LE *COMPENDY DE LA PRATICQUE DES NOMBRES*, UNE ARITHMETIQUE DU XV^{E} SIECLE A MI-CHEMIN ENTRE THEORIE ET PRATIQUE COMMERCIALE

Maryvonne Spiesser

Université Toulouse III

Version revue et corrigée de l'article paru dans *Commerce et Mathématiques du Moyen-Age à la renaissance, autour de la Méditerranée* (Actes du Colloque International du Centre International d'Histoire des Sciences Occitanes, 13- 16 mai 1999)

Paru sur le site Culture*MATH* le 5 mai 2006

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Le *Compendy de la praticque des nombres* est le second des quatre traités mathématiques composant le manuscrit répertorié S-XXVI-6 à la bibliothèque Malatestiana de Cesena, centre historique de la Romagne (voir photographies annexe 3). Construite dans la seconde partie du XV^{e} siècle, cette bibliothèque remarquable est l'un des exemples les plus anciens de bibliothèque monastique de la Renaissance. La salle où sont conservés les manuscrits est composéee de deux rangées de pupîtres et le manuscrit S-XXVI-6 occupe la sixième place du *pluteus* 26, dans la rangée de gauche (S de *Sinistra*). C'est un ouvrage sur papier, relié en peau de couleur sombre, long de 220 mm et large de 148 mm. Il comprend 353 feuilles numérotées postérieurement, dont 39 pages blanches à l'intérieur du texte. La qualité de la graphie, de l'ornementation et de la mise en page permet de penser que c'est l'œuvre d'un atelier d'écriture. La présentation est identique pour chaque traité. Les parties principales débutent par une lettrine ornée accompagnée d'une frise dans la marge. D'autres lettrines ornées moins importantes marquent le début des chapitres. Chaque page comporte entre trente et trente-six lignes d'une écriture cursive soignée, inscrite dans un cadre de justification de 160 mm sur 110 mm. Enfin, deux personnes ont participé à la copie.

Les deux premiers traités[1], le *Traicté de la praticque d'algorisme* (f. 7r-140v) et le *Compendy de la praticque des nombres* (f. 149v-268v) appartiennent à la famille des arithmétiques commerciales. Le troisième (*Speculative des nombres*, f. 269r-299v) est d'un genre totalement différent, celui de la tradition universitaire. Son objet est l'étude des propriétés des nombres entiers, intrinsèquement et dans leurs rapports mutuels. Le dernier (f. 300v-330r) est un *Traicté de la praticque de geometrie* suivi d'une *Composition du cadran*[2]. Tous ces traités sont écrits en français (ancien français tardif), excepté quelques pages en latin qui suivent la *Speculative des nombres* et reprennent l'essentiel de son contenu.

Le manuscrit, que nous nommerons désormais *Manuscrit de Cesena*, a été signalé par Warren van Egmond lors du colloque organisé à Oxford en 1984 pour le cinq centième anniversaire de la parution du *Triparty en la science des nombres* de Nicolas Chuquet[3]. Une première analyse a été faite par Jean Cassinet[4]. Elle montre l'importance de l'ouvrage en tant que « maillon essentiel de la transmission de l'algorisme au quinzième siècle[5] ».

Notre propos ne concerne que le second traité d'algorisme, le *Compendy de la praticque des nombres.* Bien que ce texte fasse pleinement partie du courant des arithmétiques dites marchandes, il s'en distingue aussi de manière frappante, par ses ambitions « théoriques » inhabituelles. Ces aspirations ne sont pas sans conséquences, tant au niveau des réflexions mathématiques nouvelles que des sources. C'est ce que nous nous proposons de développer dans les pages qui suivent.

---

[1] Les titres que nous donnons à ces traités sont extraits des premières lignes de chaque texte.

[2] J. Cassinet a découvert que ce texte était pratiquement identique à celui de la géométrie du Ms 1052, Nouvelles acquisitions françaises de la Bibliothèque Nationale de Paris (J. Cassinet, *Le manuscrit XXVI de Cesena…,* p. 281-82), considéré par Hervé L'Huillier comme une première version de la Géométrie de Chuquet. (H. L'Huillier, *Nicolas Chuquet. La géométrie…*, p. 9).

[3] Les actes sont édités par Cynthia Hay sous le titre : *Mathematics from Manuscript to Print*, Clarendon Press, Oxford, 1988. A propos de Barthélemy de Romans, W. Van Egmond écrit : « we are fortunate enough to possess a copy of one of his works in the important compilation made by Matthiew Préhoude in Lyons … ». (W. Van Egmond, *How Algebra came to France,* p. 135-136)

[4] J. Cassinet, le manuscrit XXVI de Cesena…

[5] Le texte a été édité dans M. Spiesser, *Une arithmétique commerciale du XV^e^ siècle, le* Compendy de la praticque des nombres *de Barthélemy de Romans.*

.

I – UNE ARITHMETIQUE INCLASSABLE

1 – Un Frère dominicain à l'origine du *Compendy*

Les quatre traités qui se succèdent dans le *Manuscrit de Cesena* n'y sont pas regroupés de manière arbitraire. Une étude comparative fine montre qu'un personnage est central dans cette œuvre, même si son nom n'apparaît que dans le *Compendy* : il s'agit d'un certain Barthélemy de Romans, frère Prêcheur. Seul le *Compendy* livre d'ailleurs des noms ; seul aussi le *Compendy* est daté : Mathieu Préhoude, clerc, achève à Lyon en 1476 la copie du traité dont la paternité revient à Barthélemy.

> *Je frere Bartholomieu de Romanis, predicateur, en avoye faict ung compendy de la pratique d'iceux en trois parties principalz, c'est assavoir ou nombre entier ou nombre roupt et quatre regles generalz pour les raisons. Pour donner plus grand clarté a l'entendement de ceulx qui ont ou auroient celluy compendy et auroient le precedant ouvrage*[6]*, […] ay fait la suyvant recollection de toutes les regles de celluy compendy, avec aucunes declarations et aucunes cautelles de decevre que l'on ne sache ou cognoisse l'on par quelle regle se doit faire la raison, pour ce que la maniere de proposer la question est diverse a celle du livre, et aucunes regles especiales,[mettant] chascune chose en l'ordre des chapitres et des regles selon le lieu en quoy deveroient estre si estoient ou livre ordonnees. Et commence ou nombre entier*[7]. *[f. 149rv]*

Barthélemy est reconnu comme théologien par Jehan Adam (1475) et Nicolas Chuquet (1484). Jehan Adam le cite[8] en 1475 parmi « *noz bons peres et saincts docteurs trespassez* » ; selon Chuquet, il est « *docteur en théologie, jadis de l'ordre des freres precheurs à Valence*[9] ». On apprend aussi dans les *Monumenta Ordinis Praedicatorum Historica* (MOPH)[10] qu'il a enseigné la Bible à Montpellier en 1435-36. Sur le plan mathématique, il est encensé par Jehan Adam, critiqué ponctuellement par Chuquet, à propos de deux exercices[11]. Quant à Mathieu Préhoude, il apparaît dans les registres des mandats de receveur de la ville de Romans[12], mais on ne sait rien de lui, sinon qu'il est

---

[6] Le Traicté de la praticque d'algorisme.

[7] Traduction (toutes les citations sont traduites en français moderne en note) : « Moi, frère Barthélemy de Romans, prédicateur, avais fait un petit traité de la pratique des nombres en trois parties principales, à savoir le nombre entier, le nombre rompu, et quatre règles générales pour les résolutions de problèmes. Pour éclairer le compréhension de ceux qui auraient ce traité ainsi que le précédent ouvrage, […] j'ai résumé dans ce qui suit toutes les règles du traité et donné certains éclaircissements et mises en garde lorsqu'on ne sait pas par quelle règle doit se faire le problème, parce que la manière d'exposer la question est différente de celle du livre, et aussi certaines règles, < en mettant > les choses dans l'ordre et dans le lieu où elles auraient dû être si elles avaient été ordonnées. »

[8] Jehan Adam, *Arismeticque,* f. 2v-3r et f. 13r.

[9].Première partie de l'appendice au *Triparty en la science des nombres*, f. 168v.

