Exercice V : Prévision séquentielle avec budget (Gilles Stoltz)

On considère un ensemble d'observations $\mathcal{Y}$, un ensemble de prévisions $\mathcal{X}$ et une fonction de perte $\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [0, M]$, où M est une quantité connue. On suppose de plus que $\mathcal{X}$ est convexe et que la fonction de perte est convexe en son premier argument (quelle que soit la valeur du second argument). On suppose que la suite des observations $y_1, y_2, \ldots$ est fixée à l'avance et n'est pas impactée par les prévisions. On se donne $N \geqslant 2$ experts, dont on note $f_{j,t} \in \mathcal{X}$ la prévision fournie par le j–ème d'entre eux pour le tour t.

On se place dans le cadre suivant : le nombre de tours de jeu n étant connu et fixé à l'avance, le statisticien dispose d'un budget de m observations : il peut, à l'issue d'au plus m tours de prévision (qu'il choisit lui-même) et uniquement à la fin de ceux-ci, demander à voir la valeur de y_t. Aux $n - m$ ou plus autres tours de jeu, il reste dans l'ignorance de la valeur de y_t et ne peut voir si sa prévision a été ou non de bonne qualité.

L'objectif de l'exercice est de montrer que le regret peut malgré tout être rendu petit, sous certaines conditions. On prendra $m = n^{3/4}$ dans tout cet exercice, sauf dans la dernière question.

La stratégie du statisticien va s'appuyer sur une suite $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $\varepsilon > 0$ à préciser par l'analyse. Pour tout expert i et tout tour t, on note

$$\widetilde{\ell}_{i,t} = \frac{\ell(f_{i,t}, y_t)}{\varepsilon} Z_t \, .$$

(1) On cherche à choisir ε de telle sorte qu'avec probabilité au moins $1 - \delta/2$,

$$Z_1 + \ldots + Z_n \leqslant m \, .$$

En utilisant par exemple l'inégalité de Chebyshev–Markov [1], montrer que le choix

$$\varepsilon = \frac{m}{n} - \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2m}{\delta}}$$

convient, lorsque $\delta \geqslant 2/m$.

(2) Expliciter une stratégie de prévision séquentielle, affectant le poids $p_{j,t}$ à l'expert j au tour t, telle que

$$\sum_{t=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} p_{i,t} \widetilde{\ell}_{i,t} - \min_{j=1,\ldots,N} \sum_{t=1}^{n} \widetilde{\ell}_{j,t} \leqslant \square \sqrt{n \ln N} \, ,$$

où l'on donnera une expression explicite de la constante $\square$ en fonction des paramètres du problème et de la stratégie.

1. On rappelle qu'elle énonce que pour toute variable aléatoire X, d'espérance et variance respectivement notées $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$,

$$\mathbb{P}\Big\{ \big| X - \mathbb{E}[X] \big| > \varepsilon \Big\} \leqslant \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \, ,$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

(3) Préciser une filtration $(\mathcal{F}_t)$ telle que les poids $p_{j,t}$ soient $\mathcal{F}_{t-1}$–mesurables pour tout t et que

$$\mathbb{E}\Big[\widetilde{\ell}_{j,t} \;\Big|\; \mathcal{F}_{t-1}\Big] = \ell(f_{j,t}, y_t)$$

pour tout expert i et tout tour t. En déduire la valeur de

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} p_{i,t}\widetilde{\ell}_{i,t} \;\middle|\; \mathcal{F}_{t-1}\right].$$

(4) Montrer alors que la stratégie de la question (2) est telle qu'avec probabilité au moins $1-\delta/2$, le regret est contrôlé selon

$$\sum_{t=1}^{n} \ell\left(\sum_{i=1}^{N} p_{i,t} f_{i,t},\, y_t\right) - \min_{j=1,\dots,N} \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t) \leqslant \Box \sqrt{n \ln N} + 2\,\Box \sqrt{n \ln \frac{2(N+1)}{\delta}}\,,$$

pour la même constante $\Box$ qu'à la question (2).

(5) Conclure qu'avec probabilité au moins $1-\delta$, la stratégie construite ci-dessus respecte les contraintes de budget et majore le regret par

$$3\,\Box \sqrt{n \ln \frac{2(N+1)}{\delta}}\,.$$

Quel est l'ordre de grandeur de la borne obtenue, en termes de n ? (Est-ce un $o(n)$?)

(6) *Question facultative* : Pensez-vous que la borne obtenue soit optimale ? Le cas échéant, avez-vous une idée de ce que serait la dépendance de la borne optimale en n et m ? (On rappelle que dans cette question, et dans cette question seulement, m n'est plus pris égal à $n^{3/4}$.)