Cor 12 R réel clos, $F \subset R$ sous-corps. Alors $\bar{F} \cap R$ est réel clos. Clair par Thm 8.

Thm 13 (Tarski). La théorie des corps réels clos ($RCF_<$) (dans le langage $\{+,-,\cdot,0,1,<\}$) admet l'éq.

C'est à dire : étant donnée une formule $\varphi(x_1,\dots,x_m)$, il existe une formule $\psi(x_1,\dots,x_m)$ sans quantificateurs [quanteurs], telle que $Th(\mathbb{R}) \vdash \forall \bar{x}\ \varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x})$.

Dém Critère d'éq : il suffit de montrer que si (R_1, R_1^2) et (R_2, R_2^2) contiennent le corps ordonné $(\mathbb{Q}(a_1,\dots,a_n), P)$, et si $\varphi(x,\bar{a})$ est une formule sans quanteurs (et sans autres paramètres que $\bar{a}$), alors $R_1 \models \exists x\, \varphi(x,\bar{a})$ ssi $R_2 \models \exists x\, \varphi(x,\bar{a})$.

Formule sans quanteurs : $\vee \wedge$ de formules de la forme
$f(x,\bar{a}) = 0$, $f(x,\bar{a}) > 0$, $f(x,\bar{a}) < 0$
où $f \in \mathbb{Z}[X, Y_1,\dots,Y_m]$.

Une réduction facile montre qu'il suffit de montrer quand
$$\varphi(x,\bar{a}) = \bigwedge_i f_i(x,\bar{a}) = 0 \ \wedge\ \bigwedge_j g_j(x,\bar{a}) > 0.$$

Lemme 13bis C'est vrai : si $b \in R_1$ satisfait $\varphi(x)$, alors $R_2 \models \exists x\, \varphi(x)$

Soient $F_i = \bar{F} \cap R_i$. On peut supposer $F_1 = F_2$.

Si l'une des f_i est non-triviale, et $b \in R_1$ satisfait φ, alors $b \in F_1$, et donc $R_2 \models \varphi(b)$. On peut donc supposer
$\varphi(x,\bar{a}) := \bigwedge_j g_j(x,\bar{a}) > 0$. On regarde l'ensemble A des zéros des g_j dans F_1. Si $A = \emptyset$, alors $\wedge\, g_j(0) > 0$, et c'est OK. Autrement, comme A est fini, $R_1 \setminus A$ est une union finie d'intervalles ouverts, disons $A = \{c_1,\dots,c_m\}$; et pour tout j : le signe de g_j sur

un intervalle donné est constant, et est le même que dans $F_1 = F_2$.

Donc en fait nous venons de prouver : si $\varphi(x)$ est satisfaite dans R_1, alors elle est satisfaite dans F_1, et donc dans R_2.

Cor 14 Soient $R_1 \subset R_2$ des corps réels clos. Alors $R_1 \preceq R_2$ (tte formule à para. dans R_1 est satisfaite dans R_2 ssi elle l'est dans R_2)

Cor 15 Soit R un corps réel clos. Alors tout sous-ensemble définissable de R est une union finie d'intervalles ouverts et de points
↳ avec extrémités dans $R \cup \{\pm\infty\}$

Cor 16 Soit $\varphi(\bar{x})$ une formule du langage des anneaux. $\{+,-,\cdot,0,1\}$.
Alors, modulo RCF, il existe une fle existentielle $\theta(\bar{x}) = \exists \bar{y}\, \psi(\bar{x},\bar{y})$, ψ sans quanteurs tq $\mathrm{RCF} \vdash \forall \bar{x}\, (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \theta(\bar{x}))$

Dém $x > 0 \leftrightarrow \exists y\ y^2 = x \wedge y \neq 0$
$x < 0 \leftrightarrow \ldots$

Déf Un groupe ordonné abélien est archimédien si pour tous $0 < a < b$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b < na$. Un corps ordonné est archimédien si son groupe additif l'est.

Exercice Montrez qu'un groupe abélien ordonné est archimédien si et seulement il se plonge dans $(\mathbb{R}, +, 0, <)$.
Montrez que si K est un corps ordonné archimédien alors ce plongement est unique.

Remarque L'ensemble des gpes/corps ordonnés archimédiens n'est pas axiomatisable.

Résultats d'élimination des quantificateurs

La théorie ACF des corps algébriquement clos dans le langage des anneaux $\{+,-,\cdot,0,1\}$ élimine les quantificateurs : si $\varphi(\bar{x})$ est une formule, il existe une formule sans quantificateurs $\psi(\bar{x})$ telle que

$$ACF \models \forall \bar{x} \ (\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$$

Si K est un corps, $n \in \mathbb{N}$, les sous-ensembles de K^n définis par des formules sans quantificateurs sont appelés des ensembles constructibles.

