Déf Un ensemble définissable $A \subset \mathbb{R}^2$ est clairsemé si pour tout a en dehors d'un ensemble fini, la fibre $A_a = \{ b \mid (a,b) \in A \}$ est finie.

Un ensemble déf $A \subset \mathbb{R}^n$ est clairsemé si l'ensemble des $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ tels que A_a soit infini, est contenu dans un ensemble déf clairsemé.

Donc par exemple si toutes les fibres sont finies.

Théorème 21 Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ est définissable clairsemé, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la taille des fibres finies est bornée par N.

Cela suivra d'une suite de lemmes.

Lemme 22 Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ est définissable, sont éq^{ts} :

(1) A clairsemé

(2) $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$

(3) A est nulle part dense dans $\mathbb{R}^2$.

Rappel A_a infini ssi il contient un intervalle ouvert. Donc $\{a \mid A_a \text{ infini}\}$ est définissable

Dém : (2) → (1) : Si A n'est pas clairsemé alors il existe un intervalle I ouvert $\subseteq R$ tq pour tout $a \in I$, A_a est infinie...

Chaque A_a est donc une union finie d'intervalles ouverts et de points, et on définit $s_1, \dots, s_2$: $I \longrightarrow R \cup \{\pm\infty\}$ par $(s_1(a), s_2(a))$ est le plus petit intervalle ouvert maximal contenu dans A_a. Par monotonicité, on peut supposer qu'elles sont continues sur J : mais alors

$\{(x,y) \mid x \in J,\ s_1(x) < y < s_2(x)\}$ est ouvert # "contradiction"

(1) → (3) Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ ouvert déf non vide. Alors $U \setminus A$ n'est pas clairsemé. Donc son intérieur est $\neq \emptyset$, et A n'est pas dense dans U.

(3) → (2) : clair.

Cor Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ est clairsemé, alors $cl(A)$ est clairsemé

En effet : A clairsemé $\to$ A nulle part dense $\to$ $cl(A)$ nulle part dense $\to$ $cl(A)$ clairsemé

Lemme 23 Soit $A \subseteq \mathbb{R}^2$ déf, clairsemé

(1) Si $\pi_1(A)$ est infini, alors A contient le graphe d'une fonction déf continue sur un intervalle $I \subseteq \pi_1(A)$

(2) Si A contient le graphe d'une fonction déf continue $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert, alors il existe $x_0 \in I$ et une boîte ouverte B telle que $(x_0, f(x_0)) \in B$, $B \cap A = \text{graph}(f) \cap B$.

Dém (1) On prend un intervalle ouvert $I \subset \pi_1(A)$ sur lequel les fibres de A sont finies, et on définit $f(x) = \min A_x$ sur I. Par le thm de monotonicité ops f est continue sur I

(2) Pour $x \in I$ on pose [On peut supposer : $\forall x \in I$, A_x fini]

$f_1(x) = \max \{ y < f(x) \mid (x,y) \in A \}$, et $-\infty$ s'il n'y en a pas

$f_2(x) = \min \{ y > f(x) \mid (x,y) \in A \}$, et $+\infty$ si cet ens. est $\emptyset$

Par thm de monotonicité, il existe un intervalle $J \subseteq I$ tq f, f_1, f_2 sont continues sur J, et on a $f_1 < f < f_2$ sur J

Par déf, on a $A_x \cap (f_1(x), f_2(x)) = \{f(x)\}$ pour $x \in J$.

On utilise la continuité pour conclure.

Lemme 24 Soit $A \subseteq \mathbb{R}^2$ déf clairsemé, $A_1 \subseteq A$ déf tel que $\pi_1(A_1)$ soit infini. Alors il existe un ouvert déf $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tq $U \cap A \subseteq A_1$, et de plus cette $\cap$ est le graphe d'une fonction continue sur un intervalle non vide.

Dém On applique le lemme ci-dessus à A_1.

Cor 25 Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ est déf clairsemé alors $cl(A) \setminus A$ est fini.

Dém On sait que $cl(A)$ est clairsemé ; on regarde $A_1 = cl(A) \setminus A$.