[10] Les *Monumenta* sont la « mémoire » de l'Ordre des Dominicains. M.O.P.H, tome VIII, 1900, p. 236.

[11] Appendice au *Triparty en la science des nombres*, f. 167v et f. 168v.

[12] D'après Martine Perrochet, La ville de Romans au milieu du XV^{e} siècle. Aspects institutionnels, économiques et sociaux, Thèse de l'Ecole des Chartes, Paris, 1974., p. 166.

clerc. A-t-il reçu l'enseignement de Barthélemy, à Romans ou ailleurs ? C'est une hypothèse plausible qui justifierait son intérêt pour le travail d'un maître. Une lecture attentive des trois arithmétiques du *Manuscrit de Cesena* permet d'avancer les conclusions suivantes : Barthélemy de Romans a écrit un traité d'algorisme vers le milieu du siècle, proche du *Traicté de la praticque d'algorisme*, qui a été remanié puis recopié par Préhoude une vingtaine d'années après ; c'est le *Compendy* que nous connaissons. D'autre part, Barthélemy est très probablement l'auteur de la *Speculative des nombres*, et si c'est bien le cas, il a enseigné un temps à Carcassonne. À la demande de ses élèves, il a écrit ce troisième texte afin d'éclairer certains points obscurs du *Compendy* concernant les proportions. Les trois arithmétiques sont donc intimement liées.

Ainsi, un lettré, qui manie la langue latine et connaît bien *l'Institution arithmétique* de Boèce, s'est intéressé à la formation des marchands. Ses activités l'ont mené de Lyon à Carcassonne, via la vallée du Rhône et Montpellier. Il occupait par ailleurs une position importante dans l'ordre des Dominicains, puisqu'il était Docteur en théologie et enseignait la Bible au *Studium generale* de Montpellier. Quelles peuvent être alors les raisons qui ont pu le pousser à s'intéresser aux mathématiques pour les marchands ? Ce n'est certes pas sa formation au sein de l'Ordre ou à l'Université s'il a suivi les cours de la faculté des Arts, qui en est responsable. L'engagement de Barthélemy de Romans apparaissant comme atypique, on peut alors se tourner vers les particularismes locaux et les intérêts individuels. Il est certain que si Barthélemy a passé sa jeunesse dans une ville commerçante comme Romans, il a côtoyé de futurs marchands et hommes d'affaires. C'est pourquoi l'intérêt qu'il porte à ce type de mathématique est peut-être le fruit d'une histoire personnelle. Quoi qu'il en soit, cet exemple associé à quelques rares autres cas rencontrés parmi les auteurs italiens de traités d'abbaque[13], montre une perméabilité entre le monde du commerce et celui des clercs, au niveau de l'enseignement.

Il paraît logique de penser que la formation et la culture de Barthélemy de Romans ont imprégné son œuvre. De quelle manière ? Comment le texte se démarque-t-il d'autres arithmétiques commerciales ?

2 – Deux lectures du *Compendy*

a) La structure apparente du traité

[13] Traités qui se sont développés en Italie depuis le XIVe siècle, destinés en premier lieu, mais pas exclusivement, aux futurs marchands et hommes d'affaires. Le contenu est fondé, contrairement à ce que pourrait supposer l'appellation, sur le système décimal indo-arabe et les pratiques opératoires associées à ce système.

La première lecture suit le découpage en parties et chapitres. Le traité comporte trois parties : les deux premières traitent des opérations, la troisième de la résolution de problèmes[14]. Dans la première partie sont enseignées la numération indo-arabe et les opérations sur les nombres entiers. La seconde est consacrée aux fractions (les *nombres rouptz*). Les opérations sont, dans l'ordre, l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'extraction des racines carrées et cubiques. À l'occasion de la multiplication sont données des formules de sommations de suites arithmétiques et géométriques. La recherche des racines carrées approchées est reportée entièrement dans la seconde partie. Toutes ces informations tiennent en dix-sept feuillets (de f. 149r à f. 165v). Puis, tout le reste du traité, soit plus de cent feuillets (de f. 165v à f. 268v), est consacré aux règles dites des *raisons*. Ce sont quatre règles de résolution de problèmes nommées règles de compagnie, d'une fausse position, de deux fausses positions, d'apposition et rémotion.

Un tel découpage n'est pas original[15]. Le premier texte actuellement connu qui suive un plan identique, avec un classement des problèmes sous quatre règles, est le *Compendi del art del algorisme*, traité anonyme écrit à Pamiers dans les premières décennies du siècle (c. 1420-1430)[16]. À ce jour, le texte de Pamiers apparaît comme fondateur d'un genre, qui s'est répandu au moins en Catalogne et dans le Sud de la France[17]. Chuquet structure aussi de cette manière la première partie du *Triparty.* En revanche, on ne retrouve pas cette homogénéité de construction dans les nombreux traités d'abbaque italiens, dont le contenu et la présentation sont beaucoup plus diversifiés[18].

b) L'originalité de la composition

Une deuxième lecture, plus fine, consiste à écouter ce que nous suggère l'auteur. Or, quelques lignes, au feuillet 185v, éclairent sur ses intentions. À la suite des problèmes résolus par la « première règle des compagnies », vient la conclusion suivante :

> *Et cestes raisons, avec celles qui sont au livre[19], suffisent pour entendre et veoir la praticque de la premiere regle des compaignyes, laquelle toute seule est au livre car des autres ne y a rien, car elles ne sont pas necessaires a marchants, pour lesquelz*

---

[14] Voir l'annexe 1, dans laquelle nous avons reconstitué une table des manières du *Compendy*.

[15] En revanche, ce qui semble bien original à ce jour, c'est le découpage de la règle de compagnies en quatre règles [voir annexe 1].

[16] Ce traité, communément appelé *Manuscrit de Pamiers*, a été étudié par Jacques Sesiano (J. Sesiano, *Une aruthmétique médiévale…*). Parmi les traités bâtis sur des schémas voisins, citons la *Suma de la art de aresmetica* de Francesch Sanct Climent (Barcelone 1482), ou le *Kadran aux marchans* de Jehan Certain (Bilbao 1485), l'arithmétique anonyme du ms 456 de la médiathèque de Nantes (1488), le *Compendion de lo abaco* de Frances Pellos (Nice 1492), …

[17] A ce titre, il serait instructif de connaître les sources du manuscrit de Pamiers, pour essayer de déterminer sa part d'originalité.

[18] Voir M. Spiesser, *Une arithmétique commerciale,* ... L'annexe 4 (p. 614-634) décrit le contenu d'un corpus d'une vingtaine d'arithmétiques marchandes (Italie, France, Catalogne).

[19] Le Traicté de la praticque d'algorisme.

> *principalement avoye composé et ordonné le livre. Mais en cestuy suppliement, pour illuminer l'entendement de ceulx qui vouldroient veoir les subtilitez qui y sont contenues, avec le adjutoire de nostre Seigneur Dieu et en sa confiance, je traicteray et mettray regles et exemples pour en donner cognoissance*[20]*. [f. 185v]*

On trouve déjà cette profession de foi dans le *Manuscrit de Pamiers*[21]*,* juste avant l'introduction de la règle de trois. Il est certain que l'auteur a eu en main propre l'arithmétique de Pamiers ou un texte équivalent. Nous avons dit que le plan général des deux traités est identique. Beaucoup d'autres d'arguments peuvent être avancés, tirés à la fois du *Compendy* et du premier traité du *Manuscrit de Cesena*[22].

Dans le *Compendy*, les quelques lignes que nous venons de citer, et qui viennent clore la partie pratique du traité, prennent tout leur sens quand on poursuit la lecture du texte. L'auteur nous fait comprendre que ses ambitions ne se limitent pas à l'enseignement de techniques utiles au commerce : il désire sortir le lecteur d'un domaine mathématiquement limité pour aiguiser son intelligence. En effet, que doit savoir faire un marchand ? Calculer : c'est l'objet du premier volet du *Compendy* ; résoudre des problèmes quotidiens : ils sont presque toujours régis par la règle de trois et c'est la « première règle de compagnies » (de f. 169v à f. 185v) qui offre cet apprentissage. Enoncée sous la forme « *Par chascune multiplie et par toutes ensemble partiz* », elle n'est autre que la règle de trois exprimée dans un contexte particulier. Elle permet de résoudre les partages d'argent entre associés, lorsque leur compagnie se dissout, ainsi que les problèmes de contrat entre marchands et facteurs, entre propriétaires de troupeaux et bergers, etc. Le *Compendy* ne déroge pas à la tradition. Mais le « supplément » qui débute ensuite change complètement l'orientation du traité, tout en exploitant les sources des arithmétiques commerciales.

