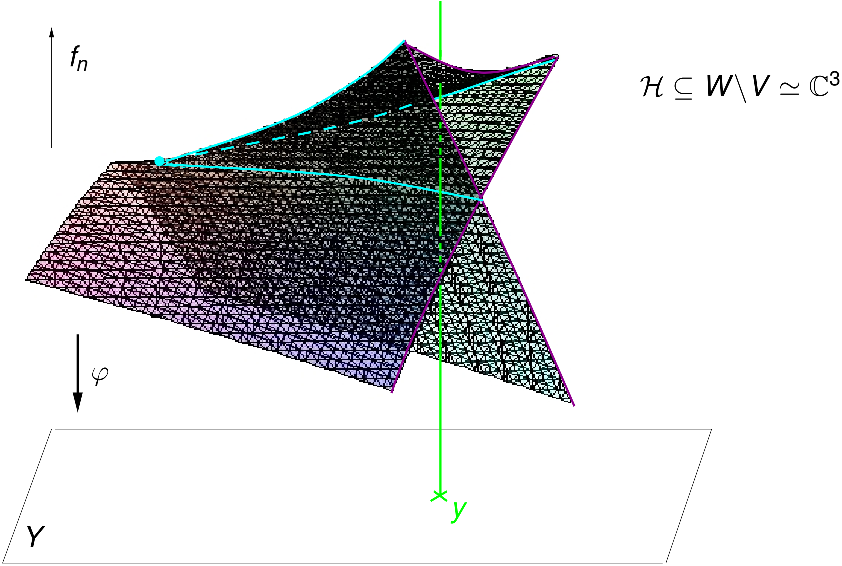


Revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations

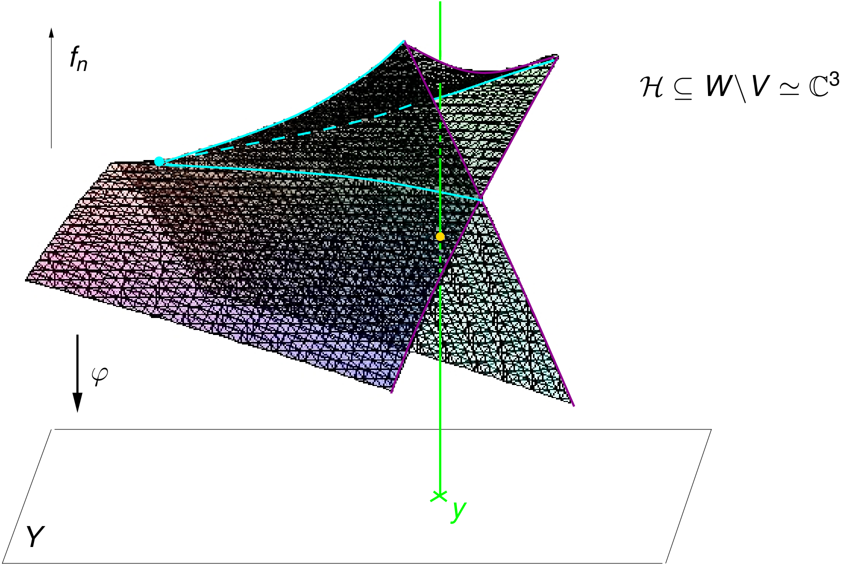


$\mathcal{H} \subseteq W \backslash V \simeq \mathbb{C}^3$

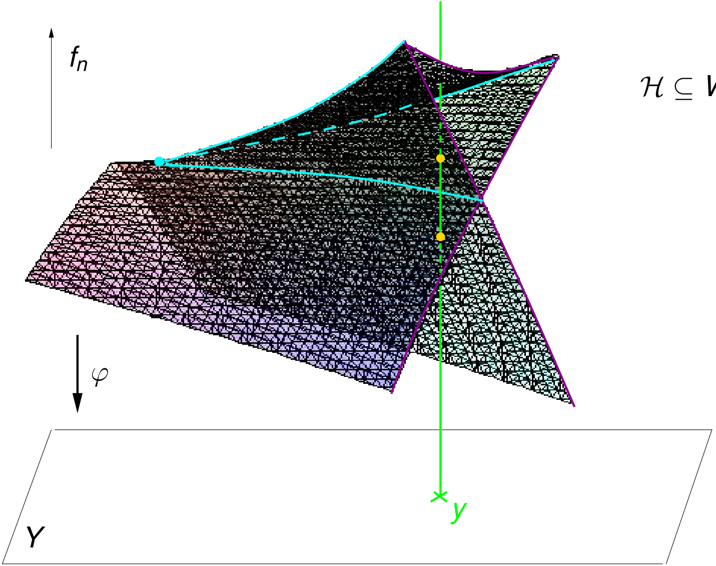
Revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations



Revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations

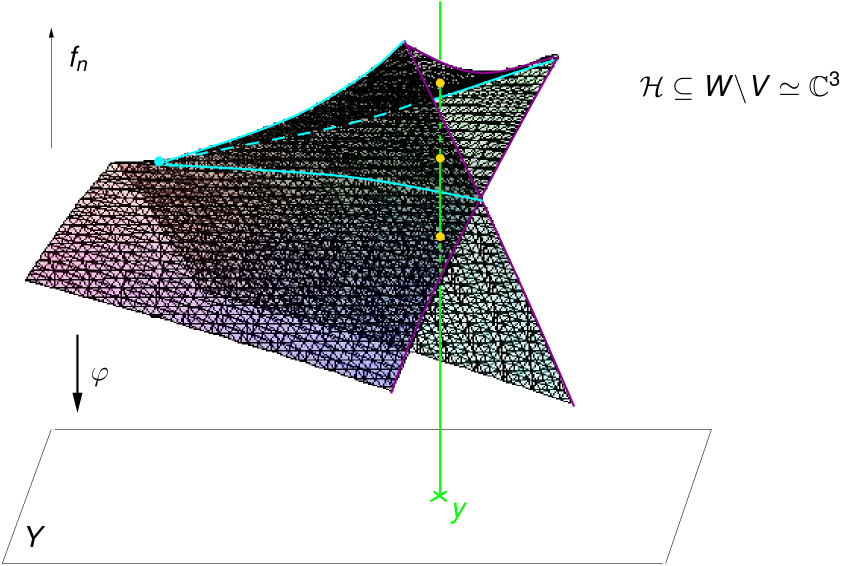


Revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations

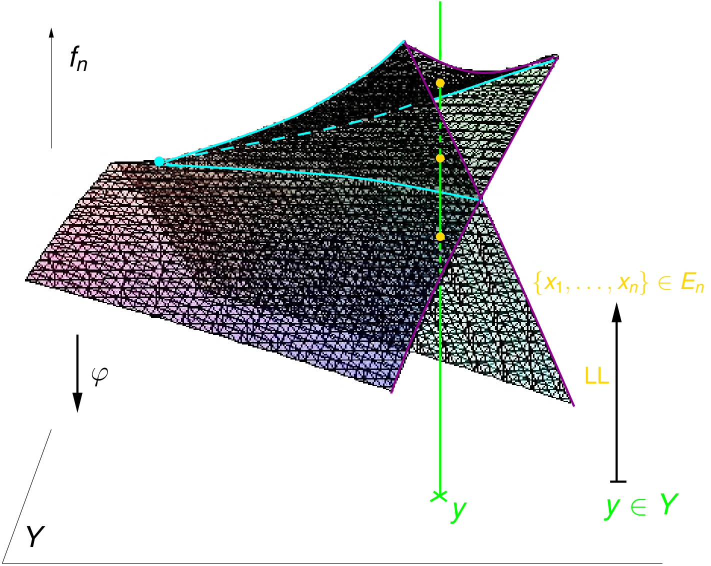


$\mathcal{H} \subseteq W \backslash V \simeq \mathbb{C}^3$

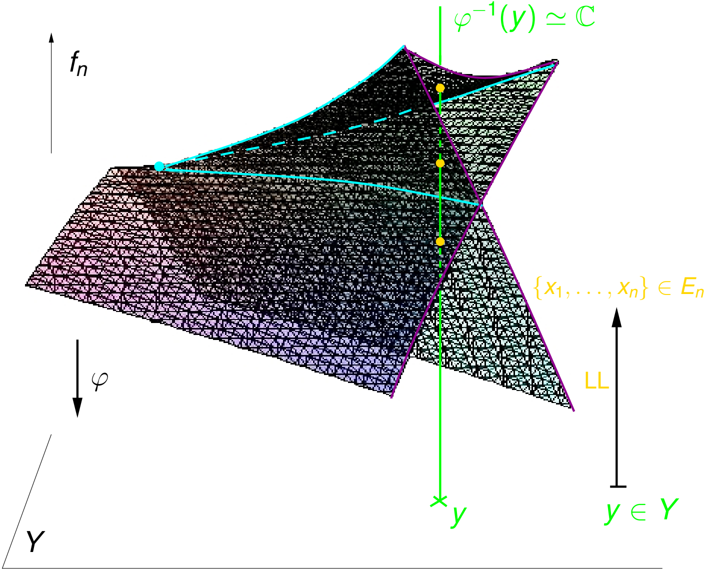
Revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations



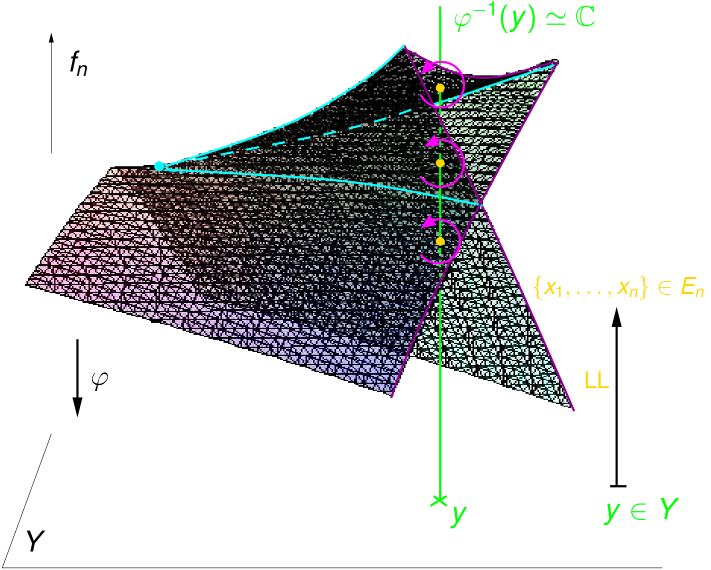
Revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations



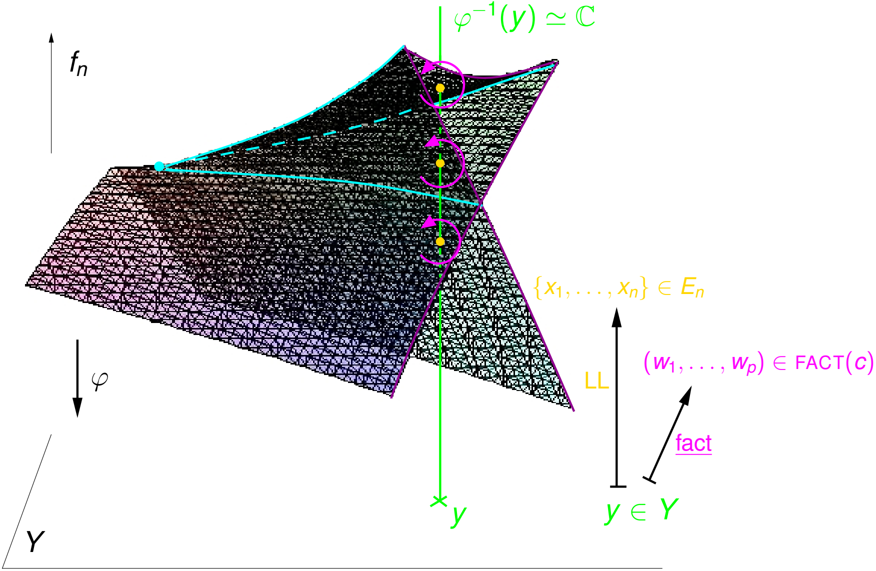
Revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations



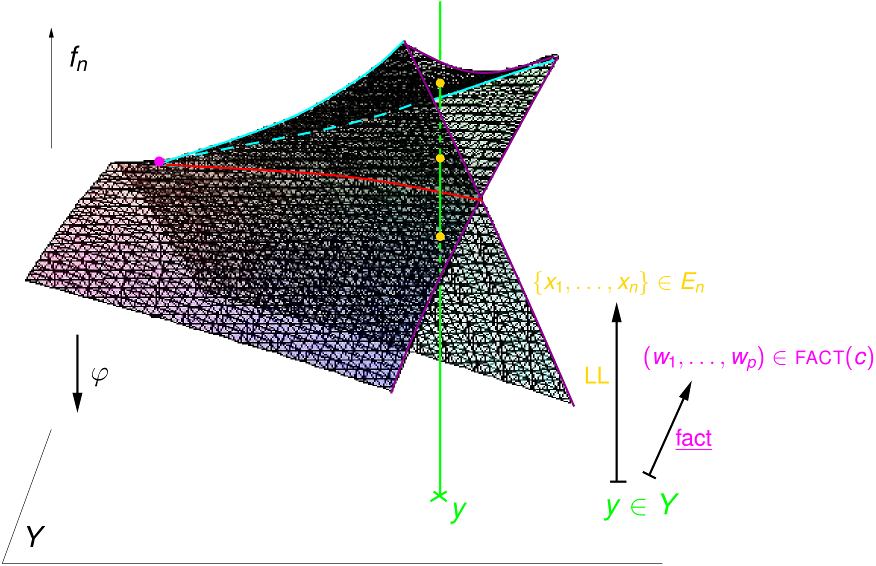
Revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations



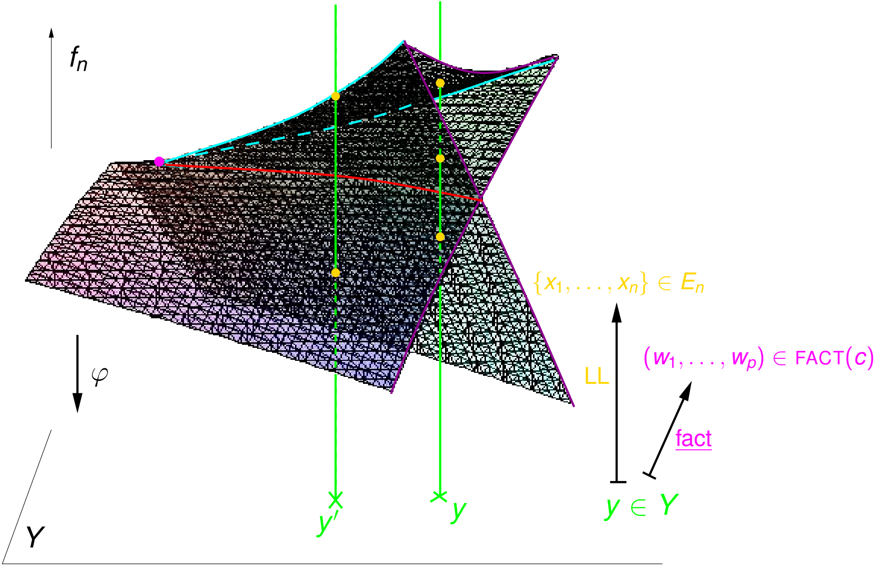
Revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations



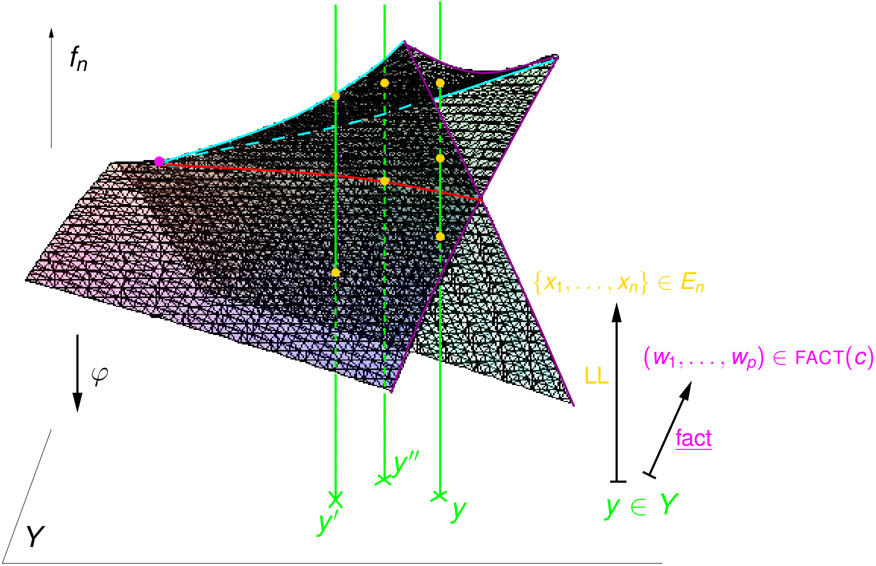
Revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations



