Kamron Saniee 27 2 2012

Illustration de l'inégalité de Hoeffding

On tire n=100 variables X_i uniformément distribuées dans $(i,2i)$, et vérifie si l'inégalité de Hoeffding est satisfaite sur 1000 tirages pour chaque des 500 valeurs de delta simulées.

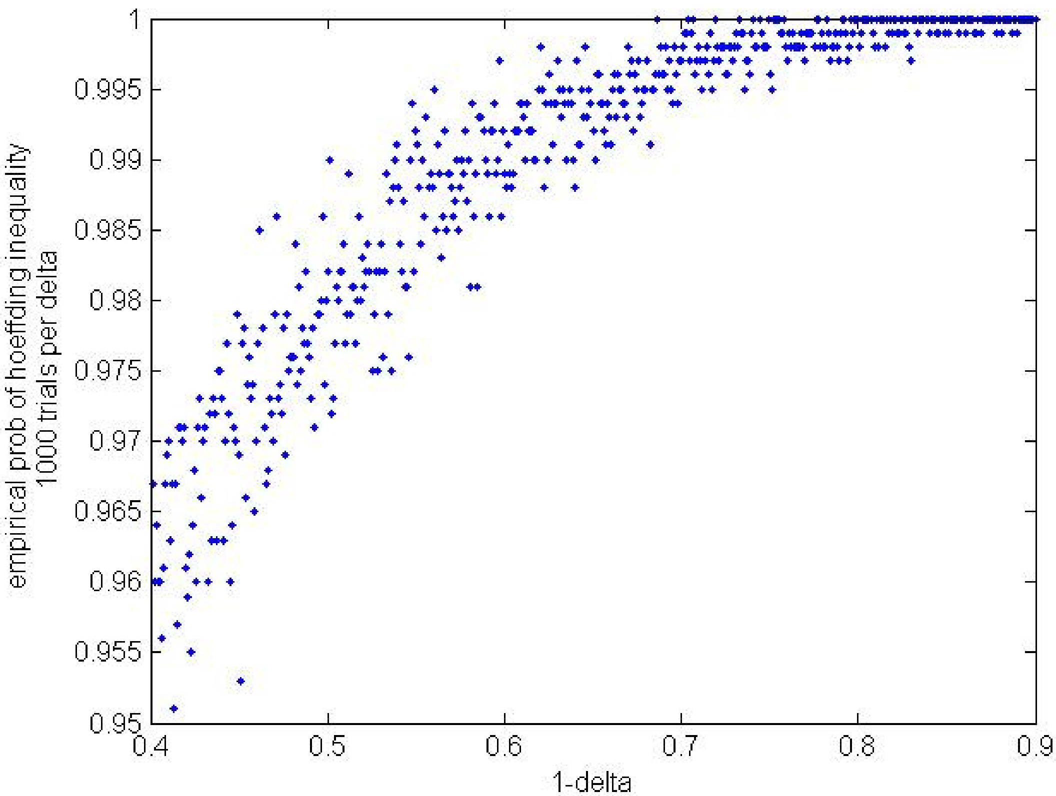


Fig 1 : L'inégalité nous dit qu'avec probabilité au moins 1-delta, la somme des espérances des X_i plus un terme sera plus grande que la somme des X_i. Ici figurent les fréquences relatives où est satisfaite l'inégalité sur 1000 tirages pour chaque delta, contre la borne théorique 1-delta.

Ci-dessus, les probas empiriques semblent considérablement plus grandes que la borne théorique ; ceci est illustré en superposant avec le graphe de 1-delta.