On comprend maintenant la part peu importante accordée aux opérations et aux applications commerciales. Une nouvelle approche du texte se fait jour, qui n'est pas du tout mise en évidence par le découpage des chapitres. La rupture se fait au f. 185v, entre

---

[20] « Et ces problèmes, avec ceux qui sont dans le livre, suffisent pour comprendre et voir la pratique de la règle de première compagnie, laquelle figure seule dans le livre ; et il n'est rien dit des autres car elles ne sont pas nécessaires pour les marchands, pour lesquels principalement j'avais composé et ordonné le livre. Mais en ce supplément, pour illuminer l'entendement de ceux qui voudraient voir les subtilités qui y sont contenues, avec l'aide de Notre Seigneur Dieu et en sa confiance, je traiterai et mettrai des règles et des exemples pour en donner connaissance. »

[21] « Pueys que sufficientment Dieus ajudant hey tractat dels nombres entiers et rotz, resta que yeu done et ensenhe per exemples las reglas generals per lasquals hom puescan et sapian prestament far sa rason per pendre o donar justament segont son dreyt, vendent o comprant en totas mercadarias et en feyt de companhias et per respondre a questions necessarias et hutils et delectablas al entendement del home. » (f. 73rv)

[22] J. Cassinet a repéré les passages identiques dans le *Traicté de la praticque des nombres* et dans le traité de Pamiers (J. Cassinet, *Le manuscrit XXVI de Cesena…*, pp. 255-258). Nous avons complété cette étude par une comparaison avec le *Compendy* (M. Spiesser, *Une arithmétique commerciale…*, p. 64-70].

une partie pratique qui couvre les trente-sept premiers feuillets et un important « supplément » de quatre-vingt-trois feuillets, où il n'est plus question d'exercer le praticien, mais de faire réfléchir le lecteur sur quelques problèmes. Voilà la véritable la raison d'être de ce traité, voilà aussi ce qui en fait l'originalité.

II - ORIENTATION MATHEMATIQUE ET PROJET PEDAGOGIQUE

1 - Les quatre problèmes qui font le *Compendy*

A la lecture des quelque cent soixante pages qui forment le second volet du traité, on se rend vite compte que le *Compendy* n'est pas une arithmétique de plus destinée à former les marchands. Si l'auteur se conforme au découpage en quatre règles, c'est pour privilégier, à l'intérieur de chacune d'elles, un, au maximum deux types de problèmes en évinçant les autres. Cette attitude est particulièrement poussée dans le chapitre sur la règle de double fausse position. D'ordinaire, ce chapitre regroupe nombre de problèmes divers, traditionnellement résolus de cette manière. Ici, deux questions seulement sont abordées, et la seconde tient pratiquement le chapitre entier. Qui plus est, la règle de double fausse position intervient à peine ! Cela montre bien que les quatre règles servent uniquement de cadre à l'intérieur duquel l'auteur sélectionne les problèmes qui l'intéressent. Ce faisant, chaque genre est fouillé, analysé de manière très complète et illustré de nombreux exemples. Nous présentons d'abord, à partir d'exemples simples, les quatre genres de problèmes privilégiés. La résolution mathématique générale[23] est donnée dans l'annexe 2.

a) La deuxième règle des compagnies : *demandants* et *baillants*

Une compagnie est divisée en *demandants* et *baillants*. Les premiers empruntent collectivement de l'argent aux seconds et possèdent alors un multiple donné de ce qui reste aux autres. La composition des groupes d'emprunteurs et de prêteurs varie de façon « circulaire ». Il s'agit de trouver combien de deniers chacun possède au départ.

> *Sont troys qui ont deniers a partir en telle manière que le premier dit aux autres deux que s'ilz luy donnent de leurs deniers 7, avec les siens il aura 5 foiz tant comme leur reste. Et dit le second aux autres deux que se ilz lui donnent 9 de leurs deniers, avec les siens il aura 6 foiz tant comme leur en reste. Et dit le tiers aux autres deux que se ilz lui*

[23] Les trois premiers problèmes ont déjà été analysés à plusieurs reprises. Voir J. Sesiano, *Une arithmétique médiévale…* et J. Cassinet, *Le manuscrit XXVI de Cesena…* Voir aussi M. Spiesser, « Problèmes linéaires dans le *Compendy de la praticque des nombres...* ».

donnent 11 de leurs deniers, avec les siens il aura 7 foiz tant comme leur en restera. Demande ... [f. 186r][24].

Autrement dit, si les trois hommes possèdent respectivement x_1, x_2, x_3 deniers, alors les inconnues vérifient :

$$x_1 + 7 = 5(x_2 + x_3 - 7), \quad x_2 + 9 = 6(x_3 + x_1 - 9) \quad \text{et} \quad x_3 + 11 = 7(x_1 + x_2 - 11)$$

Les différentes manières de prendre en compte tous les membres de la compagnie sont présentes dans les exemples : soit le demandeur est seul, comme c'est le cas ci-dessus (cas nommé *ung demande à tous*), soit c'est une seule personne qui prête (*tous demandent à ung*), soit demandeurs et prêteurs sont plusieurs (*plusieurs demandent à plusieurs*). La situation peut se compliquer davantage lorsque les emprunteurs ne possèdent pas exactement un multiple de ce qui reste aux prêteurs : il y a alors des restes. Par exemple, le premier homme, avec 7 deniers des deux autres, possèdera alors 5 fois ce qui leur reste, plus un denier, etc.[25]

b) La règle d'une position : *n* personnes achètent une marchandise

Une compagnie veut faire un achat mais aucun de ses membres ne possède la somme requise. Comme précédemment, chaque groupe « d'emprunteurs » demande aux autres une fraction de leurs deniers de façon à réunir le montant exact de la marchandise. Cette question figure déjà dans le *Traicté de la praticque d'algorisme*. Voici le premier exemple dans ce traité :

Troys hommes veulent acheter ung cheval lequel couste ung tant et ung chacun d'eulx porte tant d'argent que nul d'iceulx ne le peut acheter ny poyer de soy. Mais le premier dit aux autres deux, prestez moy la moitié de tout vostre argent et avec le mien je poyeray le cheval. Le second dit aux autres deux, prestez moy le tiers de tout vostre argent et avec le mien je poyeray le cheval. Et le tiers dit aux autres deux, mais prestez moy vous autres deux le quart de tout vostre argent et avec le mien je poyeray celluy cheval. L'on demande que couste celluy cheval et aussi combien d'argent a ung chacun d'iceulx[26]. *[f. 77r-v]*

---

[24] « Ils sont trois qui ont des deniers à partager de cette manière : le premier dit aux deux autres que s'ils lui donnent 7 de leurs deniers, avec les siens il aura 5 fois ce qui leur reste. Le second dit aux deux autres que s'ils lui donnent 9 de leurs deniers, avec les siens il aura 6 fois ce qui leur reste. Et le troisième dit aux deux autres que s'ils lui donnent 11 de leurs deniers, avec les siens il aura 7 fois ce qui leur restera. Je demande... »

[25] Traduction algébrique de l'exercice f. 200v-201r :

$$x_1 + 7 = 5(x_2 + x_3 - 7) + 1, \quad x_2 + 9 = 6(x_3 + x_1 - 9) + 2 \quad \text{et} \quad x_3 + 11 = 7(x_1 + x_2 - 11) + 3$$

[26] « Trois hommes veulent acheter un cheval qui coûte tant et chacun d'eux apporte une somme d'argent telle qu'aucun d'eux ne peut l'acheter ni payer seul. Mais le premier dit aux deux autres, prêtez-moi la moitié de votre argent et avec le mien je paierai le cheval. Le second dit aux deux autres, prêtez-moi le tiers de votre argent et avec le mien je paierai le cheval. Et le troisième dit aux deux autres, mais prêtez-moi, vous autres, le

Avec les mêmes notations que précédemment, a étant le prix du cheval :

$$x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3) = a \qquad x_2 + \frac{1}{3}(x_3 + x_1) = a \qquad \text{et} \qquad x_3 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2) = a$$

Le prix du cheval n'étant pas fixé, le problème est indéterminé.

c) La règle d'une position : *n* personnes ont trouvé une bourse

Une compagnie a trouvé une bourse. Quelques membres, en réunissant leurs deniers à l'argent de la bourse, possèdent alors un certain multiple de ce qu'ont tous les autres ensemble.

