TD 3 : ANALYSE CONVEXE

COURS D'APPRENTISSAGE, ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PRINTEMPS 2013

Rémi Lajugie
remi.lajugie@ens.fr

Résumé. Ce TD a pour but de vous permettre de manipuler les notions de base de l'analyse convexe. On explorera les diverses notions vues en cours.

La plupart des exercices de ce TD sont inspirés du livre de Stephen Boyd "Convex Optimization". Ce livre est disponible gratuitement en pdf à l'adresse http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf**. Le livre est bien écrit, et sa lecture se suffit à lui même. Pour réviser la partie optimisation du cours, il peut être intéressant d'y jeter un coup d'oeil.**

1. Exercice 1 : Séparation de deux ensembles convexes

On considère deux ensembles convexes, compacts et disjoints de $\mathbb{R}^n$, C et D.
Montrez qu'il existe une séparation stricte de ces deux ensembles, i.e, qu'il existe un hyperplan séparant C et D. Indication : Commencez par considérer les points $(x, y) \in C \times D$ minimisant $\|x - y\|$.

2. Exercice : Convexité des fonctions usuelles

1) Montrez que $f(x, y) = x^2/y$ est convexe (précisez le domaine).

2) Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$, on considère la fonction indicatrice de C définie par $I_C(x) = 0$ si $x \in C$ et $+\infty$ sinon. Montrez que I_C est convexe.

3) Pour Q, une matrice symétrique on considère $\forall x \in \mathbb{R}^n, x^T Q x$, à quelle condition a-t-on convexité de cette fonction ?

4) Montrez que le supremum de fonctions convexes est toujours convexe, mais que ce n'est pas le cas pour l'infimum.

5) Pour un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{N}, r \leq n$, on considère la fonction $f(x) = \sum_{i=1}^{r} x_{[i]}$ où $x_{[i]}$ est la i-ème plus grande composante du vecteur x. Montrez que f est convexe. (indice : la question précédente peut servir...)

3. Exercice : Dualité Lagrangienne

Pour des vecteurs, on définit la relation d'ordre partiel $x \leq y$ si $x - y$ est dans l'orthant positif (en d'autres termes, si toutes les composantes de x sont plus petites que celles de y).

6) Soit $A \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b, h \in \mathbb{R}^n$. On considère un programme linéaire (LP) défini $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rc} \min & c^T x \\ \text{t.q} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Calculer son dual.

7) Soit S une matrice symétrique, α un réel et $b \in \mathbb{R}^n$. Dérivez un problème dual au primal suivant :

$$\begin{array}{rc} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & x^T Q x - 2b^T x \\ t.q & x^T x \leq \alpha \end{array}$$

Cet exemple est fameux dans la littérature d'optimisation car il est possible (quoique technique) de montrer que l'on a dualité forte même si le problème d'origine n'est pas convexe.

8) Dérivez un problème dual au problème combinatoire MaxCut défini par, étant donné une matrice $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\min_{x \in \{-1,1\}^n} x^T W x$$

Indice : on pourra commencer par écrire le fait que x vaille 1 ou -1 sous la forme d'une contrainte d'égalité quadratique (donc non convexe !).
Remarque : On peut démontrer que la solution de la relaxation convexe de MaxCut que vous venez de dériver est sous optimale au plus d'un facteur au plus $2/\pi$.

9) Soit $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ et $b_1, \ldots, b_m$ des réels. On considère la fonction f :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \max_{i=1,\ldots,m} a_i^T x + b_i.$$

En introduisant des variables auxiliaires $y_i = a_i^T x + b_i$ et en écrivant la minimisation de f comme un problème d'optimisation contraint, dérivez un problème dual.