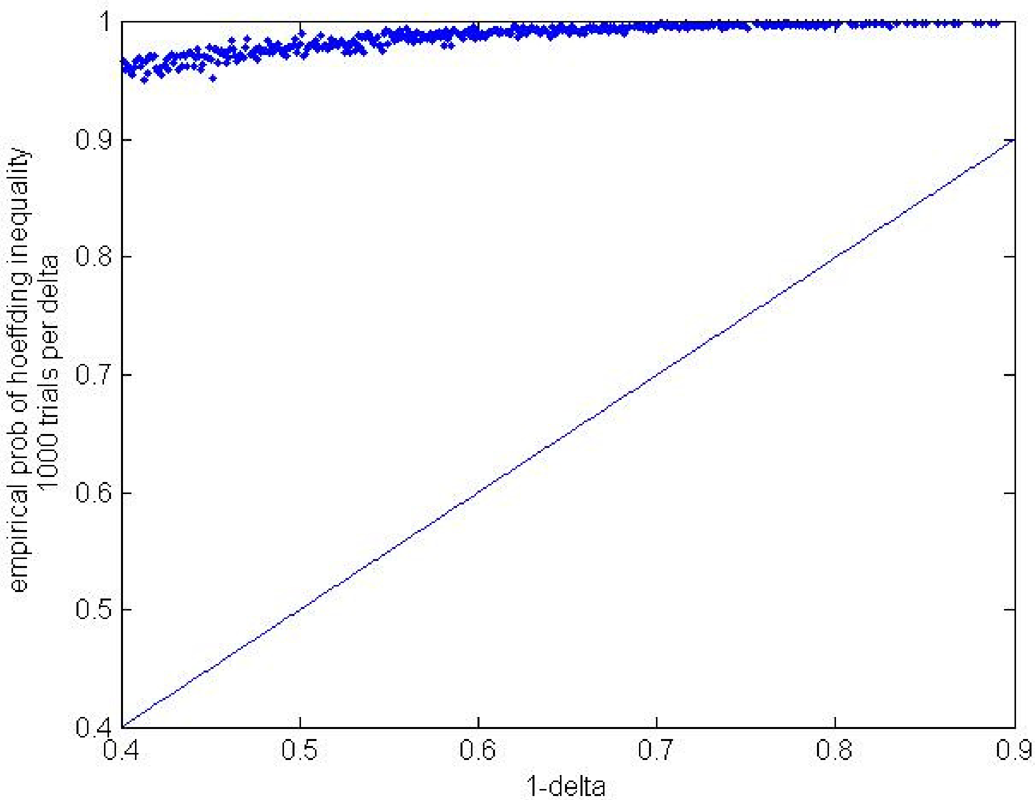
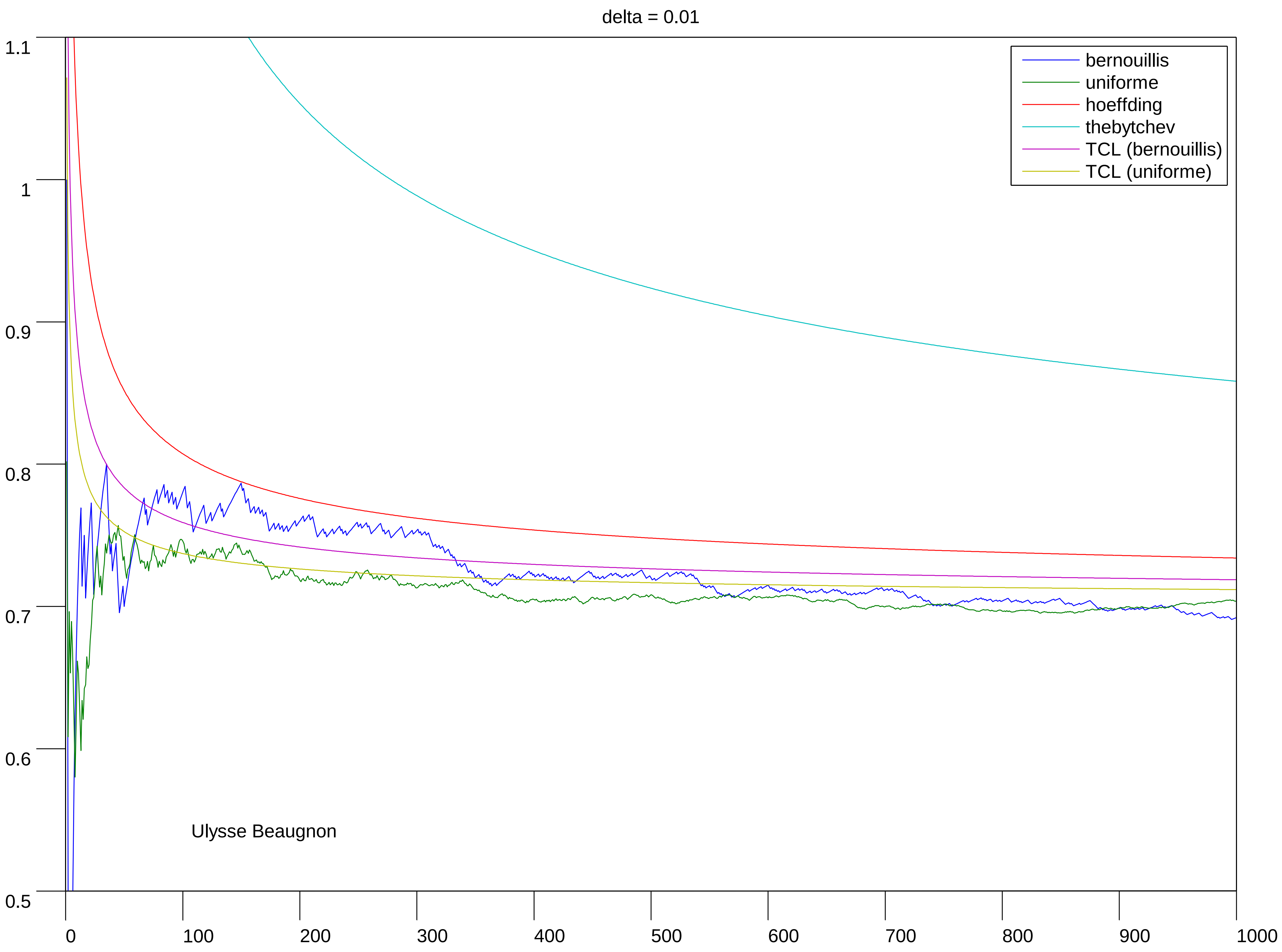