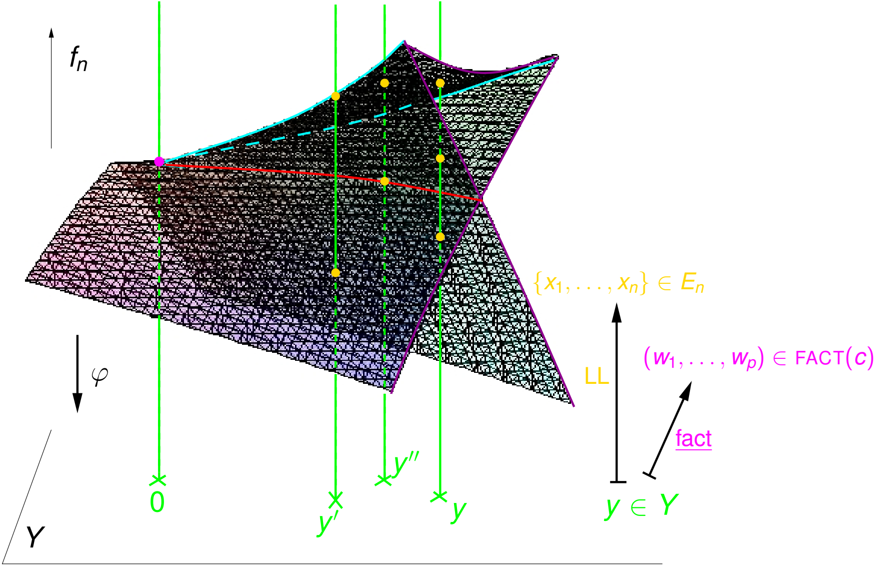
Revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations



Revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations



Revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations



Morphisme de Lyashko-Looijenga

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{LL}: & Y & \to & E_n = \{\text{configurations de } n \text{ points centrés de } \mathbb{C}\} \\ & y & \mapsto & \{\text{racines, avec multiplicités, de } \Delta_W(y, f_n) \text{ en } f_n\} \end{array}$$

Morphisme de Lyashko-Looijenga

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{LL} : & Y & \to & E_n = \{\text{configurations de } n \text{ points centrés de } \mathbb{C}\} \\ & y & \mapsto & \{\text{racines, avec multiplicités, de } \Delta_W(y, f_n) \text{ en } f_n\} \end{array}$$

Rappel : $\Delta_W = f_n^n + a_2 f_n^{n-2} + a_3 f_n^{n-3} + \cdots + a_{n-1} f_n + a_n$.

Définition (Version algébrique de LL)

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{LL} : & \mathbb{C}^{n-1} & \to & \mathbb{C}^{n-1} \\ & (f_1, \ldots, f_{n-1}) & \mapsto & (a_2, \ldots, a_n) \end{array}$$

C'est un morphisme algébrique, homogène pour les poids : $\deg(f_j) = d_j$, $\deg(a_i) = ih$.

Morphisme de Lyashko-Looijenga

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{LL} : & Y & \to & E_n = \{\text{configurations de } n \text{ points centrés de } \mathbb{C}\} \\ & y & \mapsto & \{\text{racines, avec multiplicités, de } \Delta_W(y, f_n) \text{ en } f_n\} \end{array}$$

Rappel : $\Delta_W = f_n^n + a_2 f_n^{n-2} + a_3 f_n^{n-3} + \cdots + a_{n-1} f_n + a_n$.

Définition (Version algébrique de LL)

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{LL} : & \mathbb{C}^{n-1} & \to & \mathbb{C}^{n-1} \\ & (f_1, \ldots, f_{n-1}) & \mapsto & (a_2, \ldots, a_n) \end{array}$$

C'est un morphisme algébrique, homogène pour les poids : $\deg(f_j) = d_j$, $\deg(a_i) = ih$.

<u>fact</u> : $Y \to \mathrm{FACT}(c) = \{R\text{-factorisations strictes de } c\}$

- « compatibilité » avec LL ;
- classes de conjugaison des facteurs $\leftrightarrow$ strates de $\bar{\mathcal{L}}$.

Fibres de LL et factorisations strictes

Théorème

L'application $Y \xrightarrow{\mathrm{LL} \times \underline{\mathrm{fact}}} E_n \times \mathrm{FACT}(c)$ *est injective, et son image est l'ensemble des paires « compatibles ».*

