Université Paris 7 **Premier semestre 2007-2008**
Licence 1ère année **MK1 - Maple**

Feuille d'exercices n°8 (révisions)

Exercice 1. Soit la fonction qui à x réel associe $x - \frac{2e^x}{e^x - 1}$. Soit C la courbe représentative de f.

1) Expliciter l'ensemble de définition D_f de f.
2) Vérifier que f est continue sur D_f.
3) Calculer les limites de f aux bornes des intervalles qui composent D_f.
4) La courbe C admet-elle une asymptote ? Si oui, préciser laquelle.
5) Démontrer que la courbe C admet pour asymptote en ∞ la droite Δ d'équation $y = x - 2$.
6) Etudier la position de C par rapport à cette asymptote.
7) Calculer la fonction dérivée de f. Etudier son signe. En déduire les variations de f.
8) Tracer sur un même graphe la courbe C et la droite Δ en choisissant de bons intervalles d'affichage en abscisse et en ordonnée.
9) Sans utiliser *solve* ni *fsolve*, démontrer que f a un unique zéro compris entre -2 et -1.
10) En utilisant *fsolve*, donner une valeur approchée de ce zéro.

Exercice 2. Matrices magiques.

Soit $n > 1$. Une matrice M à coefficients dans $\mathbb{R}$ de taille $n \times n$ est dite *magique* s'il existe un nombre $s(M)$ tel que les sommes des coefficients sur les lignes, sur les colonnes et sur les deux diagonales soient toutes égales à $s(M)$.

1) Exprimer les conditions précédentes en fonction des $M_{i,j}$ (= le coefficient de M à la i-ème ligne et j-ème colonne).
2) Ecrire une procédure prenant en entrée une matrice M et vérifiant si elle est magique ou non.
3) On propose un algorithme permettant d'obtenir une matrice magique de taille n impaire quelconque et dont les coefficients sont les entiers $1, 2, 3, \ldots, n^2$.

   On place l'entier 1 au milieu de la première ligne. On suppose par récurrence que les k premiers entiers ont été placés et que l'entier k a été placé en i-ème ligne et j-ème colonne. On place alors l'entier $k + 1$ en respectant les règles suivantes :
   - On pose $I = i - 1$ (sauf si $i = 1$ auquel cas on pose $I = n$) et $J = j + 1$ (sauf si $j = n$ auquel cas on pose $J = 1$).
   - Si aucun nombre n'a encore été place à la I-ème ligne et J-ème colonne, on y place l'entier $k + 1$.

– Si cet emplacement est pris, on pose $I = i + 1$ (sauf si $i = n$, auquel cas on pose $I = 1$) et $J = j$ et on place $k + 1$ en I-ème ligne et J-ème colonne.

Ecrire en Maple la procédure correspondante, qui fournit une matrice magique M_n d'ordre impair n. Donner en particulier M_5.

Exercice 3. Soit la fonction f qui à x réel associe $\frac{(x^2-x-6)^2-x+3}{x^2-4x+3}$. Soit C la courbe représentative de f.

1) Expliciter l'ensemble de définition Df de f.
2) Vérifier que f est continue sur Df.
3) Calculer les limites de f aux bornes des intervalles qui composent Df.
4) La courbe C admet-elle une asymptote ? Si oui, préciser laquelle.
5) La fonction f est-elle prolongeable par continuité ? Si oui, préciser ce prolongement.
6) Simplifier l'expression de $f(x)$. Ce prolongement était-il prévisible ?
7) En utilisant la commande D, calculer la fonction dérivée de f que nous appelerons g.
8) Déterminer de manière exacte son unique racine réelle et l'appeler a.
9) Etudier le signe de g. En déduire les variations de f.
10) Determiner l'unique zero réel de f.
11) Donner l'équation de la tangente T à la courbe C au point $(z, 0)$.
12) Tracer sur un même graphe la courbe C et la droite T en choisissant de bons intervalles d'affichage en abscisse et ordonnée.

Exercice 4. Donner les limites et les DLs des fonctions suivantes à l'ordre et au point précisés

– $\tan(2t) \cdot \log(\tan(t))$ (à l'ordre 7 en $\pi/4$)
– $\cos(t) \cdot e^{\frac{1}{t-\sin(t)}}$ (à l'ordre 2 en $\pi/2$)
– $cos(t)^{\tan(t^2)}$ (à l'ordre 11 en 0)
– $(e^t + t)^{1/t}$ (à l'ordre 5 en 0)
– $cos(\arcsin(t))$ (à l'ordre 9 en 0)