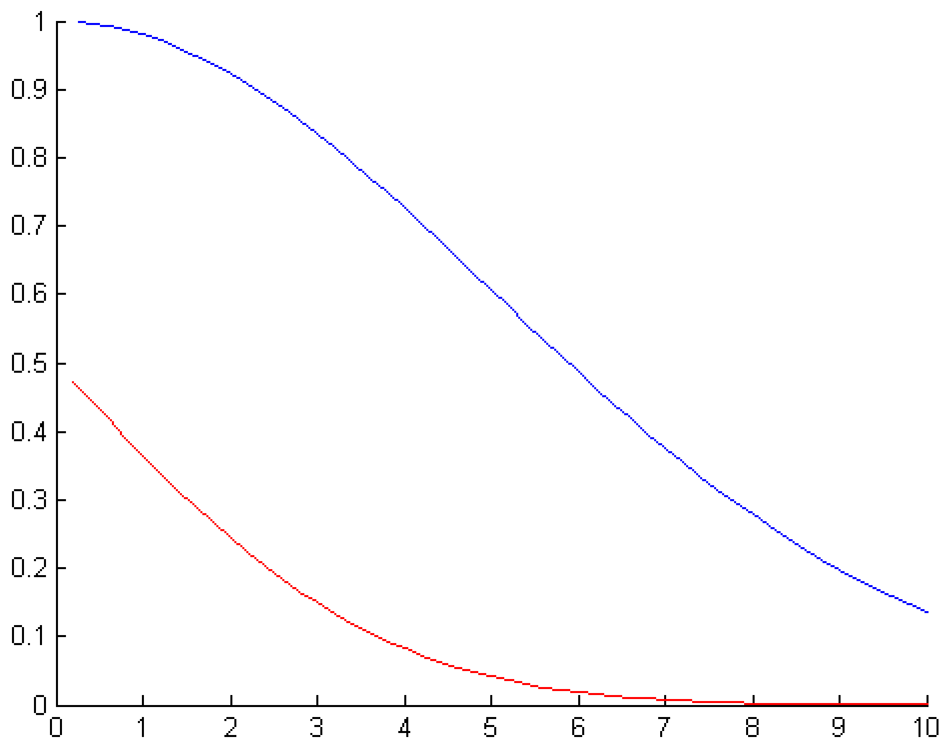
Fig 2 : Ecart entre les probas empiriques et 1-delta.

Code (Matlab) :

```
function [ prob ] = prob_hoeff( N,n,delta )
%UNTITLED Summary of this function goes here
%   N=#trials, n=#number of summands, 1-delta=confidence desired.
for I=1:N
    for i=1:n
        h(i)=i+i*rand;
        esp(i)=i+i/2;
        width(i)=i;
    end

    window=sqrt((1/2)*sum(width.*width)*log(1/delta)); %Hoeffding
inequality window

    H(I)=window+sum(esp)-sum(h); %Test inequality

end
prob=length(find(H>0))/N; %Empirical probability of satisfying
inequality

end
```


delta = 0.01
bernouillis
uniforme
hoeffding
thebytchev
TCL (bernouillis)
TCL (uniforme)
Ulysse Beaugnon
1.1
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

Courbes de Ismael Belghiti



On veut ici illustrer la version **probabiliste** de l'inégalité de Hoeffding.

On affiche en fonction de Epsilon, la probabilité (calculée expérimentalement) d'avoir une somme supérieure à l'espérance augmentée de Epsilon (courbe rouge).
On a pris 100 variables aléatoires avec une loi uniforme sur $[0,1]$

La courbe bleue correspond à la majoration de Hoeffding .

