# Corps ordonnés, corps réels clos, etc.

**Déf** Un anneau/corps totalement ordonné $R$ est un anneau/corps muni d'un ordre total ($\forall x,y\ x<y \vee y=x \vee y<x$ ; $\forall x,y,z\ x\leq y$ et $y\leq z \to x\leq z$) et compatible avec les opérations : (non $x<x$).

$x\leq y \to x+z\leq y+z$.

$0\leq x,\ 0\leq y \to 0\leq xy$.

On lui associe le cône positif $P=\{a \mid a\geq 0\}$, qui satisfait alors :

$P+P\subseteq P$

$P\times P\subseteq P$

$P\cap -P=\{0\}$

$P\cup -P=R$

**Déf** Cône pré-positif sur $R$ : $P+P\subseteq P$, $P\times P\subseteq P$, $-1\notin P$, $R^2\subseteq P$.
$\leadsto$ pré-ordre partiel. On peut avoir $P\cap -P\neq\{0\}$.

**Lemme 1** Soit $R$ un anneau, $P_0$ un cône pré-positif. Alors il existe $P\supseteq P_0$, cône pré-positif, tq $P\cap -P$ soit un idéal premier, et $P\cup\{-P\}=R$.

**Dém** Par Zorn, soit $P\supseteq P_0$ cône pré-positif maximal.

Claim : $\forall x\in R$ $Px\cap(1+P)=\emptyset$ ou $-Px\cap(1+P)=\emptyset$.

Sinon, soient $p_1,q_1,p_2,q_2\in P$ tels que $p_1x=1+q_1$, $-p_2x=1+q_2$. Alors $-p_1p_2x^2\in 1+P$, ie $-1=P+p_1p_2x^2$ #.

Soit $a\in R$, et supposons $Pa\cap(1+P)=\emptyset$. Posons $P'=P-Pa$.
Alors $P\subset P'$, $-a\in P'$, $P'+P'\subseteq P'$, $P'.P'\subseteq P'$. ($0\in P$)
Comme $Pa\cap(1+P)=\emptyset$, on a $-1\cap P'=\emptyset$
(Si $-1=p-qa$ alors $qa=1+p$)
Donc $P=P'$ par maximalité, i.e, $-a\in P$. $\leadsto P\cup\{-P\}=R$

Soit $J=P\cap -P$. C'est un idéal. Soient $a,b\in R$, $ab\in J$, $a\notin J$, $b\notin J$. Comme $-ab\in J$, on peut supposer $-a$ et $-b\notin P$.
Alors $Pa\cap(1+P)\neq\emptyset\neq Pb\cap(1+P)$ : $p_1a=1+q_1$, $p_2b=1+q_2$
[On a montré : $Pa\cap(1+P)=\emptyset\to -a\in P$] $\leadsto$ $p_1p_2ab\in 1+P$,

ie $-1 \in P - p_1p_2ab \subseteq P - J \subseteq P$ #.

<u>Cor2</u> Si $R$ est un corps, alors tout cône pré-positif peut être étendu à un cône positif.

<u>Cor3</u> Tt cône pré-positif $P_0$ d'un corps $F$ est l'$\cap$ des cônes positifs le contenant.

Pf Soit $a \notin P_0$ ; alors $P_0 a \cap (1+P_0) = \emptyset$ ($pa = 1+q$ $\rightarrow a = \frac{(q+1)p}{p^2} \in P_0$). Alors $P' = P_0 - P_0 a$ est un cône pré-positif, contenant $-a$. Donc $a \notin P'$.

<u>Remarque</u> Soit $S_F = \{$sommes de carrés$\}$.
Clos par $+$ et $\times$, et $S_F \setminus \{0\}$ : par $^{-1}$.
$(\sum a_i^2)^{-1} = \sum\left(\frac{a_i}{\sum a_i^2}\right)^2$.

<u>Déf</u> $F$ est formellement réel/ordonnable s'il peut être ordonné

<u>Thm4</u> Soit $F$ un corps. Sont équivalents ;

(a) $F$ est fr.

(b) $-1 \notin S_F$

(c) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \rightarrow a_i = 0 \ \forall i$

(d) $F \neq S_F$ et car$(F) \neq 2$.

Facile. $a = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + (-1)\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$.

Si car$(F) > 0$, alors $-1 \in S_F$.

Extension d'un ordre du corps F à un surcorps.

<u>Lemme 5.</u> Soient $F \subset F_1$ des corps. Alors un ordre sur F s'étend à un ordre sur $F_1$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a_1, \dots, a_n \in F^{>0}$, $\sum a_i x_i^2 = 0$ n'a pas de sol$^n$ non triviale dans $F_1$.

<u>Dém</u> $\rightarrow$ clair ; soit $P_0 = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2 \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in F^{>0}, b_i \in F_1 \}$.

Alors $P_0 + P_0 \subseteq P_0$, $P_0 \times P_0 \subseteq P_0$, $P_0 \cap -P_0 = \{0\}$.