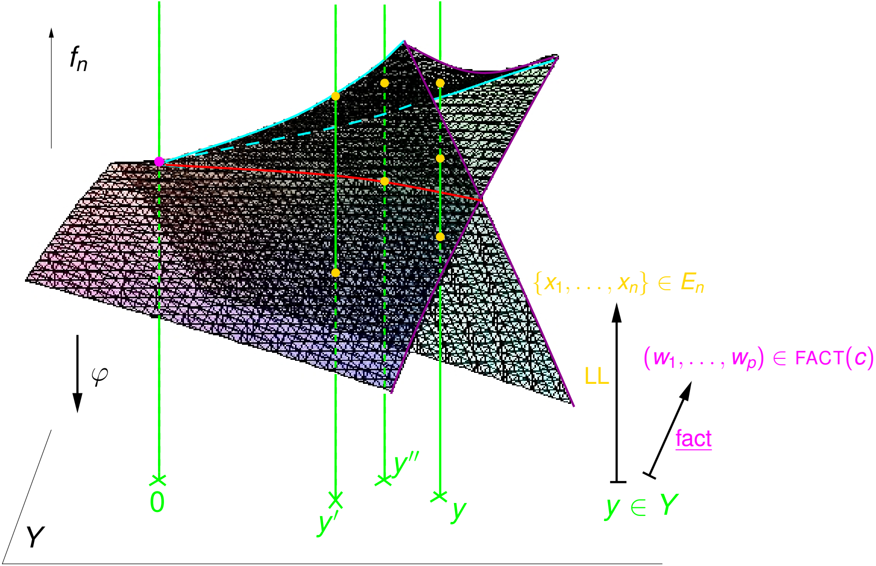
Fibres de LL et factorisations strictes

Théorème

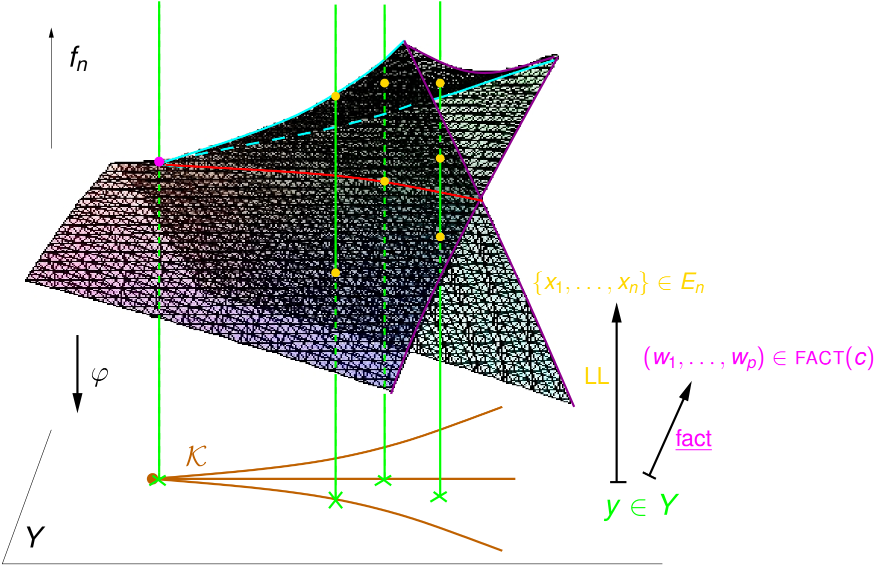
L'application $Y \xrightarrow{\mathrm{LL} \times \underline{\mathrm{fact}}} E_n \times \mathrm{FACT}(c)$ *est injective, et son image est l'ensemble des paires « compatibles ».*

Autrement dit :
$\forall \omega \in E_n$, $\underline{\mathrm{fact}}$ induit une bijection entre la fibre $\mathrm{LL}^{-1}(\omega)$ et l'ensemble des factorisations strictes de même « composition » que ω.

Le lieu de bifurcation $\mathcal{K}$ de LL



Le lieu de bifurcation $\mathcal{K}$ de LL



Partie non ramifiée de LL

Lieu de bifurcation :

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &:= \mathrm{LL}^{-1}(E_n - E_n^{\mathrm{reg}}) \\ &= \{y \in Y \mid \Delta_W(y, f_n) \text{ a des racines multiples en } f_n\} \\ &= \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\}\end{aligned}$$

Partie non ramifiée de LL

Lieu de bifurcation :

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &:= \mathrm{LL}^{-1}(E_n - E_n^{\mathrm{reg}}) \\ &= \{y \in Y \mid \Delta_W(y, f_n) \text{ a des racines multiples en } f_n\} \\ &= \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\}\end{aligned}$$

où

$$D_{\mathrm{LL}} := \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n)\ ;\ f_n).$$

Partie non ramifiée de LL

Lieu de bifurcation :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &:= \mathrm{LL}^{-1}(E_n - E_n^{\mathrm{reg}}) \\ &= \{y \in Y \mid \Delta_W(y, f_n) \text{ a des racines multiples en } f_n\} \\ &= \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\} \end{aligned}$$

où

$$D_{\mathrm{LL}} := \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n)\ ;\ f_n).$$

Proposition

- $\mathrm{LL} : Y - \mathcal{K} \twoheadrightarrow E_n^{\mathrm{reg}}$ *est un revêtement non ramifié, de degré* $n!\ h^n / |W|$;

Partie non ramifiée de LL

Lieu de bifurcation :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &:= \mathrm{LL}^{-1}(E_n - E_n^{\mathrm{reg}}) \\ &= \{y \in Y \mid \Delta_W(y, f_n) \text{ a des racines multiples en } f_n\} \\ &= \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\} \end{aligned}$$

où

$$D_{\mathrm{LL}} := \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n)\ ;\ f_n).$$

Proposition

- $\mathrm{LL} : Y - \mathcal{K} \twoheadrightarrow E_n^{\mathrm{reg}}$ *est un revêtement non ramifié, de degré* $n!\, h^n / \, |W|$;
- $|\mathrm{Red}_R(c)| = n!\, h^n / \, |W|$.

Composantes irréductibles de $\mathcal{K}$

Etude de la restriction de LL : $\mathcal{K} \to E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$.

Composantes irréductibles de $\mathcal{K}$

Etude de la restriction de LL : $\mathcal{K} \to E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$.

$\bar{\mathcal{L}}_2 := \{$strates de $\bar{\mathcal{L}}$ de codim. 2$\}$.

Composantes irréductibles de $\mathcal{K}$

Etude de la restriction de LL : $\mathcal{K} \to E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$.

$\bar{\mathcal{L}}_2 := \{$strates de $\bar{\mathcal{L}}$ de codim. $2\}$.

Proposition

Les $\varphi(\Lambda)$, pour $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$, sont les composantes irréductibles de $\mathcal{K}$ (où φ est la projection $W \backslash V \twoheadrightarrow Y$).

Composantes irréductibles de $\mathcal{K}$

Etude de la restriction de LL : $\mathcal{K} \to E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$.