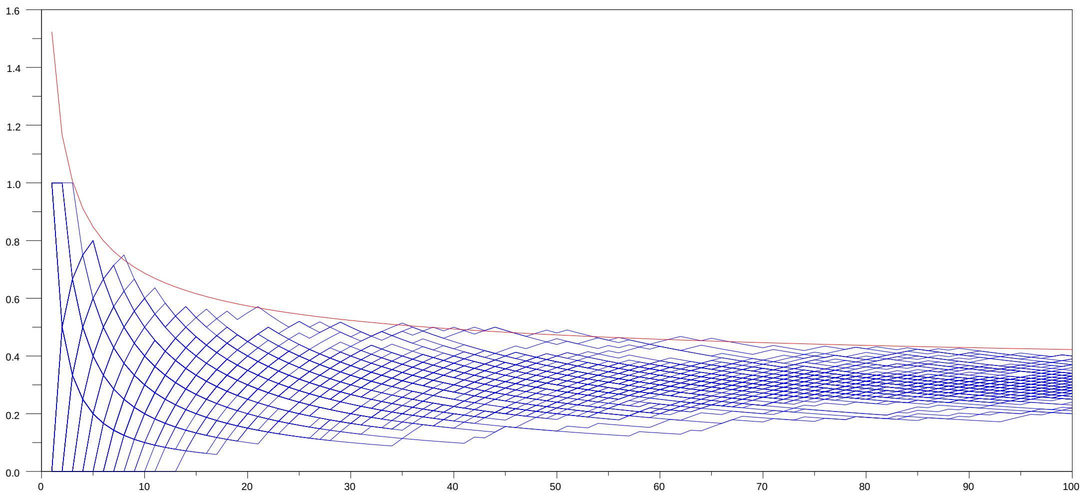
Illustration de la borne de Hoeffding

Rémi Varloot

30/02/2012

Borne de Hoeffding pour une loi de Bernouilli

```
a = 0;
b = 1;
n = 100;
d = 0.05;
m = 0.3;

for i = 1:100
    H = rand(1:n) < m;
    M = cumsum(H) ./ (1:n);
    plot(M);
end;

B = m+(b-a)*sqrt(0.5*log(1/d)./(1:n));

plot(B,"r");
```



Borne de Hoeffding pour une loi uniforme

```
a = 0;
b = 1;
n = 100;
d = 0.05;
m = (a+b)/2;

for i = 1:100
    H = rand(1:n)*(b-a)+a;
    M = cumsum(H) ./ (1:n);
    plot(M);
end;

B = m+(b-a)*sqrt(0.5*log(1/d)./(1:n));

plot(B,"r");
```

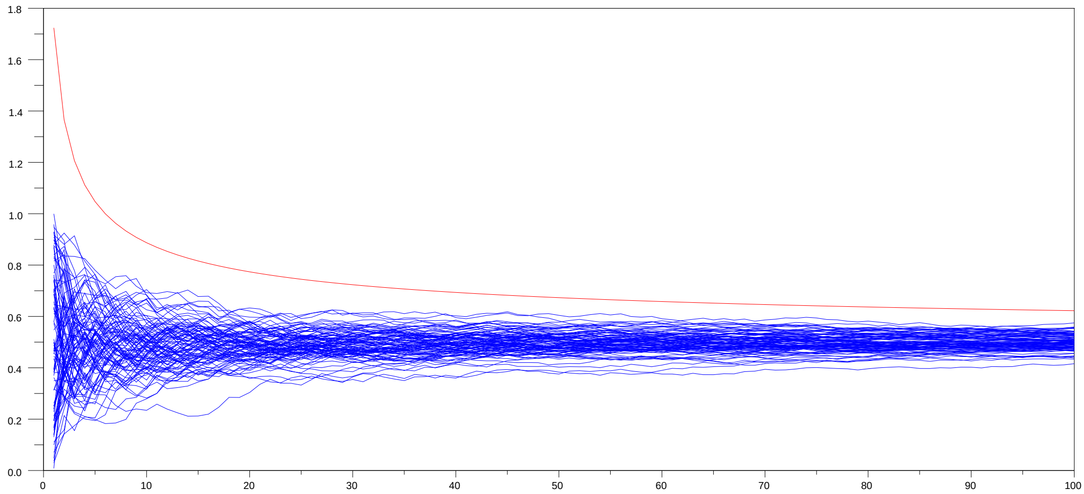


Illustration de l'inégalité de Hoeffding

WOLINSKI Pierre

29 février 2012

J'ai illustré l'inégalité de Hoeffding (version statistique) avec des variables aléatoires de loi de Bernoulli et de loi uniforme (sur $[0, 1]$).