<u>Lemme 6</u> Soit $F_1$ une ext$^n$ alg. de F de degré impair, et soient $a_1, \dots, a_n \in F^\times$. Si l'eq$^n$ $\sum a_i X_i^2 = 0$ a une sol$^n \neq \vec{0}$ dans $F_1$, elle en a une dans F.

<u>Dém</u> On écrit $F_1 = F(\alpha)$, et $g(X) \in F[X]$ le poly. minimal (unitaire) de $\alpha$ sur F. Soient $f_1(X), \dots, f_n(X) \in F[X]_{\leq 2m}$
$\deg(g) = 2m+1$ tels que $\sum a_i f_i(\alpha)^2 = 0$. Ops : $(f_1, \dots, f_n) = 1$.
Donc, il existe $h(X) \in F[X]$ tel que $\sum a_i f_i(X)^2 = g(X) h(X)$.
Alors $\deg(h) \leq 2m-1$. De plus, ops que $\deg_X \sum a_i f_i(X)^2$ est pair :
sinon les coefficients dominant des poly. de plus grand degré donnent une sol$^n$.
Soit $h_1$ un facteur premier de $h(X)$ de d° impair, et soit $F_2$ une ext$^n$ de F engendrée par une racine $\beta$ de $h_1(X) = 0$.
On a donc : $\sum a_i f_i(X)^2 = h_1(X) g(X) h_2(X)$, et $h_1(X)$ ne divise pas tous les $f_i(X)$. Donc l'eq$^n$ a une sol$^n$ non triviale dans $F_2$. Comme $\deg h_1(X)$ impair, on a une sol$^n$ non triviale dans $F_2$. OK par induction.

<u>Thm 7.</u> Soit P un cône positif du corps F. Alors P s'étend à un cône positif de $F_1$ dans les cas suivants :

(a) $F_1 = F(\sqrt{a})$, $a \in P$

(b) $F_1 = F(\alpha)$, $[F_1 : F]$ impair

Dém (b) est clair par les 2 lemmes précedents.

Pour (a) : Sppons $\sum a_i X_i^2 = 0$ a une sol$^n$ non triviale dans $F(\sqrt{a})$. On l'écrit $b_i + c_i\sqrt{a}$, et on obtient $(a_i \in P)$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2 + a a_i c_i^2 + \sqrt{a}\, d .$$

Comme P est un ordre, et les $a_i \in F^{>0}$, on a $b_i = c_i = 0 \ \forall i$.

Déf Un corps ordonné est max$^t$ ordonné, ssi il n'admet pas d'ext$^n$ alg. propre ordonnée.

Un corps F est réel clos si F est formellement réel, et n'admet pas d'ext$^n$ alg. propre qui soit formellement réelle (ie : si $F < F_1 \leq \bar{F}$, alors $S_{F_1} \ni -1$).

Rem Max$^t$ ordonné → tt élement positif est un carré.
→ l'ordre est unique.

Thm 8 Soit F un corps. Sont eq$^{ts}$ :

(1) F a un seul ordre et est max$^t$ ordonné

(2) F est réel clos

(3) $F^2$ est un cône positif de F et tt poly. de d° impair a une racine ds F

(4) $F(\sqrt{-1})$ est alg$^t$ clos, $F \neq F(\sqrt{-1})$.

Dém (1) → (2) : Soit P l'ordre de F. Alors $P = F^2$, $F^2 \cap -F^2 = \{0\}$, Si $F_1 \geq F$ est ordonnable, avec ordre $P_1 \supset P$ (néc$^t$, par ! de P) Donc $F_1 = F$.

(2) → (1) : clair : soit P un ordre sur F ; par la remarque, $P = F^2 \subset F_1$, et $F = F_1$.

(1) → (3) : clair par Thm 7 ; (3) → (4) : Soit $F_1$ une ext$^n$ alg. de F contenant $\sqrt{-1}$ et Galois sur F, $Gal(F_1/F) = G$. Si L est le ss-corps de $F_1$ fixé par un 2-Sylow de G, alors $[L:F]$ est impair, d'où $L = F$. Si $Gal(F_1/F(\sqrt{-1}))$ n'est pas trivial, il a un ssgpe d'indice 2, fixant un ss corps $F_2$ de $F_1$, de la forme $F(\sqrt{-1})(\sqrt{A})$.

Cependant, comme $F = F^2 \cup -F^2$, tout élément de $F(\sqrt{-1})$ est un carré : Si $(a+bi)^2 = (c+di)$, alors $b = d/2a$ et $a^2$ est une racine de $4X^2 - 4cX - d^2 = 0$, qui a une sol$^n$ ds F. (3)
Donc $F_2 = F_1$ et $F_1 \models ACF$. $(\Delta = 16c^2 + d^2)$

$(4) \to (2)$. $\forall c, d \in F \; \exists a, b \in F$ tq $(a+bi)^2 = (c+di)$.
$c = a^2 - b^2$, $d = 2ab$, et $c^2 + d^2 = (a^2 + b^2)^2 \in F^2$. Donc $S_F \subseteq F^2$, et $(-1) \notin S_F$, ie F formellement réel. Mais $F(\sqrt{-1})$ n'est pas f.r, et donc F est réel clos.