Université Denis Diderot (Paris VII) — **2009-2010**
CM 3 — **Groupe Concours**

Feuille 2
Suites numériques

Exercice 1 — Indiquer avec une brève justification si chacun des énoncés suivants est vrai pour deux suites de réels $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Si U est croissante et convergente, elle est majorée.
2. Si U est majorée et convergente, elle est croissante.
3. Si U est décroissante et positive, elle converge.
4. Si U est croissante et non majorée , elle diverge.
5. Si U et V sont divergentes, $U + V$ est divergente.
6. Si U est convergente et V divergente, $U + V$ est divergente.
7. Si U est convergente et V divergente, UV est divergente.
8. Si U tend vers 0, UV tend vers 0.

Exercice 2 — On veut montrer de plusieurs manières différentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite de Cauchy et conclure.
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n + 1} + \cdots + \dfrac{1}{2^n + (2^n - 1)}$.
   - Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n > \dfrac{1}{2}$.
   - En remarquant que $2^n + (2^n - 1) = 2^{n+1} - 1$, montrer que $u_{2^{n+1}-1} = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et conclure.
3. Comparer u_n à une intégrale.

Exercice 3 — On considère les deux suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

1. Montrer que :
   (a) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante ;
   (b) la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante ;
   (c) pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$;
   (d) $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

   En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et de même limite. Cette limite est le nombre réel e.
2. Montrer que pour tout entier $n > 0$ il existe un unique nombre réel θ_n vérifiant $0 < \theta_n < 1$ et tel que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n.n!}. \tag{1}$$

3. Montrer que e est irrationnel (on montrera que la formule (1) n'est pas possible si $e = \dfrac{p}{q}$ avec p et q dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 4 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers l (avec l un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$).

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$. Montrer que la réciproque n'est pas vraie en général, mais est vraie lorsque u_n est monotone.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k u_k$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{l}{2}$.

Exercice 5 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs, telle que la suite $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers une limite l. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Exercice 6 — Soit f une fonction positive décroissante et continue sur $[1, +\infty[$ et

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée.
En déduire la convergence de la suite $v_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log n$.

Exercice 7 — Montrer que si la fonction g est continue positive et décroissante sur $]0, +\infty[$, alors on a :

$$\int_1^{n+1} g(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} g(k) \leq g(1) + \int_1^n g(x)dx.$$

En déduire le comportement de la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 8 — Soit u_n une suite décroissante positive convergeant vers 0. On pose $v_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^n u_n$.
Soient p et k deux entiers. Montrer que $u_p \geq u_p - u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + (-1)^k u_{p+k} \geq 0$.
En déduire que la suite v_n est de Cauchy.

Exercice 9 — Etudier les suites $u_n, n \in \mathbb{N}$ et $v_n, n \in \mathbb{N}$ définies par u_0, v_0 $(0 < u_0 < v_0)$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Exercice 10 — Etudier les suites définies par
1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$; 2) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$;
3) $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{u_n + 1}$; 4) $u_0 = 1/3$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 - u_n}{3} \exp(u_n)$.

Exercice 11 — Etudier les suites $u_n, n \in \mathbb{N}$ et $v_n, n \in \mathbb{N}$ définies par u_0, v_0 $(0 < u_0 < v_0)$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}.$$

Pour déterminer la limite, on posera $u_0 = v_0 \cos\alpha$.

Exercice 12 — Etudier la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2$.

Exercice 13 — Etudier la suite définie par u_0, u_1 et $u_{n+2} = \sqrt{2} u_{n+1} - u_n$.