Les graphes ci-joints représentent la probabilité avec laquelle l'inégalité est vérifiée en fonction du δ qui apparaît dans l'inégalité.

La courbe en bleu représente le résultat de la simulation, celle en vert représente le résultat théorique dans le pire des cas.

Les paramètres intéressants sont :

- p : paramètre de Bernoulli ;
- N : nombre de variables aléatoires tirées.

P n'est que le nombre de simulations réalisées pour estimer la probabilité avec laquelle l'inégalité est vérifiée.

On remarque que, dans tous les cas traités, la courbe expérimentale est au-dessus de la courbe théorique, ce qui confirme le théorème de Hoeffding : l'inégalité est bien vraie avec *au moins* une probabilité $1 - \delta$ (résultat théorique dans le pire des cas).

Par ailleurs, les résultats sont bien meilleurs avec une loi uniforme qu'avec une loi de Bernoulli.

Code pour l'illustration de l'inégalité avec une loi de Bernoulli :

```
function Ret=Bernoulli(p)
    Ret=0;
    if rand<=p
        Ret=1;
    end
endfunction

function Ret=MoyNBernoulli(p,N)
    Ret=0;
for k=1:N
        Ret+=Bernoulli(p);
    end
    Ret/=N;
endfunction

function Ret=ProbaBernoulli(p,N,d,P)
    Ret=0;
    for k=1:P
        if MoyNBernoulli(p,N)<p+sqrt(log(1/d)/(2*N))
            Ret+=1;
        end
    end
    Ret/=P;
endfunction
```

```
function Ret=VectProbaBernoulli(p,N,P,d1,dd,d2)
    Ret=d1:dd:d2;
    k=1;
    for d=d1:dd:d2
        Ret(k)=ProbaBernoulli(p,N,d,P);
        k+=1;
    end
endfunction

function Ret=VectProbaBernoulliTheo(p,N,d1,dd,d2)
    Ret=d1:dd:d2;
    k=1;
    for d=d1:dd:d2
        Ret(k)=1-d;
        k+=1;
    end
endfunction

function Ret=VectX(d1,dd,d2)
    Ret=d1:dd:d2;
endfunction

function Ret=PlotBernoulli(p,N,P,d1,dd,d2)
    Ret=0;
    plot(VectX(d1,dd,d2),[VectProbaBernoulli(p,N,P,d1,dd,d2);VectProbaBernoulliTheo(p,N,d1,dd,d2)]);
endfunction
```

Le code pour l'illustration de l'inégalité avec la loi uniforme sur $[0, 1]$ est identique, au changement de loi près.