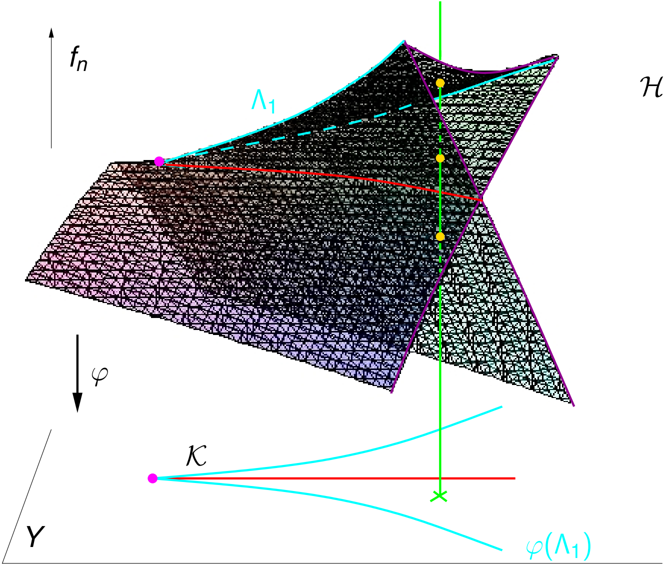
$\bar{\mathcal{L}}_2 := \{$strates de $\bar{\mathcal{L}}$ de codim. 2$\}$.

Proposition

Les $\varphi(\Lambda)$, pour $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$, sont les composantes irréductibles de $\mathcal{K}$ (où φ est la projection $W \setminus V \twoheadrightarrow Y$).

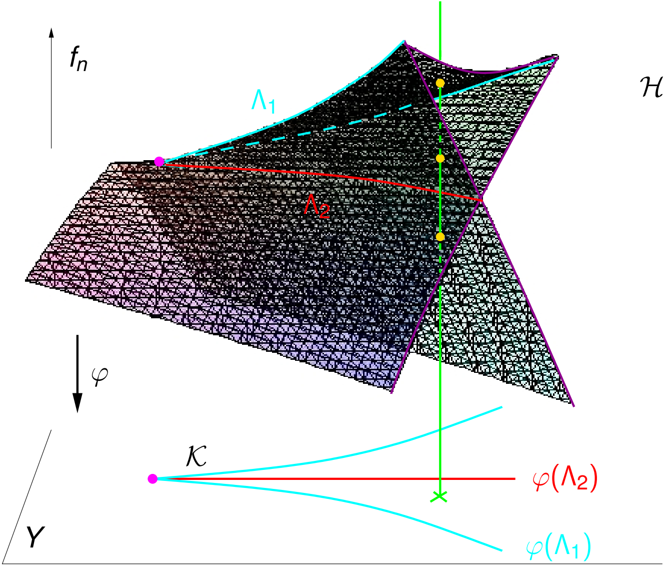
$D_{\mathrm{LL}} = \prod D_\Lambda^{r_\Lambda}$
(facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[f_1, \ldots, f_{n-1}]$).

Composantes irréductibles de $\mathcal{K}$



$\mathcal{H} \subseteq W \backslash V \simeq \mathbb{C}^3$

Composantes irréductibles de $\mathcal{K}$



$\mathcal{H} \subseteq W \backslash V \simeq \mathbb{C}^3$

Factorisations « de type Λ »

$\mathrm{FACT}^{\Lambda}_{n-1}(c) =$ l'ensemble des factorisations de c en :

- $n-2$ réflexions ; et
- un élément de longueur 2 et de classe de conjugaison Λ.

Factorisations « de type Λ »

$\mathrm{FACT}_{n-1}^{\Lambda}(c)$ = l'ensemble des factorisations de c en :

- $n-2$ réflexions ; et
- un élément de longueur 2 et de classe de conjugaison Λ.

$\mathrm{FACT}_{n-1}^{\Lambda}(c) = \underline{\mathrm{fact}}(\varphi(\Lambda)^{\mathrm{gen}})$.

Factorisations « de type Λ »

$\mathrm{FACT}_{n-1}^{\Lambda}(c) =$ l'ensemble des factorisations de c en :

- $n-2$ réflexions ; et
- un élément de longueur 2 et de classe de conjugaison Λ.

$\mathrm{FACT}_{n-1}^{\Lambda}(c) = \underline{\mathrm{fact}}(\varphi(\Lambda)^{\mathrm{gen}})$.

La restriction $\mathrm{LL}_{\Lambda} : \varphi(\Lambda) \to E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$

Factorisations « de type Λ »

$\mathrm{FACT}_{n-1}^{\Lambda}(c) =$ l'ensemble des factorisations de c en :

- $n-2$ réflexions ; et
- un élément de longueur 2 et de classe de conjugaison Λ.

$\mathrm{FACT}_{n-1}^{\Lambda}(c) = \underline{\mathrm{fact}}(\varphi(\Lambda)^{\mathrm{gen}})$.

La restriction $\mathrm{LL}_{\Lambda} : \varphi(\Lambda) \to E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$ correspond à l'extension $\mathbb{C}[a_2, \ldots, a_n]/(D) \subseteq \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_{n-1}]/(D_{\Lambda})$.

Factorisations « de type Λ »

$\mathrm{FACT}^{\Lambda}_{n-1}(c)$ = l'ensemble des factorisations de c en :

- $n-2$ réflexions ; et
- un élément de longueur 2 et de classe de conjugaison Λ.

$\mathrm{FACT}^{\Lambda}_{n-1}(c) = \underline{\mathrm{fact}}(\varphi(\Lambda)^{\mathrm{gen}})$.

La restriction $LL_\Lambda : \varphi(\Lambda) \to E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$ correspond à l'extension $\mathbb{C}[a_2, \dots, a_n]/(D) \subseteq \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]/(D_\Lambda)$.

Théorème (R.)

Pour toute strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}_2$,

- LL_Λ *est un morphisme fini de degré* $\frac{(n-2)!\ h^{n-1}}{|W|} \deg D_\Lambda$;

Factorisations « de type Λ »

$\mathrm{FACT}^{\Lambda}_{n-1}(c) =$ l'ensemble des factorisations de c en :

- $n-2$ réflexions ; et
- un élément de longueur 2 et de classe de conjugaison Λ.