Si A_1 était infini, alors l'un de $\pi_1(A_1)$ ou $\pi_2(A_1)$ est infini. (11)
Ops $\pi_1(A_1)$ infini. Par le lemme 24 ci-dessous, il existe un ouvert U tq $\underbrace{U \cap A}_{\neq \phi} \subseteq A_1 = cl(A) \setminus A$, i.e $U \cap cl(A) \neq \phi$ et $U \cap A = \phi$ #.

Pour $A \subseteq \mathbb{R}^2$ soit $G(A) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid$ il existe une boîte ouverte $I \times J$ contenant (a,b) telle que $A \cap (I \times J)$ est le graphe d'une appl. continue $I \to \mathbb{R}$. $\}$

<u>Lemme</u> 26 Si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ est déf clairsemé, alors $\pi_1(A \setminus G(A))$ est fini.

<u>Dém</u> Soit $A_1 = A \setminus G(A)$; par le lemme 23 ci-dessous, $\pi_1(A_1)$ est fini.

<u>Cor</u> 27 Si A est déf et clairsemé, alors pour tout x en dehors d'un sous-ens. fini de $\pi_1(A)$, il existe un voisinage I de x et $a, b \in \mathbb{R}$ tq $A \cap (I \times \mathbb{R}) \subseteq I \times (a,b)$ (A est borné près de x)

En partitionnant $\pi_1(A)$ on peut donc supposer :

(1) $\pi_1(A)$ est un intervalle ouvert I

(2) A est relativement fermé dans $I \times \mathbb{R}$ (cor 25)

(3) A est borné près de chaque point de I.

(4) $A = G(A)$

<u>Lemme</u> 28 Soit $A \subseteq \mathbb{R}^2$ comme ci-dessus. Alors pour tout $a_1, a_2 \in I$ on a $|A_{a_1}| = |A_{a_2}|$.

<u>Dém</u> On pose $A_n = \{a \in I \mid |A_a| = n\}$

Assertion : A_n est ouvert.

Soit $a \in A_n$, $A_a = \{b_1, \dots, b_n\}$. Comme $(a, b_i) \in G(A)$, il existe $J_1, \dots, J_n$ intervalles ouverts disjoints et I' ouvert $\ni a$ tq $A \cap (I' \times J_i)$ est le graphe d'une fn continue f_i, et contient (a, b_i)

Soit $B = A \cap (I' \times R) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \text{graph } f_i$. C'est un fermé rel^t à $(I' \times R)$.

Comme $A = G(A)$, B est rel^t ouvert dans A, et $\bigcup$ graph f_i aussi. Donc $\{a\} \times R \cap cl(B) = \emptyset$, et $a \notin cl(\pi_1(B))$:
comme A est borné (*), contenu dans $I' \times (c,d)$ disons, l'application $\pi_1(B) \to (c,d)$, $g: x \mapsto \inf B_x$ est définissable.
Si $a \in cl(\pi_1(B))$ alors cette fonction est continue sur un intervalle à gauche de a, ou bien sur un intervalle à droite de a.
Disons sur (a_0, a). g étant continue et bornée, $\lim_{x \to a^-} g(x)$ existe. Comme B est fermé dans $I' \cap (-\infty, a] \times [c,d]$, on a que $(a, \lim_{x \to a^-} g(x)) \in B$. #.

En diminuant encore I', on peut supposer $A \cap (I' \times R) = \bigcup_{i=1}^{n}$ graph f_i. Cela montre que $A(n)$ est ouvert.
Comme I ne peut pas être l'union disjointe d'ouverts définissables, nous avons $I = A(n)$. Cela finit la dém. du théorème.

Corollaire/Exercice : Soit $A \subset R^2$ un ensemble déf. clairsemé. Alors il existe $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ dans $R \cup \pm\infty$ tels que : chaque $((a_i, a_{i+1}) \times R) \cap A$ est l'union disjointe de graphes de k_i fonctions continues définissables $(a_i, a_{i+1}) \to R$. (On permet $k_i = 0$)

(*) A est borné près de a, on peut supposer que A est bornée sur $I \times R$, disons $A \cap (I' \times R) \subseteq I' \times (c,d)$, où $c, d \in R$.