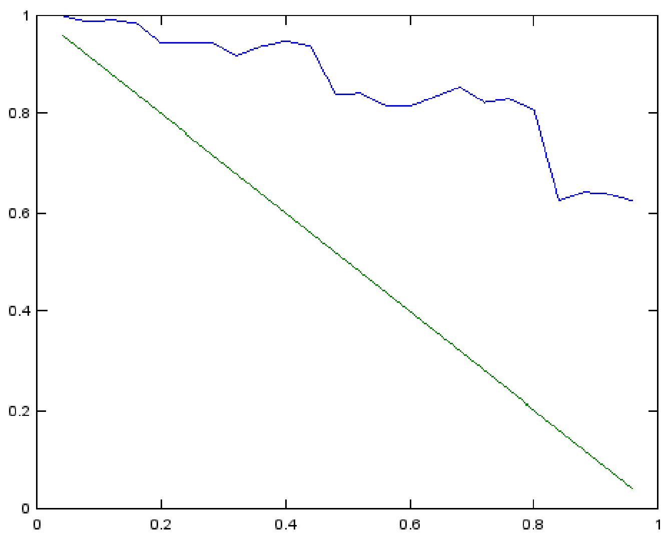


FIGURE 1 – Loi de Bernoulli : $p = 0.5$; $N = 10$; $P = 1000$

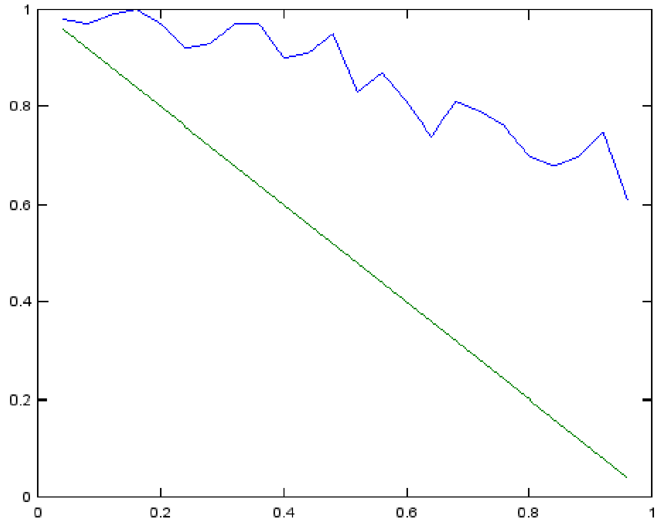


FIGURE 2 – Loi de Bernoulli : $p = 0.5$; $N = 100$; $P = 100$

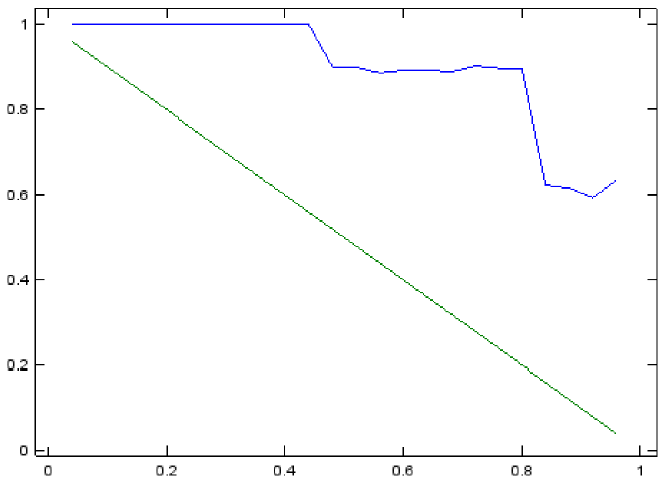


FIGURE 3 – Loi de Bernoulli : $p = 0.8$; $N = 10$; $P = 1000$

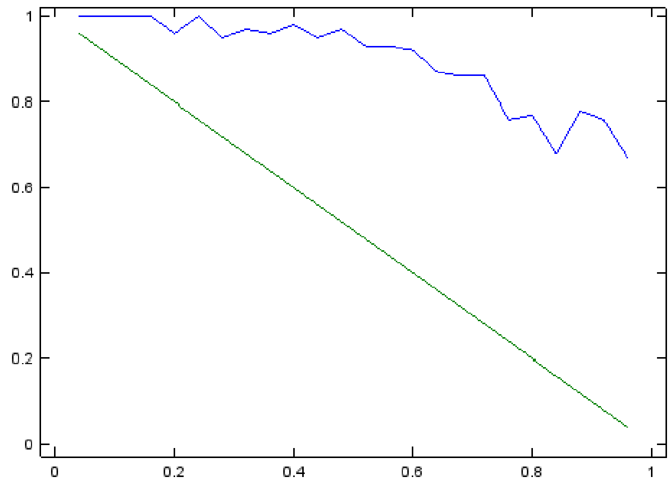