$\mathrm{FACT}^{\Lambda}_{n-1}(c) = \underline{\mathrm{fact}}(\varphi(\Lambda)^{\mathrm{gen}})$.

La restriction $\mathrm{LL}_{\Lambda} : \varphi(\Lambda) \to E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$ correspond à l'extension $\mathbb{C}[a_2, \ldots, a_n]/(D) \subseteq \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_{n-1}]/(D_{\Lambda})$.

Théorème (R.)

Pour toute strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}_2$,

- LL_{Λ} *est un morphisme fini de degré* $\frac{(n-2)!\ h^{n-1}}{|W|} \deg D_{\Lambda}$;
- *le nombre de factorisations de c de type Λ est*

$$|\,\mathrm{FACT}^{\Lambda}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\ h^{n-1}}{|W|} \deg D_{\Lambda}\ .$$

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$$|\operatorname{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\; h^{n-1}}{|W|} \sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg D_\Lambda$$

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$$|\operatorname{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\, h^{n-1}}{|W|} \sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg D_\Lambda$$

Comment calculer ceci **de manière uniforme** (sans cas par cas) ?

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$$|\operatorname{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\, h^{n-1}}{|W|} \sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg D_\Lambda$$

Comment calculer ceci **de manière uniforme** (sans cas par cas) ?

$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$$|\operatorname{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\ h^{n-1}}{|W|} \sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg D_\Lambda$$

Comment calculer ceci **de manière uniforme** (sans cas par cas) ?

$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$

Soit $J_{\mathrm{LL}} = \operatorname{Jac}((a_2, \ldots, a_n)/(f_1, \ldots, f_{n-1}))$.

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$$|\,\mathrm{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\; h^{n-1}}{|W|} \sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg D_\Lambda$$

Comment calculer ceci **de manière uniforme** (sans cas par cas) ?

$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$

Soit $J_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Jac}((a_2, \ldots, a_n)/(f_1, \ldots, f_{n-1}))$.

Expérimentalement (et déjà observé par Saito dans les cas réels)

$$J_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$$

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$$|\operatorname{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\, h^{n-1}}{|W|} \sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg D_\Lambda$$

Comment calculer ceci **de manière uniforme** (sans cas par cas) ?

$$D_{LL} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda} \qquad J_{LL} \stackrel{?}{=} \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$$

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$$|\operatorname{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\, h^{n-1}}{|W|} \sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg D_\Lambda$$

Comment calculer ceci **de manière uniforme** (sans cas par cas) ?

$$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda} \qquad J_{\mathrm{LL}} \stackrel{?}{=} \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$$

$$\Delta_W = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H} \qquad J_W = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H - 1}$$

Extension polynomiale finie graduée

$A = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] = B$.
Hypothèses : extension graduée et finie.

Extension polynomiale finie graduée

$A = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] = B$.
Hypothèses : extension graduée et finie.
On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$.
$\rightsquigarrow$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.

Extension polynomiale finie graduée

$A = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] = B$.
Hypothèses : extension graduée et finie.
On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$.
$\rightsquigarrow$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.

- Lieu de ramification : $V_{\mathrm{ram}} := Z(J_{B/A})$.

Extension polynomiale finie graduée

$A = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] = B$.
Hypothèses : extension graduée et finie.
On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$.
$\rightsquigarrow$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.

- Lieu de ramification : $V_{\text{ram}} := Z(J_{B/A})$.
- Lieu de branchement : $U_{\text{branch}} := \left\{u \in U \,,\, \left|f^{-1}(u)\right| < \deg(f)\right\}$.

Extension polynomiale finie graduée

$A = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] = B$.
Hypothèses : extension graduée et finie.
On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$.
$\rightsquigarrow$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.

- Lieu de ramification : $V_{\text{ram}} := Z(J_{B/A})$.
- Lieu de branchement :
  $U_{\text{branch}} := \left\{u \in U \,,\ \left|f^{-1}(u)\right| < \deg(f)\right\}$.
- $\Delta_{B/A} \in A$ (« discriminant ») : polynôme annulateur de U_{branch}.

Extension polynomiale finie graduée

$A = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] = B$.
Hypothèses : extension graduée et finie.
On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$.
$\rightsquigarrow$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.

- Lieu de ramification : $V_{\text{ram}} := Z(J_{B/A})$.
- Lieu de branchement :
  $U_{\text{branch}} := \left\{ u \in U \, , \, \left| f^{-1}(u) \right| < \deg(f) \right\}$.
- $\Delta_{B/A} \in A$ (« discriminant ») : polynôme annulateur de U_{branch}.

On a toujours : $f(V_{\text{ram}}) = U_{\text{branch}}$.

Groupe de réflexion virtuel

Définition (Extension bien ramifiée)

On dit que l'extension $A \subseteq B$ est bien ramifiée si $V_{\text{ram}} = f^{-1}(U_{\text{branch}})$.

Groupe de réflexion virtuel

Définition (Extension bien ramifiée)

On dit que l'extension $A \subseteq B$ est bien ramifiée si $V_{\text{ram}} = f^{-1}(U_{\text{branch}})$.

$\Leftrightarrow$ s'il existe Q_0 ramifié au-dessus de $P \in \mathrm{Spec}_1(A)$, alors tout autre $Q \in \mathrm{Spec}_1(B)$ au-dessus de P est aussi ramifié.

Groupe de réflexion virtuel

Définition (Extension bien ramifiée)

On dit que l'extension $A \subseteq B$ est bien ramifiée si $V_{\text{ram}} = f^{-1}(U_{\text{branch}})$.

$\Leftrightarrow$ s'il existe Q_0 ramifié au-dessus de $P \in \mathrm{Spec}_1(A)$, alors tout autre $Q \in \mathrm{Spec}_1(B)$ au-dessus de P est aussi ramifié.

Théorème (R. ?)