Exemple :

> *Sont troys hommes qui ont trouvé une bourse en quoy a d'argent dedans qui doit se diviser a tous troys, et le chascun d'eux a d'argent de soy. Et dit le premier aux autres deux que si luy donnent leur droit de la bourse, il aura le double de ce qu'ilz ont. Et dit le second aux autres deux que si luy donnent leur droit de la bourse, il aura le triple de ce qu'ilz ont. Et dit le tiers aux autres deux que si luy donnent leur droit de la bourse, il aura le quadruple de ce qu'ilz ont. Demande combien a le chascun et combien a d'argent en la bourse*[27]. *[f. 229v]*

Soit a la somme contenue dans la bourse. Mathématiquement, ce problème est identique au précédent. Il suffit de remplacer a par $-a$ et les fractions précédentes par -2, -3 et -4. Pour l'exemple cité, on obtient le système :

$$x_1 + a = 2(x_2 + x_3), \quad x_2 + a = 3(x_3 + x_1) \quad \text{et} \quad x_3 + a = 4(x_1 + x_2).$$

Ces trois premiers problèmes ont une histoire très ancienne. On les retrouve pratiquement dans toutes les traditions mathématiques depuis l'antiquité, résolus au moyen de procédés divers. Ils ont aussi une unité mathématique : leur résolution conduit à un système dont la matrice est circulante [voir l'annexe 2]. L'auteur a bien vu cette unité, d'abord en sélectionnant les trois problèmes, ensuite en les résolvant à l'aide de méthodes de même nature, enfin en concevant chaque chapitre de manière très proche[28].

---

quart de votre argent et avec le mien je paierai ce cheval. On demande ce que coûte ce cheval et aussi combien d'argent a chacun d'eux. »

[27] « Trois hommes ont trouvé une bourse dans laquelle il y a de l'argent qui doit être divisé entre eux trois, et chacun a de l'argent personnel. Le premier dit aux deux autres que s'ils lui donnent leur droit à la bourse, il aura le double de ce qu'ils ont. Le second dit aux deux autres que s'ils lui donnent leur droit à la bourse, il aura le triple de ce qu'ils ont. Le troisième dit aux deux autres que s'ils lui donnent leur droit à la bourse, il aura le quadruple de ce qu'ils ont. Je demande combien a chacun et combien il y a d'argent dans la bourse. »

[28] Les problèmes du « cheval » et de « la bourse » se terminent par la présentation d'énoncés différents, baptisés *de ung à ung*, où chacun s'adresse à une seule personne : par exemple, dans une compagnie de trois, le premier associé dit qu'avec l'argent de la bourse, il aura deux fois plus que le second ; de même, le second

d) La règle de deux fausses positions : les progressions composées

Le quatrième problème est différent. Il semble beaucoup moins répandu dans les arithmétiques. Une fraction $\frac{p}{q}$ (comprise entre 0 et 1) et une suite arithmétique de raison r et de premier terme a sont données. Il s'agit de partager de façon équitable une somme inconnue S (la fortune d'un père mourant par exemple) entre un nombre inconnu n de personnes, en respectant les règles suivantes : la première part est égale à a, augmenté de la fraction $\frac{p}{q}$ de ce qui reste, soit $\frac{p}{q}(S - a)$. La seconde part est égale au deuxième terme de la progression augmenté de la même fraction de ce qui reste de la somme initiale après avoir effectué tous les prélèvements précédents. Et on continue ainsi. Voici le premier cas proposé :

> *Il est ung nombre, lequel je veulz partir par ceste progression a aucunes personnes par ceste maniere : que le premier prand 3 et la* $\frac{1}{7}$ *du demourant, et le second prand 6 de ce que reste et la* $\frac{1}{7}$ *du demourant, et le tiers prand 9 de ce que reste et la* $\frac{1}{7}$ *du demourant, et ainsi continuant la progression de 3 et le adjoustement de la part du demourant. Demande quel est le nombre qui se peut partir par celle maniere et quantz lieux y aura, c'est assavoir quantz hommes seront, et que aura le chascun*[29]*. [f. 249v-250r]*

On remarquera que le nombre n de personnes est inconnu (en général il ne sera pas entier!). En appelant x la part de chacun et S la somme à partager ($S = nx$), on a donc :

$$x = 3 + \frac{1}{7}(S-3) = 6 + \frac{1}{7}[S - x - 6] = \cdots = 3k + \frac{1}{7}[S-(k-1)x-3k] = \cdots$$

Ces problèmes forment la *premiere maniere* des progressions composées. La *seconde maniere* est bâtie sur le même principe. Le seul changement vient du fait que dans le calcul des parts égales, on prend la fraction avant le terme adéquat de la progression arithmétique[30] [voir l'annexe 2].

---

aura trois fois plus que le troisième et le troisième quatre fois plus que le premier. Ces situations ne sont pas envisagées dans les problèmes de *demandants et baillants.*

[29] « Je veux partager un nombre entre certaines personnes selon cette progression : le premier prend 3 et $\frac{1}{7}$ du reste, le second prend 6 de ce qui reste et $\frac{1}{7}$ du reste, et on continue ainsi avec une progression de 3 et l'addition de la même part du reste. Je demande quel nombre peut être partagé de cette manière, combien de lieux il y a, à savoir combien d'hommes, et ce qu'aura chacun. »

[30] Voir l'annexe 2, ou M. Spiesser, *Une arithmétique commerciale…*, p. 139-156.

En réservant la majeure partie du traité à ces quatre problèmes, c'est un essai qui nous est proposé, un essai dans lequel l'auteur met à jour son esprit d'analyse, sa capacité d'abstraction et aussi ses intentions pédagogiques. Les algorithmes de résolution ne sont pas démontrés, bien que parfois on ne soit pas loin d'une véritable justification ; le plus souvent, ils sont expliqués. Mais toujours, la description générale précède l'exemple particulier. Les cas plus complexes sont ramenés à des problèmes canoniques de référence, chaque catégorie de problèmes est organisée en différents genres, les exemples sont hiérarchisés, du plus simple au plus complexe. Le tout est guidé par une volonté enseignante très forte.

2 - De la description générale à l'exemple

Les problèmes de *demandants et baillants* mettent bien en évidence cette démarche. La seconde règle des « compagnies » compte une soixantaine de pages (f. 185v-216v). Deux parties composent le chapitre, la première est théorique (c'est la *doctrine* ou la *speculative*), la seconde contient les exemples : c'est la *praticque.* La première partie débute par une présentation générale des problèmes. Ensuite, sur dix-huit pages, six notes expliquent la démarche mathématique dans un cadre général et aboutissent à des règles de calcul. Les exemples éclairants sont rarissimes. Ils viennent dans la partie pratique, qui est une mise en application des règles sur des exemples qui recouvrent les différents cas de figure.

Comment obtient-on ces différents cas de figure ? d'abord en faisant varier le nombre des emprunteurs (les *demandants* ou *prenants*) et par conséquent des prêteurs (les *baillants*), puis en ajoutant éventuellement des restes [voir ci-dessus, 1 – a]. Les deux situations les plus simples sont celles où un seul homme emprunte à tous les autres ou inversement, car il y a alors une solution unique que l'on calcule facilement, une fois la somme S des inconnues trouvée [voir l'annexe 2]. Les trois premières notes traitent ces deux cas. Elles expliquent comment, partant des données initiales, on peut les exprimer en fonction de la somme totale des inconnues, puis comment calculer S. En se plaçant par exemple dans la situation où une seule personne demande de l'argent à toutes les autres, la méthode décrite dans ces trois notes correspond algébriquement aux étapes suivantes :

1 - le problème général se traduit par le système :

$$(1) \qquad x_i + a_i = m_i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{k=n} x_k \qquad i = 1, 2, ..., n$$

2 - Les données sont exprimées en fonction de la somme totale S des inconnues :

$$(2) \qquad x_i + a_i = \frac{m_i}{m_i + 1} S \quad i = 1, 2, ..., n.$$

On passe donc des coefficients m_i aux fractions $\frac{m_i}{m_i + 1}$, appelées *proportions multiplex*, en opposition avec les fractions $\frac{1}{m_i + 1}$, *proportions submultiplex* qui apparaissent dans le cas où c'est le prêteur qui est seul[31].

