Variable sous-gaussiennes : d'espérance toujours nulle ?

* Si une variable S est telle que

$$(*) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \mathbb{E}[e^{\lambda S}] \leq e^{\lambda^2 v^2/2}$$

alors nécessairement, $\mathbb{E}[S] = 0$.

En effet, cf. Prop. 3 avec $K=1$: $\mathbb{E}[S] \leq 0$

Mais $-S$ vérifie encore $(*)$ donc, cf. Prop. 3 pour $-S$ et $K=1$:

$$\mathbb{E}[-S] \leq 0$$

Et au final : $\mathbb{E}[S] = 0$.

* Que se passe-t-il si l'on a seulement

$$(**) \qquad \forall \lambda > 0, \qquad \mathbb{E}[e^{\lambda S}] \leq e^{\lambda^2 v^2/2} \qquad ?$$

La Prop. 3 ~~avec~~ $K=1$ donne toujours $\mathbb{E}[S] \leq 0$.

Peut-on avoir mieux ?

Non, car $\forall \varepsilon > 0$, $S - \varepsilon$ vérifie toujours $(**)$

↳ Aucune chance que $(**)$ implique une espérance nulle, $\mathbb{E}[S] \leq 0$ est le <u>mieux</u> qu'on puisse dire !