Gilles Stoltz

Chargé de recherche CNRS
à l'Ecole normale supérieure, Paris

Professeur affilié à HEC Paris

Apprentissage statistique

Série de cours sur la prévision séquentielle avec avis d'experts

Cours 2 / 2

Agrégation non convexe des avis d'experts
Applications à des données réelles

Coordonnées : stoltz@math.ens.fr --- http://www.math.ens.fr/~stoltz/

RAPPEL DES CADRES ÉTUDIÉS

Avec avis d'experts

$\mathcal{X}$ convexe, $\mathcal{Y}$ arbitraire

$\ell : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to [m, M]$ convexe en son premier argument

Pour $t = 1, 2, \dots n$:

- Les experts prévoient $f_{jt} \in \mathcal{X}$, pour $j = 1, \dots N$
- Le statisticien choisit $p_t \in \Delta\{1..N\}$ et forme la prévision
$$\hat{y}_t = \sum_{j=1}^{N} p_{jt} f_{jt}$$
- L'environnement choisit, éventuellement au vu de p_t et des f_{jt}, l'observation $y_t \in \mathcal{Y}$
- Le statisticien subit la perte $\ell(\hat{y}_t, y)$

<u>Objectif</u> Assurer que le regret
$$R_n = \sum_{t=1}^{n} \ell(\hat{y}_t, y_t) - \min_{j=1..N} \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{jt}, y_t)$$
est petit.

<u>Rq</u>: C'est un objectif simplifié, on peut également contrôler
$$R_n^{conv} = \sum_{t=1}^{n} \ell(\hat{y}_t, y_t) - \inf_{q \in \Delta\{1..N\}} \sum_{t=1}^{n} \ell\Big(\sum_j q_j f_{jt}, y_t\Big)$$

Cadre générique

Vecteurs de pertes à choisir dans $[m, M]^N$

Pour $t = 1, 2, \dots n$:

- Le statisticien choisit $p_t \in \Delta\{1, \dots N\}$
- L'environnement choisit $\ell_t \in [m, M]^N$, le vecteur de pertes, éventuellement au vu de p_t
- Le statisticien subit la perte $\sum_j p_{jt} \ell_{jt}$

<u>Objectif</u> : Assurer que le regret
$$R_n = \sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} p_{jt} \ell_{jt} - \min_{i=1,..N} \sum_{t=1}^{n} \ell_{it}$$
est petit.

<u>Rq</u>: En particulier, on peut réduire le cadre convexe aux avis d'experts au présent cadre générique.

Méthode (pour l'objectif simplifié) :

Par convexité des $\ell(\cdot, y)$ $\forall y$, on majore

$$R_n \leq \sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} p_{jt}\, \ell(f_{jt}, y_t) - \min_{i=1,\dots,N} \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{it}, y_t) = \sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} p_{jt}\, \ell_{jt} - \min_{i=1,\dots,N} \sum_{t=1}^{n} \ell_{it}$$

où l'on a posé

$$\ell_{jt} = \ell(f_{jt}, y_t)$$

Cela permet donc de fusionner le traitement des deux cadres

Algorithme :

$$p_{jt} = e^{-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell_{js}} \Big/ \sum_{k=1}^{N} e^{-\eta \sum_{s=1}^{t-1} \ell_{ks}} \quad \text{pour } t \geq 1 \quad (p_{j1} = 1/N)$$

Th :

$$R_n^* = \sup_{\substack{\ell_1 \dots \ell_n \\ \text{ou strat.}}} R_n \underset{\forall \eta > 0}{\leq} \frac{\ln N}{\eta} + \frac{\eta}{8}(M-m)^2 \underset{\text{pour } \eta^* = \frac{1}{M-m}\sqrt{\frac{8 \ln N}{n}}}{=} (M-m)\sqrt{\frac{n}{2} \ln N}$$