[31] Dans ce cas, le système initial devient en effet :

$$x_{n+i-1} - a_i = \frac{1}{m_i + 1} S \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

3 - En ajoutant membre à membre les équations, on obtient alors

$$S+\sum_{k=1}^{k=n} a_k = \left(\sum_{k=1}^{k=n} \frac{m_k}{m_k+1}\right) S .$$

S répond bien au nombre cherché dans les lignes qui suivent : on ajoute toutes les parties de *S*, on retranche S et on doit trouver la somme des nombres empruntés.

> *[…] et adoncques veult dire que, qui adjousteroit touz les nombres a bailler, quel est le nombre que qui adjousteroit toutes ses parties selon que demonstrent les nombres rouptz des proportions, et de la somme d'icelles parties [le en] lieveroit leur nombre entier, resteroit le nombre des nombres a bailler […] [f. 187v]*[32]

Les deux notes suivantes montrent comment procéder lorsqu'il y a des restes, en ramenant le problème à la première situation, sans reste, c'est-à-dire à un problème canonique que l'on sait résoudre.

Enfin, la sixième note seulement aborde le cas le plus général où emprunteurs et prêteurs sont plusieurs. L'auteur conseille de nommer les différents associés à l'aide des entiers naturels puis de dresser ensuite une table qui distingue les emprunteurs ou *prenants* des prêteurs ou *baillants*. Il donne les quatre tables possibles dans un exemple de cinq partenaires : *que ung demande à tous* (1 demande à 4) ; *que tous demandent à ung* (4 demandent à 1) ; *que plusieurs à plusieurs* (2 à 3) ; *par le contraire* (3 à 2). [f. 193v]

Il ne reste plus qu'à énoncer des règles qui permettront d'obtenir le capital de chacun, règles qui cependant ne sont formulées que pour les deux premières situations. Et pour cause : le cas général, pouvant conduire à un système incompatible, ne sera traité que sur des exemples. Cette présentation « théorique » des problèmes, souvent difficile à suivre pour le lecteur moderne, est remarquable. L'entreprise n'est pas simple, le sujet n'est pas élémentaire. Comment expliquer dans un cadre général, sans l'appui d'exemples ou presque, sans notations, les transformations successives qui vont permettre de parvenir aux solutions éventuelles ? On voit fleurir, au fur et à mesure des besoins, un vocabulaire nouveau, nécessaire à la description et qui semble bien être l'invention de l'auteur. Nous venons d'en voir des exemples avec les titres qui situent les problèmes (*ung à tous*, *plusieurs à plusieurs*, etc.) ou avec les *proportions multiplex* et *submultiplex.* La description très aride de la méthode de résolution des problèmes de *demandants et*

[32] « Et cela veut donc dire que si l'on ajoute tous les nombres à donner, < on cherche > le nombre tel que si l'on ajoute toutes ses parties déterminées par les nombres rompus associés aux rapports et que de la somme on enlève ce nombre en entier, il reste la somme des nombres à donner […] »

baillants « avec reste », qui est l'objet des quatrième et cinquième notes, fournirait bien d'autres exemples[33].

3 - Classification et hiérarchisation des problèmes

Tous les exercices qui suivent les descriptions générales dont il vient d'être question sont soigneusement classés par genre : *ung demande à tous* (cas sans restes puis avec restes) ; *tous demandent à ung* ; *plusieurs demandent à plusieurs*. S'il y a des restes, on considère d'abord le cas où ils sont tous « en plus » et à l'intérieur de ce cas les éventualités suivantes : les restes sont égaux (ce qui est appelé *1 plus*), les restes sont différents (*2 plus* ou *3 plus*). Puis vient le même ordre pour les restes « en moins ».

> *Par quoy note bien tous les exemples suyvants, car je en feray en chascune maniere. Et feray premierement les exemples en que ne aura ny plus ny meins, et puis ceulx en quoy aura plus, et puis ceulx en quoy aura meins, et puis ceulx en quoy aura et plus et meins. Et premierement mettray les raisons de la premiere partie qui se font par les multiplex, et puis feray celles de la seconde partie qui sont contraires aux premieres, car elles se font par les submultiplex*[34]*. [f. 194v]*

Il en va ainsi pour tous les chapitres. Par exemple, les exercices sur les progressions composées sont ordonnés en tenant compte à la fois de la valeur respective du premier terme a et de la raison r de la progression arithmétique, mais aussi de la nature de la fraction, selon que le numérateur vaut 1 (*une partie*) ou davantage (*deux* et *plusieurs parties*).

Les exemples de la deuxième sorte de progressions composées sont ordonnés ainsi [f. 251v–255v] :

$a = r$: exemple avec une partie et exemple avec deux parties

$a < r$: exemples avec une partie, deux parties, plusieurs parties (au moins trois)

$a > r$: idem.

La rigueur, l'esprit d'analyse de l'auteur, ses exigences pédagogiques aussi, l'amènent à ordonner tous les types de problèmes. Elles l'amènent aussi à discuter les résultats, à s'interroger sur le nombre et la nature des solutions. Cette attitude permet d'aborder des problèmes de fond.

---

[33] Voir M. Spiesser, *Une arithmétique commerciale…*, ch. 7, L'écriture mathématique du *Compendy*, p. 171-198.

[34] « Par conséquent, note bien tous les exemples suivants, car j'en ferai pour chaque manière. Et je ferai premièrement les exemples en lesquels il n'y aura ni *plus* ni *moins*, puis ceux en lesquels il y aura *plus*, puis ceux en lesquels il y aura *moins*, et puis ceux en lesquels il y aura et *plus* et *moins*. Premièrement, je mettrai les problèmes de la première partie qui se font à l'aide des < rapports > multiples, et puis je ferai ceux de la seconde partie qui sont contraires aux premiers car ils se font à l'aide des < rapports > sous-multiples. »

4 - Un exemple d'illustration de l'esprit d'analyse : les "nombres" négatifs

C'est durant l'étude des problèmes d'achat d'un cheval et de découverte d'une bourse, dans le chapitre sur la règle d'une position, que surgit le problème des solutions négatives : le calcul final des inconnues donne lieu à une soustraction. Suivant les valeurs à soustraire, le résultat peut donc être positif, nul ou négatif.

Le problème ayant un support concret, on pourrait s'attendre à ce que seuls les résultats positifs soient acceptés, ou que les résultats négatifs soient interprétés. Il n'en est rien. On objectera que l'on a déjà rencontré cette réaction dans le *Manuscrit de Pamiers* à propos des mêmes problèmes[35]. Dans le *Compendy*, l'analyse est poussée nettement plus loin et le lecteur moderne est renseigné de manière plus précise sur la perception des quantités négatives. Suivant sa démarche habituelle, l'auteur s'engage dans une énumération des différents cas de figure possibles, suivant le signe des solutions. C'est pourquoi il est amené à décrire les *nombres determinez*, *riens simplement* ou *meins de riens*, et ensuite à les faire fonctionner dans des opérations :

> *La premiere chose de noter est que les nombres trouvez sus le nombre de la position sont en une de troys manieres, car ilz sont ou meindres, ou egalz, ou plus grans du nombre qui viend du partiment de toute la somme des nombres trouvez sus la position […]. Et est que ce que reste en la sustraction des meindres se appelle nombre determiné. Et quant le egal se sustraict reste 0, que se appelle non riens simplement. Et quant les plus grands se deveroient sustraire, car il est impossible que le plus grand nombre se lieve du meindre, il est forcé que la sustraction se face par le contraire ; et pour ce est que ce que reste se appelle meins de riens*[36]. *[f. 219v]*

Les commentaires sur les solutions négatives vont bien au-delà de ce qu'on a pu lire jusqu'alors. Il est certain que les nombres négatifs embarrassent l'auteur. Mais le fait de les envisager avec 0 sur le même plan que les autres, les positifs, de les faire agir en tant que nombres, est une avancée certaine dans la reconnaissance de ces quantités.