Si K est algébriquement clos, on a donc que la projection d'un ensemble constructible est constructible.

La théorie $RCF_<$ des corps réels clos dans le langage des anneaux ordonnés $\{+,-,\cdot,0,1,<\}$ élimine les quantificateurs.

Si K est un corps ordonné, les sous-ensembles de K^n définis par des formules sans quantificateurs sont appelés des ensembles semi-algébriques

Exemples de formules sans quantificateurs :

$f(\bar{x}) = 0$

$f(\bar{x}) \geq 0$ $\qquad f \in \mathbb{Z}[\bar{X}]$ sans paramètres

$f(\bar{x}) > 0$ $\qquad f \in K[\bar{X}]$ à paramètres dans K.

Structures O-minimales

Def

Soit $(R, <, \dots)$ une structure dans un langage $\mathcal{L}$ contenant une relation binaire $<$, et supposons que $<$ définisse un ordre (total) dense sans extrémités (sur R).

La $\mathcal{L}$-structure R est <u>O-minimale</u> si tout sous-ensemble définissable de R est une union finie de points et d'intervalles ouverts ayant leurs extrémités dans $R \cup \{\pm \infty\}$.

On met sur R la topologie de l'ordre ; les ouverts de base sont les intervalles ouverts (a, b), avec $a < b$ dans $R \cup \{\pm\infty\}$. On met la topologie produit sur R^m.

Conséquences faciles : soit R une structure O-minimale, $A \subseteq R$ et $B \subseteq R^m$ des ensembles définissables.

(1) $\mathrm{Inf}(A)$ et $\mathrm{Sup}(A)$ existent dans $R \cup \{\pm\infty\}$

(2) La frontière (= boundary) de A, $cl(A) \cap cl(R \setminus A)$, est finie, et si $a_1 < \dots < a_k \in R$ sont ses points, alors chaque intervalle (a_i, a_{i+1}) est contenu dans A ou dans son complémentaire. ($a_0 = -\infty$, $a_{k+1} = +\infty$).

(2') Si A est infini alors A contient un intervalle ouvert non vide

(3) $cl(B)$ et $int(B)$ sont définissables.

(4) Si $B \subseteq C \subseteq R^m$ sont définissables, et B est ouvert dans C, alors il existe un ouvert définissable $U \subseteq R^m$ tel que $B = C \cap U$.

Dém de (4) : U est l'union de toutes les boites ouvertes de R^m, dont l'intersection avec C est contenue dans B.

Exercice $(R, <, \dots)$ o-minimale, $S \subseteq R^{m+n}$ définissable par la formule $\varphi(x, y)$ $|x| = m$ $|y| = n$

(1) $\{x \in R^m \mid S_x$ est ouvert$\}$ est définissable
$S_x = \{y \in R^n \mid (x, y) \in S\}$

(2) $\{(x, y) \in R^{m+n} \mid y \in \text{Int}(S_x)\}$ est définissable

Exemples de structures O-minimales

(1) R un ordre total dense sans extrémités DLO

Dém On montre l'élimination des quantificateurs
Soient I et J deux DLO, contenant le sous-ensemble ordonné $a_1 < a_2 < \dots < a_k$. Soit $\varphi(x, \bar{a})$ une formule sans quantificateurs, et avec seuls paramètres $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k)$; soit $b \in I$ qui satisfait $\varphi(b, \bar{a})$ dans I.
Si $b \in \{a_1, \dots, a_k\}$ alors $J \models \varphi(b, \bar{a})$.
Sinon, soient $a_0 = -\infty$, $a_{k+1} = +\infty$ et i l'unique

entier tel que $a_i < b < a_{i+1}$ (dans I). Soit $c \in (a_i, a_{i+1})_J$ (ordre dense, $a_i < a_{i+1}$). On vérifie que b et c vérifient les mêmes formules atomiques avec paramètre dans $\{a_1, \dots, a_k\}$, et en particulier φ.

(2) $(R, +, \cdot, -, 0, 1, <) \models RCF_<$

(3) Groupes abéliens divisibles ordonnés

$(\mathbb{R}, +, 0, <)$ $(\mathbb{Q}, +, 0, <)$

On montre l'élimination de quantificateurs.

(4) Soit F un corps ordonné. Un espace ordonné F-linéaire est un F-espace vectoriel, muni d'un ordre total qui en fait un groupe abélien ordonné, et satisfaisant : si $a \in V^{>0}$, $\lambda \in F^{>0}$ alors $\lambda a > 0$.

$\mathcal{L} = \{+, -, 0, \lambda \cdot, <\}_{\lambda \in F}$

multiplication par le scalaire λ