Rq : Si n est inconnu à l'avance ou est destiné à tendre vers $+\infty$, ce choix de η^* ne convient plus ; mais on peut recourir à une suite $(\eta_t)_t$ décroissante, p. ex. (cf. calculs de la séance précédente) :

$$\eta_t = \frac{1}{M-m}\sqrt{\frac{4 \ln N}{t}}$$

qui conduit à :

$$\forall n, \quad \sup R_n \leq (M-m)\sqrt{(n+1) \ln N}.$$

Question de la semaine. Que faire (dans le cas avec avis d'experts) si $\mathcal{X}$ n'est pas convexe ? On ne peut plus agréger les f_{jt} pour construire $\hat{y}_t$ ...

Ex: – $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0,1\}$

– $\mathcal{X} = \{$ haut, bas, gauche, droite $\}$, déplacement dans $\mathbb{Z}^2$: il faut vraiment choisir une direction, on ne peut pas agréger et partir dans le décor !

Solution: Randomiser permet de convexifier (et même de linéariser !) :
Le statisticien choisit une probabilité p_t sur $\{1,\dots N\}$ (on notera encore $p_t \in \Delta\{1..N\}$), et tire indépendamment l'indice $I_t \in \{1,..N\}$ d'un expert selon p_t, pour au final utiliser la prévision (aléatoire)

$$\hat{y}_t = f_{I_t,t}.$$

Son regret est alors
$$R_n = \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{I_t,t}, y_t) - \min_{j=1..N} \sum_{t=1}^{n} \ell(f_{j,t}, y_t)$$

(Avec les notations du cadre générique)
$$= \sum_{t=1}^{n} \ell_{I_t,t} - \min_{j=1..N} \sum_{t=1}^{n} \ell_{j,t}$$

Déroulement (générique): Pour $t = 1,2 \dots n$:

1. Le statisticien choisit $p_t \in \Delta\{1,\dots N\}$ et tire $I_t \in \{1,\dots N\}$ selon p_t
2. L'environnement choisit $\underline{\ell}_t \in [m,M]^N$, éventuellement au vu de p_t mais pas de I_t
3. Le statisticien subit la perte $\ell_{I_t,t}$.

Objectif: Assurer que le regret $R_n = \sum_{t=1}^{n} \ell_{I_t,t} - \min_{j=1..N} \sum_{t=1}^{n} \ell_{j,t}$ est petit,

en espérance ou en grande probabilité, quelle que soit la stratégie de l'environnement.

Rq: L'environnement (et le statisticien) fondent leurs choix de $\underline{\ell}_t$ et p_t sur le passé, i.e., sur les triplets $(\underline{\ell}_s, p_s, I_s)$ pour $s \leq t-1$, de sorte que les ℓ_t (et donc aussi les p_t) sont des variables aléatoires.

Rq: Il est évidemment crucial dans le déroulement que l'environnement n'ait pas accès à I_t pour choisir ℓ_t ! Mais il peut, comme toujours, observer p_t.

Méthode :

$$R_n = \underbrace{\sum_{t=1}^{n} \ell_{I_t,t} - \sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} p_{jt}\ell_{jt}}_{\Delta_n \to \text{ une martingale}} + \underbrace{\sum_{t=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} p_{jt}\ell_{jt} - \min_{i=1\ldots N}\sum_{t=1}^{n}\ell_{it}}_{\overline{R}_n}$$

$\overline{R}_n$, qu'on peut borner par $\square(M-m)\sqrt{n\ln N}$ avec l'algorithme exponentiel.

Il ne reste donc qu'à savoir contrôler Δ_n.

Convention : $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ tribu triviale

On note $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma\left(\left(\ell_s, p_s, I_s\right)_{s\leq t-1}\right)$ l'information disponible au début du tour $t-1$

Alors p_t et ℓ_t sont $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurables ; et comme les I_t sont tirés indépendamment au hasard :

$$\mathbb{E}\left[\ell_{I_t,t} \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] = \sum_{j=1}^{N} p_{jt}\ell_{jt}$$

On a donc que (Δ_t) est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.