---

[35] Problème d'achat d'une pièce de drap entre cinq personnes, f. 101rv du *Manuscrit de Pamiers*. La première d'entre elles a « 10 $\frac{3}{4}$ *mens de non res* » (J. Sesiano, *The appearance of negative solutions*…, p. 133).

[36] « La première chose à noter est que les nombres trouvés sur le nombre de la position appartiennent à l'une de ces trois sortes : ils sont soit inférieurs, soit égaux, soit supérieurs au nombre qui provient de la division de la somme totale des nombres trouvés sur la position […]. De ce nombre, tous les nombres trouvés devraient être soustraits pour savoir ce qu'a chacun et le nombre de la position devrait s'en soustraire pour avoir le nombre commun. Et ce qui reste lorsqu'on soustrait des nombres plus petits s'appelle nombre déterminé. Quand on soustrait un nombre égal, il reste 0, qui s'appelle non rien simplement. Et quand on devrait soustraire des nombres plus grands, comme il est impossible de retrancher le plus grand nombre du plus petit, la soustraction se fait forcément en sens contraire et pour cela, ce qui reste s'appelle moins que rien. »

Les caractères essentiels qui émergent à la lecture du *Compendy* le distinguent de la plupart des arithmétiques de son époque. Si le *Manuscrit de Pamiers* est la source la plus immédiate, bien des points séparent tout de même l'esprit des deux textes. En effet, le *Manuscrit de Pamiers* appartient sans hésitation au genre des arithmétiques « commerciales » ou « marchandes », même si les investigations à caractère théorique sont plus poussées que dans bien d'autres textes. Les chapitres des *raisons* renferment une succession de problèmes divers comme on en rencontre un peu partout dans de telles arithmétiques, dans les traités d'abbaque italiens en particulier : c'est une méthode de résolution commune qui les réunit. Nous avons vu au contraire que Barthélemy de Romans a choisi de développer seulement quatre sujets, qu'il a d'abord analysés dans un cadre général puis illustrés de nombreux exemples : vingt-six pour le thème des *demandants et baillants*, une vingtaine pour les problèmes « du cheval » ou « de la bourse », ainsi que pour les « progressions composées ». Dans l'arithmétique de Pamiers, les problèmes d'achat de marchandise occupent la même place, à l'intérieur de la règle d'une fausse position, mais les deux derniers genres de problèmes sont absents. Enfin, quelques problèmes de *demandants et baillants* sont proposés en application de la règle de double fausse position (f. 114r-115v).

III – Des sources proches du *Liber abbaci*

Il faut remonter à Léonard de Pise et au *Liber abbaci* pour rencontrer des chapitres entiers réservés à l'analyse d'un seul problème[37]. C'est dans le chapitre XII que Léonard de Pise traite de ces questions. Dans l'édition Boncompagni, les problèmes de *demandants et baillants* couvrent dix-sept pages de la partie XII-3 et quinze exemples sont résolus. La partie XII-4 est entièrement consacrée aux problèmes de la découverte d'une ou de plusieurs bourses, avec seize exemples. Enfin, plus de vingt-cinq exercices traitent de l'achat de marchandises (chevaux et autres) et forment la cinquième partie du même chapitre. Parmi tous ces exemples, vingt sont repris dans le *Manuscrit de Cesena*, plusieurs autres en sont très proches. Les méthodes de résolution choisies par l'auteur du *Compendy* figurent toutes dans le *Liber abbaci* (qui en propose souvent d'autres en parallèle). Certaines résolutions du premier traité suivent pratiquement à la lettre celles du second. Le style rhétorique du *Compendy* est alors calqué sur la langue latine.

Les problèmes baptisés « progressions composées » par Barthélemy-Préhoude sont également traités dans le *Liber abbaci*, bien qu'ils soient beaucoup moins développés (chapitre XII-7, p. 279-281 de l'édition Boncompagni). Ces problèmes sont répertoriés

[37] Nous excluons les traités qui s'inspirent ouvertement du *Liber abbaci*.

dans Tropfke[38] sous le nom d'héritage inconnu (*Die unbekannte Erbschaft*). Dans tous les exemples cités, les fractions choisies sont $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, et $\frac{1}{10}$. Nous ne connaissons pas d'autre texte que le *Liber abbaci* et le *Compendy* où interviennent des fractions peu courantes comme $\frac{2}{11}$ ou $\frac{6}{35}$; la coïncidence est donc troublante.

Ainsi, en comparant à la fois les énoncés et leurs résolutions dans les deux traités, à la lumière aussi de quelques autres faits précis que nous n'aborderons pas ici[39], nous avons acquis la conviction que Barthélemy de Romans avait en main des sources très proches du *Liber abbaci*, sources qu'on voit apparaître ici pour la première fois dans les arithmétiques marchandes du sud de la France, et qui réapparaîtront ensuite dans le *Triparty de* Chuquet[40].

Pour autant, la comparaison entre les deux textes s'arrête là. L'orientation générale, on le sait, est bien différente. Et même si nous en restons au chapitre XII, source des exemples traités dans le *Compendy*, les objectifs ne sont pas les mêmes. Le *Compendy*, comme le *Manuscrit de Pamiers*, se veut didactique. Il explique quand le *Liber abbaci* démontre. C'est le « comment » face au « pourquoi ». Et malgré le remarquable travail de réflexion de Barthélemy, il ne faut cependant pas masquer les lacunes. Lorsque le problème devient plus difficile, l'auteur du *Compendy* ne le maîtrise plus mathématiquement, à la différence de Léonard de Pise. Les faiblesses du texte, erreurs et confusions passagères, le placent mathématiquement au-dessous de l'œuvre maîtresse de Léonard de Pise. En revanche, le souci de penser en premier lieu tous les problèmes d'une même famille sous des idées générales, de séparer les exemples de la théorie, est absent de l'œuvre de Léonard de Pise. Dans le *Liber abbaci*, la démarche est inverse : chaque partie débute par un exemple à l'occasion duquel est énoncée la règle qui permet de le résoudre et qui, souvent, est justifiée a posteriori. Une homogénéité de construction apparaît dans le *Compendy* que l'on ne ressent pas du tout dans le *Liber abbaci* et qu'on n'a retrouvée en aucun autre ouvrage.

CONCLUSION

Du point de vue de la transmission des connaissances, le *Compendy de la praticque des nombres* est un texte d'importance pour l'historien des sciences. Il a des liens directs avec deux traités de référence dans la France du XV^e^ siècle, le *Manuscrit de Pamiers* qui

[38] J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, pp. 586-588.
[39] Voir M. Spiesser, « Questions sur la diffusion du *Liber abbaci* en France au XV^e^ siècle à travers l'étude des traités commerciaux ».
[40] Voir M. Spiesser, *Une arithmétique commerciale…*, p. 74-79.

jusqu'à ce jour est fondateur d'un genre et le *Triparty en la science des nombres* de Chuquet : ce dernier reprendra en effet, dans la première partie de son traité ainsi que dans l'appendice, bon nombre d'exemples et de méthodes issus du *Compendy*. Il est aussi la preuve de la circulation de connaissances d'origines plurielles : le *Manuscrit de Pamiers* d'un côté, qui a fourni le découpage et aussi l'orientation théorique du texte, le *Liber abbaci* de l'autre, qui a procuré le matériau de travail : à savoir le corpus important des problèmes proposés qui excède largement celui que l'on trouve dans le *Compendi* de Pamiers et les autres textes de la même famille.

Du point de vue du contenu, on peut dire que rien n'est nouveau, ni le sujet traité, ni les méthodes employées. Là où l'auteur innove, c'est dans le regard qu'il porte sur la matière. Il ne s'agit plus seulement de transmettre des consignes, de résoudre des exercices « à l'unité », mais de réfléchir sur des problèmes, de penser la mathématique enseignée. Le travail mené en ce sens est remarquable, neuf et reste unique, en l'état actuel de nos connaissances. Le *Compendy de la praticque des nombres* est un ouvrage très personnel, qui a su intelligemment tirer parti de différentes sources sans jamais les copier servilement, en suivant une voie originale.