*Soit $A \subseteq B$ une extension polynomiale finie graduée, et **bien ramifiée**. Alors :*

Groupe de réflexion virtuel

Définition (Extension bien ramifiée)

On dit que l'extension $A \subseteq B$ est bien ramifiée si $V_{\text{ram}} = f^{-1}(U_{\text{branch}})$.

$\Leftrightarrow$ s'il existe Q_0 ramifié au-dessus de $P \in \operatorname{Spec}_1(A)$, alors tout autre $Q \in \operatorname{Spec}_1(B)$ au-dessus de P est aussi ramifié.

Théorème (R. ?)

Soit $A \subseteq B$ une extension polynomiale finie graduée, et ***bien ramifiée****. Alors :*

- $J_{B/A} = \prod_{Q \in \operatorname{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$;

Groupe de réflexion virtuel

Définition (Extension bien ramifiée)

On dit que l'extension $A \subseteq B$ est bien ramifiée si $V_{\text{ram}} = f^{-1}(U_{\text{branch}})$.

$\Leftrightarrow$ s'il existe Q_0 ramifié au-dessus de $P \in \mathrm{Spec}_1(A)$, alors tout autre $Q \in \mathrm{Spec}_1(B)$ au-dessus de P est aussi ramifié.

Théorème (R. ?)

*Soit $A \subseteq B$ une extension polynomiale finie graduée, et **bien ramifiée**. Alors :*

- $J_{B/A} = \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$;
- $\Delta_{B/A} = \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q}$.

Groupe de réflexion virtuel

Définition (Extension bien ramifiée)

On dit que l'extension $A \subseteq B$ est bien ramifiée si $V_{\text{ram}} = f^{-1}(U_{\text{branch}})$.

$\Leftrightarrow$ s'il existe Q_0 ramifié au-dessus de $P \in \mathrm{Spec}_1(A)$, alors tout autre $Q \in \mathrm{Spec}_1(B)$ au-dessus de P est aussi ramifié.

Théorème (R. ?)

*Soit $A \subseteq B$ une extension polynomiale finie graduée, et **bien ramifiée**. Alors :*

- $J_{B/A} = \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$;
- $\Delta_{B/A} = \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q}$.

$\rightsquigarrow$ généralisation de la version galoisienne ($A = B^W$ avec W groupe de réflexion).

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n)\ ;\ f_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n)\ ;\ f_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- LL *est une extension bien ramifiée, de discriminant* D_{LL} *;*

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n)\ ;\ f_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- LL *est une extension bien ramifiée, de discriminant* D_{LL} *;*
- *les* $(D_\Lambda)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2}$ *sont les polynômes ramifiés de l'extension* LL*, et* $r_\Lambda = e_{D_\Lambda}$*.*

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n)\ ;\ f_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- LL *est une extension bien ramifiée, de discriminant* D_{LL} *;*
- *les* $(D_\Lambda)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2}$ *sont les polynômes ramifiés de l'extension* LL, *et* $r_\Lambda = e_{D_\Lambda}$.
- *interprétation des* r_Λ *dans* W *;*

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n)\ ;\ f_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- LL *est une extension bien ramifiée, de discriminant* D_{LL} *;*
- *les* $(D_\Lambda)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2}$ *sont les polynômes ramifiés de l'extension* LL, *et* $r_\Lambda = e_{D_\Lambda}$.
- *interprétation des* r_Λ *dans* W *;*
- $J_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$.

Factorisations sous-maximales

$$\sum \deg D_{\Lambda} = \deg D_{\mathrm{LL}} - \deg J_{\mathrm{LL}}.$$

Factorisations sous-maximales

$$\sum \deg D_\Lambda = \deg D_{\mathrm{LL}} - \deg J_{\mathrm{LL}}.$$

Corollaire

*Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré, de rang n. Le nombre de **factorisations strictes d'un élément de Coxeter** c **en** $n-1$ **blocs** est :*

Factorisations sous-maximales

$\sum \deg D_\Lambda = \deg D_{\mathrm{LL}} - \deg J_{\mathrm{LL}}$.

Corollaire

Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré, de rang n. Le nombre de ***factorisations strictes d'un élément de Coxeter*** c ***en*** $n-1$ ***blocs*** *est :*

$$|\operatorname{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\ h^{n-1}}{|W|}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}h + \sum_{i=1}^{n-1} d_i\right) .$$

Groupe de réflexion *vs.* extension LL

Groupe de réflexion W	Extension LL
$V \to W\backslash V$ $\mathbb{C}[f_1,\ldots,f_n] = \mathbb{C}[V]^W \subseteq \mathbb{C}[V]$ degré $\lvert W\rvert$	$Y \to \mathbb{C}^{n-1}$ $\mathbb{C}[a_2,\ldots,a_n] \subseteq \mathbb{C}[f_1,\ldots,f_{n-1}]$ degré $n!\ h^n / \lvert W\rvert$
$V^{\mathrm{reg}} \twoheadrightarrow W\backslash V^{\mathrm{reg}}$ Fibre générique $\simeq W$	$Y - \mathcal{K} \twoheadrightarrow E_n^{\mathrm{reg}}$ $\simeq \mathrm{Red}_R(c)$
ramifié sur $\bigcup_{H\in\mathcal{A}} H \twoheadrightarrow \mathcal{H}$	$\mathcal{K} = \bigcup_{\Lambda\in\bar{\mathcal{L}}_2} \varphi(\Lambda) \twoheadrightarrow E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$
$\Delta_W = \prod_{H\in\mathcal{A}} \alpha_H^{e_H}$	$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda\in\bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$
$J_W = \prod \alpha_H^{e_H-1}$ $e_H = \lvert W_H\rvert$	$J_{\mathrm{LL}} = \prod D_\Lambda^{r_\Lambda-1}$ r_Λ = pseudo-ordre des éléments de NCP_W de type Λ