FIGURE 4 – Loi de Bernoulli : $p = 0.8$; $N = 100$; $P = 100$

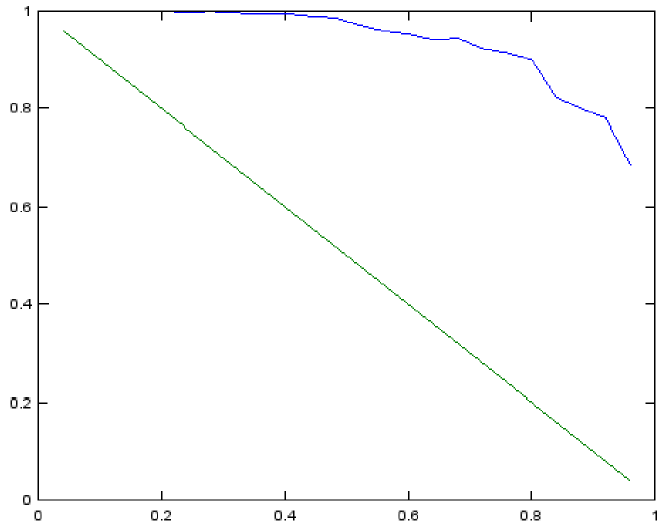


FIGURE 5 – Loi uniforme : $N = 10$; $P = 1000$

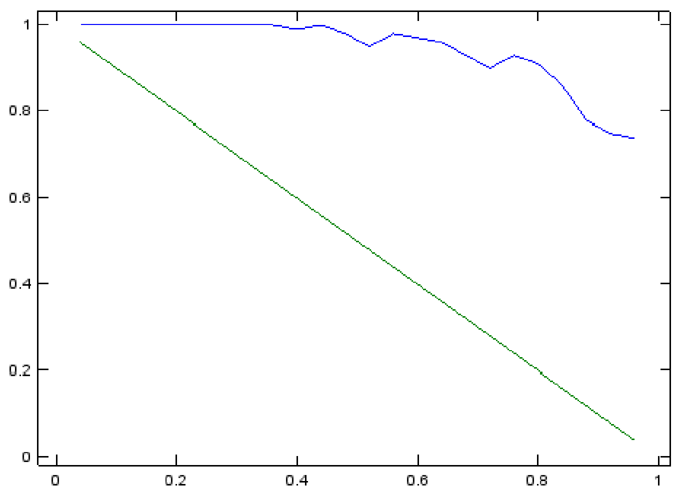
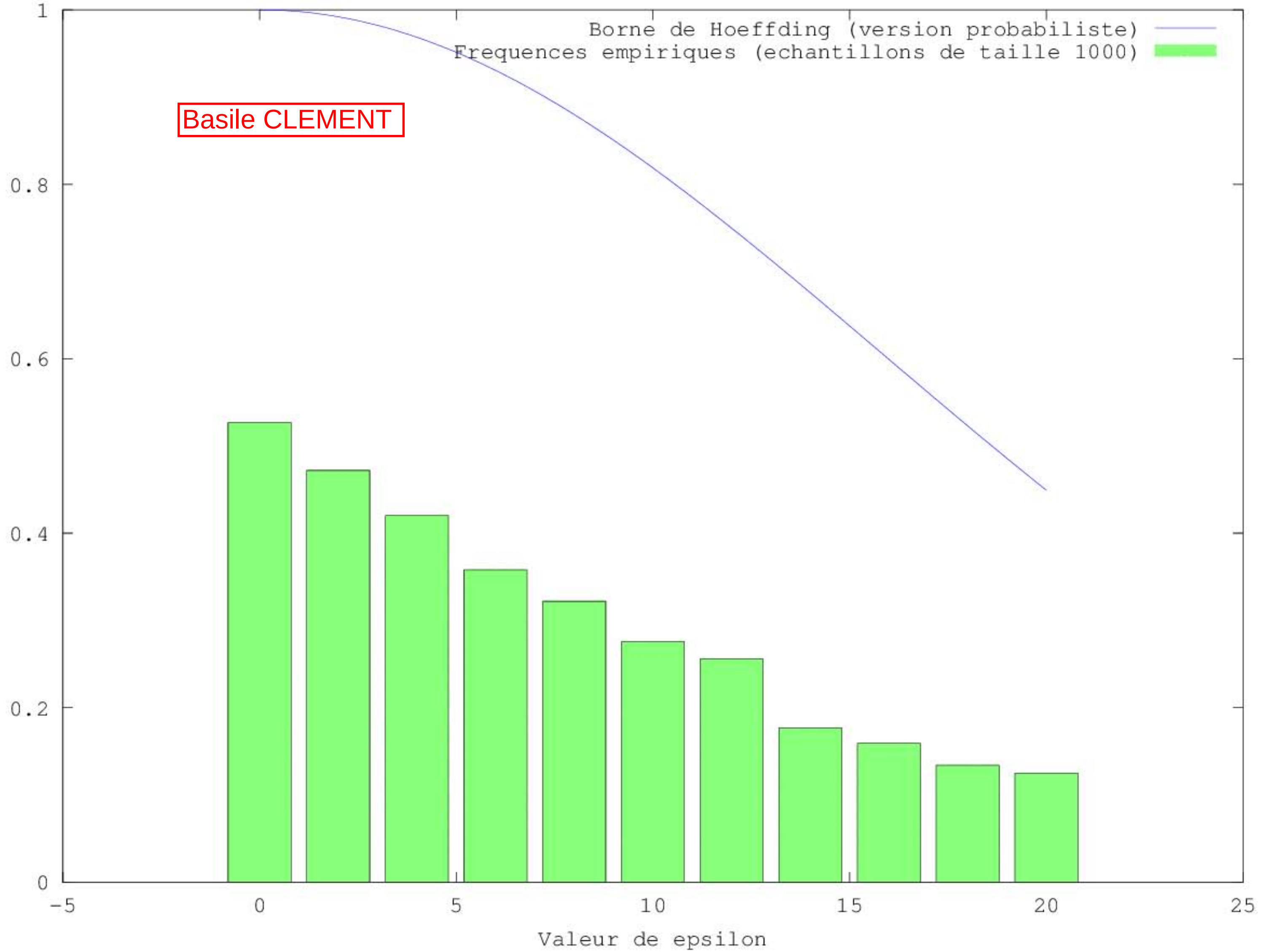
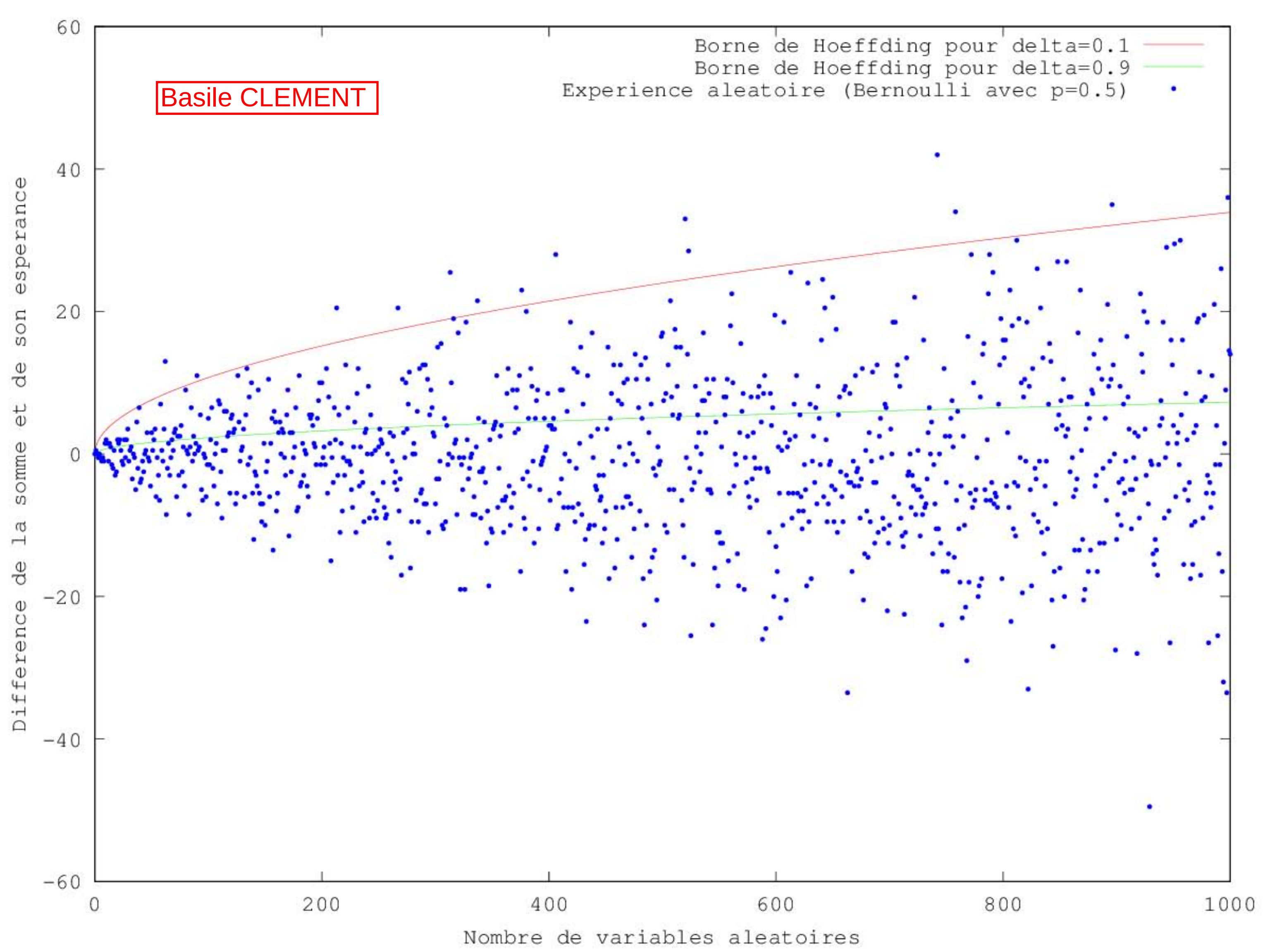


FIGURE 6 – Loi uniforme : $N = 100$; $P = 100$



Borne de Hoeffding (version probabiliste)
Frequences empiriques (echantillons de taille 1000)
Basile CLEMENT
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-5
0
5
10
15
20
25
Valeur de epsilon


Borne de Hoeffding pour delta=0.1
Borne de Hoeffding pour delta=0.9
Experience aleatoire (Bernoulli avec p=0.5)
Basile CLEMENT
Difference de la somme et de son esperance
Nombre de variables aleatoires
60
40
20
0
-20
-40
-60
0
200
400
600
800
1000