Le traité n'a pas de vocation pratique. Il est certain qu'un futur marchand n'y trouvera pas son compte : la première partie est trop réduite pour apporter l'essentiel et la seconde est inutile à la pratique commerciale. S'il fallait le rebaptiser, on pourrait le qualifier d'essai, un essai sur quatre problèmes, destiné à « illuminer l'entendement de ceulx qui vouldroient veoir les subtilitez qui y sont contenues ».

BIBLIOGRAPHIE

Sources manuscrites

Textes anonymes

ANONYME, *Compendi del art del algorisme* (dit *Manuscrit de Pamiers*), Ms. fds franç. 4140, Bibl. Nat. Paris, c. 1420.

ANONYME, *L'art d'arismetique*, Ms. fds franç. 2050, Bibl. Nat. Paris, c. 1460.

ANONYME, *Traicté de la praticque d'algorisme*, Ms. S-XXVI-6, Bibl. Malatestiana, Cesena, f. 7r-140v, 1476.

ADAM Jehan, *Arismeticque*, 1475, Ms. franç. 3143, Bibl. Sainte-Geneviève, Paris.

BARTHELEMY DE ROMANS, *Compendy de la praticque des nombres*, Ms. S-XXVI-6, Bibl. Malatestiana, Cesena, f. 149r-268v, 1476.

CERTAIN Jehan, *Le kadran aux marchans*, Ms. 2904, Bibl. de l'Arsenal, Paris, 1485.

CHUQUET Nicolas, *Triparty en la science des nombres* (Appendice, première partie), Ms. fds franç. 1346, Bibl. nat. Paris, f. 148r-210r, 1484.

Sources imprimées

BENOIT Paul, « La formation mathématique des marchands français à la fin du Moyen Age : l'exemple du Kadran aux marchans (1485) », in *Les entrées dans la vie*, Actes du XII^e^ Congrès de la Société des historiens médiévistes de l'Enseignement supérieur public : Nancy : Presses Universitaires de Nancy, 1982, p. 209-224.

CASSINET Jean, « Le manuscrit XXVI de Cesena, important maillon occitan de transmission de l'algorisme au XV^e^ siècle », *Bollettino di storia delle scienze Matematiche* 13 (1993), 251-285.

CHUQUET Nicolas, *Le Triparty en la science des nombres*, éd. Aristide Marre, d'après le ms fds fr. de la Bibl. Nat. de Paris, *Bullettino di Bibliographia e Storia delle scienze Mathematiche e Fisiche* 13**,** Partie I, (Oct. 1880), 593-659 – Parties II et III, (Nov. 1880), 693-814.

DUHIL Roxane, Étude d'un traité d'arithmétique du XVe siècle : le Manuscrit 456 de Nantes, Mémoire de maîtrise, Paris : Université Paris XIII, 1997.

L'HUILLIER Hervé, Nicolas Chuquet. La géométrie. Première géométrie algébrique en langue française (1484), Paris : Vrin, 1979.

LEONARD DE PISE, *Liber abbaci*, éd. Baldassarre Boncompagni, d'après le ms Magl. C. I, 2616, badia Fiorentina, n° 73, Roma : Tipografia delle Scienze matematiche e fisiche, 1857.

PELLOS Frances, *Compendion de abaco*, éd. Robert Lafont et Guy Tournerie, Montpellier : Edition de la Revue des Langues romanes, 1967.

SANCT CLIMENT Francesch, *Suma de l'art d'aritmetica*, éd. Antoni Malet, Vic : Eumo Editorial, 1998.

SANCT CLIMENT Francesch, *Suma de la art de arismetica*, trad. fr. Marie-Hélène Labarthe, mémoire de DEA, Paris : Université Paris I, 1999.

SESIANO Jacques, « The Appearance of Negative Solutions in Mediaeval Mathematics », *Archive for History of Exact Sciences* 32 (1985), 105-150.

SESIANO Jacques, « Une arithmétique médiévale en langue provençale », *Centaurus* 27 (1984), 26-75.

SPIESSER Maryvonne, « Problèmes linéaires dans le *Compendy de la praticque des nombres* de Barthélemy de Romans et Mathieu Préhoude (1476). Une approche nouvelle basée sur des sources proches du *Liber abbaci* de Léonard de Pise », *Historia mathematica* 27/4 (2000), p. 136-157.

SPIESSER Maryvonne, Une arithmétique commerciale du XV^{e} siècle, le Compendy de la praticque des nombres de Barthélemy de Romans, Turnhout, Brepols, coll. De diversis artibus 70, 2003.

SPIESSER Maryvonne, « La question de la diffusion du *Liber abbaci* en France à travers les traités commerciaux du XV^{e} siècle », *Bollettino di storia delle scienze matematiche* 1-II (2004), 115-135.

TROPFKE Johannes, *Geschichte der Elementarmathematik,* 4. Auflage, Band 1. *Arithmetik und Algebra*, éd. Kurt Vogel, Karin Reich, Helmut Gericke, Berlin/New York : De Gruyter, 1980.

VAN EGMOND Warren, « How algebra came to France », in *Mathematics from Manuscript to Print*, éd. Cynthia Hay, Oxford : Clarendon Press, 1988, p. 127-144.

VAN EGMOND Warren, Practical Mathematics in the Italian Renaissance. A Catalog of Italian Abacus Manuscripts and printed Books to 1600, Firenze : Museo i Istituto di Storia della Scienza, 1980.

Annexe 1

TABLE DES MATIERES DU COMPENDY DE LA PRATICQUE DES NOMBRES

N. B. Les titres repris du texte sont en italiques, les autres titres sont ajoutés.

ANNEXE 2

ANALYSE MATHEMATIQUE DES PROBLEMES CITES AU II

Les méthodes décrites traduisent algébriquement la démarche suivie dans le *Compendy*.

1- La deuxième règle de compagnie : *demandants* et *baillants*

Une compagnie compte n personnes. Appelons-les P_1, P_2, ..., P_n. Chacune possède des deniers (notés x_i). Soit $G_1 = \{P_1, ..., P_p\}$, $G_2 = \{P_2, \dots, P_{p+1}\}$, ..., $G_n = \{P_n, P_1, \dots, P_{p-1}\}$. Chaque groupe G_i demande aux n - p personnes restantes de céder a_i deniers de façon à posséder alors un multiple m_i de ce qu'il leur reste. Les x_i sont solutions du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_p + a_1 = m_1(x_{p+1} + \dots x_n - a_1) \\ x_2 + x_3 + \dots + x_{p+1} + a_2 = m_2(x_{p+2} + ... + x_n + x_1 - a_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n + x_1 + x_2 + \dots + x_{p-1} + a_n = m_n(x_p + ... + x_{n-1} - a_n) \end{cases}$$

soit

(1) $$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k + a_i = m_i \left(\sum_{k=p+i}^{k=n+i-1} x_k - a_i \right) \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

avec la convention : $x_j = x_{j-n}$ si $j > n$.

La résolution consiste à transformer chaque équation de façon à faire apparaître la somme S des inconnues. Il y a pour cela deux possibilités. La première fait intervenir les fractions $\frac{m_i}{m_i + 1}$, la seconde fait intervenir les fractions $\frac{1}{m_i + 1}$, compléments à l'unité des précédentes. Les étapes sont alors les suivantes :

Première méthode

Transformation de chaque équation en fonction de la somme S des x_i :

(2) $$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k + a_i = \frac{m_i}{m_i + 1} S \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

En sommant ces n équations, on obtient :

(3) $$pS + \sum_{i=1}^{i=n} a_i = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{m_i}{m_i + 1} S$$

et on en déduit S.

Les x_i sont alors les solutions (éventuelles) du système

$$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k = \frac{m_i}{m_i+1} S - a_i \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Deuxième méthode

La première étape conduit à :

(2') $$\sum_{k=p+i}^{k=n+i-1} x_k - a_i = \frac{1}{m_i+1} S \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Les étapes suivantes sont les mêmes que dans la première méthode.