Déf / Prop.

Les $X_t = \ell_{I_t,t} - \sum_{j=1}^{N} p_{jt}\ell_{jt}$ sont appelés des accroissements de martingale : $\Delta_n = \sum_{t=1}^{n} X_t$, où $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = 0$

Toute somme d'accroissements de martingale forme une martingale et réciproquement, toute martingale peut être décomposée en une somme d'accroissements de martingale.

L'inégalité-clé est la suivante.

__Lemme__ [Inégalité de Hoeffding – Azuma]

Soit (X_t) une suite de variable aléatoires $(\mathcal{F}_t)$ – adaptées et bornées : $a_t \leq X_t \leq b_t$ ps pour des réels (a_t) et (b_t). Alors

[Version "probabiliste"] $\forall \varepsilon > 0$, $\underline{\mathbb{P}}\left\{ \sum_{t=1}^{n} X_t - \sum_{t=1}^{n} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] \geq \varepsilon \right\} \leq e^{-2\varepsilon^2 / \sum_{t=1}^{n} (b_t - a_t)^2}$

[Version "statistique"] $\forall \delta > 0$, avec probabilité au moins $1-\delta$:

$$\sum_{t=1}^{n} X_t - \sum_{t=1}^{n} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] \leq \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n} (b_t - a_t)^2}{2} \ln \frac{1}{\delta}}$$

<u>Application</u>

On a $R_n \leq \square (M-m)\sqrt{n \ln N} + \Delta_n$

où $\Delta_n = \sum_{t=1}^{n} X_t - \sum_{t=1}^{n} \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}]$

$= \sum_{t=1}^{n} \ell_{I_t,t} - \sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{N} p_{jt}\ell_{jt}$

soit $b_t = M$, $a_t = m$

et donc : $\forall n$, avec probabilité $1-\delta$, $\Delta_n \leq (M-m)\sqrt{\frac{n}{2}\ln\frac{1}{\delta}}$

(par rapport à la randomisation auxiliaire du statisticien)

Au final :

$\forall n$, avec probabilité $1-\delta_n$, $R_n \leq \square (M-m)\sqrt{n \ln N} + (M-m)\sqrt{\frac{n}{2}\ln\frac{1}{\delta_n}}$

Par Borel-Cantelli, avec $\delta_n = 1/n^2$ p.ex.,

$\left\{ \begin{array}{l} \forall \ell_1, \ell_2, \dots \\ \forall \text{ stratégie de l'environnement} \end{array} \right\}$ $\overline{\lim} \dfrac{R_n}{(M-m)\sqrt{n \ln n}} \leq 1$ ps (par rapport à la rando. aux. du stat.)

(et donc en particulier : $\overline{\lim} \dfrac{R_n}{n} \leq 0$ ps)

<u>Rq</u> / <u>Exercice</u> : En utilisant une version maximale de Hoeffding-Azuma (obtenue en appliquant l'inégalité de Doob au moment de Markov-Chernoff, à la sous-martingale $(\varphi_{X_1 \dots X_n}(s))_{n \geq 1}$) :

Avec proba $1-\delta$, $\max_{t \leq n} \Delta_t \leq (M-m)\sqrt{\frac{n}{2}\ln\frac{1}{\delta}}$

Ainsi, en considérant des régimes constitués des temps $[2^r - 1 ; 2^{r+1}]$ pour $r = 1, 2, \dots$ et en prenant $\delta_r = 1/r^2$ afin d'appliquer Borel-Cantelli, il vient :

$\left\{ \begin{array}{l} \forall \ell_1, \ell_2, \dots \\ \forall \text{ stratégie de l'environnement,} \end{array} \right\}$ $\overline{\lim} \dfrac{R_n}{\square (M-m)\sqrt{n \ln \ln n}} \leq 1$ ps

↪ Un résultat à rapprocher de la loi du logarithme itéré.