Université Paris 7 | **Premier semestre 2007-2008**
Licence 1ère année | **MK1 - Maple**

Feuille d'exercices n°6

Exercice 1. Etudier les courbes paramétrées suivantes : déterminer à la main l'intervalle d'étude et les symétries. [On pourra si possible étudier les limites, branches infinies, variations et points doubles avec Maple]. Vérifier vos résultats en traçant la courbe. [On pourra tracer la courbe et ses asymptotes sur un même graphique (charger la librairie *plots* et utiliser sa commande *display*)].

1. $\begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \cos 2t \end{cases}$
2. $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = (1 + \cos t)\sin t \end{cases}$
3. $\begin{cases} x(t) = t/\ln t \\ y(t) = t^2/(t-1) \end{cases}$
4. $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \cos(3t/5) \end{cases}$
5. $\begin{cases} x(t) = t^2 + 2/t \\ y(t) = t + 1/t \end{cases}$
6. $\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - 1/t^2 \end{cases}$

Exercice 2. Etude de la courbe polaire définie par $\rho = \sin(3\theta/2)$.

1) Calculer à la main la période de la courbe et la tracer sur cette période.
2) Déterminer à la main les symétries de la courbe. Qu'en déduisez-vous sur l'intervalle d'étude ? Tracer la courbe sur l'intervalle minimal.

Exercice 3. On considère l'astroïde définie par $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$. Tracer la courbe sur sa période minimale pour $a = 1$. Animer la courbe en faisant varier a entre dans un intervalle au choix (librairie *plots*, commande *animate*).

Exercice 4. Tracer la courbe paramétrée définie par $x(t) = t^3 - 4t$, $y(t) = 2t^2 - 3$ et calculer l'angle formé par les tangentes au point double.

Exercice 5. Tracer la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ définie par $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$. Déterminer le lieu des points du plan d'où l'on peut mener (au moins) deux tangentes à $\mathcal{C}$ orthogonales et le tracer. On appelle ce lieu la courbe orthoptique de $\mathcal{C}$.

Exercice 6. (mécanique et Maple) On considère un cercle $\mathcal{C}$ fixe, de centre O, de rayon R. Un autre cercle $\mathcal{C}'$, de rayon r, de centre A, est mobile mais en restant tangent à $\mathcal{C}$ *intérieurement* : il roule sans glisser à l'intérieur de $\mathcal{C}$, de telle sorte que la vitesse angulaire de A par rapport à O est constante égale à ω. On fixe un point M sur la circonférence de $\mathcal{C}'$, disons qu'à $t = 0$, les coordonnées de O, A, M sont respectivement $(0, 0)$, $(R - r, 0)$, $(0, R)$. On cherche à comprendre le mouvement global de M par rapport à 0.

1) Écrire les équations $(x(t), y(t))$ du mouvement de $M(t)$, en fonction de R, r, et ω. On décomposera en un mouvement de rotation uniforme de A par rapport à O, et un autre mouvement de rotation uniforme de M par rapport à A. Indication pour déterminer la vitesse angulaire de M par rapport à A : lorsque le point M revient pour la première fois sur la circonférence de $\mathcal{C}$, de quel angle a tourné A autour de O, et de quel angle a tourné M autour de A ?

2) On prend $\omega = 0.1$ $R = 10$, $r = R/4$. Quelle est la période de $M(t)$? Tracer avec Maple la trajectoire de M sur une période (on pourra tracer sur un meme graphe le cercle $\mathcal{C}$, et utiliser les options *scaling=constrained* et *axes=none*). Faire de meme avec $r = R/3, R/6, R/10, 3R/7$, puis avec $r = R/2, R, 2 * R, 3 * R$.... Remarques ? La courbe décrite s'appelle une *hypocycloide*.

3) Reprendre les questions 1 et 2 dans le cas où la tangence est extérieure, ie le cercle $\mathcal{C}'$ roule sans glisser *autour* de $\mathcal{C}$ (*épicycloide*).