Il est avantageux d'utiliser la première transformation lorsque $p = 1$, car l'équation (2) conduit directement à x_i :

(2) $$x_i + a_i = \frac{m_i}{m_i+1} S \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Au contraire, lorsque $p = n - 1$, (2') est préférable, pour la même raison :

(2') $$x_{n-1+i} - a_i = \frac{1}{m_i+1} S \quad i = 1, 2, ..., n.$$

($n - 1 + i$ est toujours compris modulo n).

2 - La règle d'une position : *n* personnes achètent un cheval

Une compagnie de n personnes veut acheter une marchandise mais aucune ne possède la somme requise. En reprenant les notations déjà utilisées, les membres de chaque groupe G_i demandent alors aux n - p autres personnes de leur céder une fraction $\frac{p_i}{q_i}$ ($0 < p_i < q_i$) de leurs deniers de façon à réunir le montant exact a de cette marchandise.

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_p + \dfrac{p_1}{q_1}(x_{p+1} + \cdots + x_n) = a \\ x_2 + \cdots + x_{p+1} + \dfrac{p_2}{q_2}(x_{p+2} + \cdots + x_n + x_1) = a \\ \vdots \\ x_n + x_1 + \cdots + x_{p-1} + \dfrac{p_n}{q_n}(x_p + \cdots + x_{n-1}) = a \end{cases}$$

ou encore

(4) $$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k + \frac{p_i}{q_i}\left(\sum_{k=p+i}^{k=n+i-1} x_k\right) = a \qquad i = 1, 2, ..., n$$

En procédant comme auparavant (on ajoute aux deux membres de chaque équation la somme adéquate), on arrive au système équivalent :

(5) $$\sum_{k=p+i}^{k=n+i-1} x_k = \frac{q_i}{q_i - p_i}(S-a) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Comme a n'est pas fixé dans l'énoncé, on peut donner une valeur arbitraire à $S - a$. C'est ce qui est appelé *position* dans le *Compendy*, ce qui justifie le rangement de ces problèmes (comme des suivants) sous le titre de « règle d'une position ». Une fois les x_i trouvés - quand il y a des solutions-, on en déduit S puis a.

N. B. : Comme pour le premier problème, on pourrait aussi exprimer les données à l'aide des fractions $\dfrac{p_i}{p_i - q_i}$, ce qui mènerait aux équations :

(5') $$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k - a = \frac{p_i}{p_i - q_i}(S-a) \quad i = 1, 2, ..., n$$

Ce n'est pas fait dans le *Compendy*. Notons que dans les équations (5'), les deux membres sont négatifs (car $0 < p_i < q_i$).

3 - La règle d'une position : *n* personnes ont trouvé une bourse

Un groupe de n personnes a trouvé une bourse. Les membres de chaque groupe G_i réunissant leurs deniers à l'argent de la bourse, possèdent alors m_i fois ce qu'ont les $n - p$ autres personnes. C'est exactement le même problème que le précédent ; il suffit de remplacer $\dfrac{p_i}{q_i}$ par $-m_i$ et a par son opposé :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_p + a = m_1(x_{p+1} + \cdots + x_n) \\ x_2 + \cdots + x_{p+1} + a = m_2(x_{p+2} + \cdots + x_n + x_1) \\ \vdots \\ x_n + x_1 + \cdots + x_{p-1} + a = m_n(x_p + \cdots + x_{n-1}) \end{cases}$$

soit

(6) $$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k + a = m_i\Big(\sum_{k=p+i}^{k=n+i-1} x_k\Big) \qquad i = 1, 2, ..., n$$

puis, en fonction de S :

(7) $$\sum_{k=i}^{k=p+i-1} x_k + a = \frac{m_i}{m_i + 1}(S+a) \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

On peut exprimer également chaque équation en fonction des fractions $\dfrac{1}{m_i+1}$. Cela nous mène alors aux équations :

$$(7') \qquad \sum_{k=p+i}^{k=n+i-1} x_k = \frac{1}{m_i+1}(S+a) \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Lorsque $p = 1$, les équations (7) permettent d'obtenir directement x_i. Lorsque $p = n - 1$, ce sont les équations (7') qui donnent les x_{n-1+i}.

4- Bilan relatif aux trois problèmes précédents

La résolution de ces trois problèmes selon la méthode indiquée (retour à S, $S - a$ ou $S + a$) montre que les xi sont solutions d'un système dont la matrice est de type circulant, égale à

$$\begin{array}{c}
<\cdots\cdots\; p \;\cdots\cdots> \;\; <\cdots\; n-p \;\cdots> \\
\begin{bmatrix}
1 & . & . & . & . & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 1 & . & . & . & . & 1 & 0 & . & . & 0 \\
0 & 0 & 1 & . & . & . & . & 1 & 0 & . & 0 \\
0 & . & 0 & 1 & . & . & . & . & 1 & 0 & 0 \\
0 & . & . & 0 & 1 & . & . & . & . & 1 & 0 \\
0 & . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & . & 1 \\
1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & 1 \\
1 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & . & . & 1 \\
1 & . & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & . & 1 \\
1 & . & . & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 1 \\
1 & . & . & . & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

(ou la même matrice avec échange des 0 et des 1).

On démontre que ce système admet une solution unique si et seulement si n et p sont premiers entre eux. Dans ce cas, $\det A = p$. Dans le cas contraire, il peut donc n'y avoir aucune solution ou bien une infinité.

Dans les deux derniers problèmes, la valeur de a n'est pas connue, et lorsque le système est régulier, il y a en fait une infinité de solutions proportionnelles.

5 - La règle de deux fausses positions : les progressions composées

Premier problème ou « première manière »

Sont données une progression arithmétique de premier terme a et de raison r, et une fraction $\dfrac{p}{q}$ comprise entre 0 et 1.

Il s'agit de partager de façon équitable une somme inconnue S entre un nombre inconnu n de personnes, en respectant les règles suivantes : la première part est égale à a, premier terme de la progression, auquel on ajoute la fraction $\frac{p}{q}$ de ce qui reste, soit $\frac{p}{q}$ (S – a). La seconde part est égale au deuxième terme de la progression augmenté de la même fraction de ce qui reste de la somme initiale après avoir effectué tous les prélèvements précédents. On suit le même schéma pour la troisième part, etc.

Tel que le problème est posé, nous ne connaissons pas le « nombre de parts », nous ne savons pas s'il est entier ou non. Nous ne connaissons donc pas le nombre d'équations (ce que nous avons rendu par des pointillés dans l'écriture du système). Algébriquement, en appelant x la valeur de chaque part, nous pouvons traduire les conditions posées par les équations :

$$\begin{cases} S = nx \\ x = a + \frac{p}{q}(S - a) \\ x = a + r + \frac{p}{q}[S - x - (a + r)] \\ \ldots \\ x = \cdots = a + (k-1)r + \frac{p}{q}[S - (k-1)x - (a + (k-1)r)] \\ \ldots \end{cases}$$

Pour passer d'une part à l'autre, on ajoute r et on retranche $\frac{p}{q}$ (x + r), dont les effets s'annulent puisque toutes les parts sont égales. Le système se réduit alors à deux équations, à savoir la première et l'équation unique obtenue en retranchant membre à membre deux équations consécutives. Le système précédent est donc équivalent à chacun des systèmes suivants :

$$\begin{cases} S = nx \\ x = a + \frac{p}{q}(S - a) \\ x = (\frac{q}{p} - 1)r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = nx \\ S = a + \frac{q}{p}(x - a) \\ x = (\frac{q}{p} - 1)r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = nx \\ x = (\frac{q}{p} - 1)r \\ S = a + \frac{q}{p}[(\frac{q}{p} - 1)r - a] \end{cases}$$

a, r, p et q étant donnés, on a donc la solution :

$$x = (\frac{q}{p} - 1)r \quad ; \quad S = a + \frac{q}{p}[(\frac{q}{p} - 1)r - a] \quad ; \quad n = \frac{S}{x} = \frac{\frac{q}{p}r - a}{r}$$

ou encore, en posant $q' = \frac{q}{p}$:

$$x = (q' - 1)r \ ; \ S = a + q'[(q' - 1)r - a] \ ; \ n = \frac{q'r - a}{r}$$

Deuxième problème ou « deuxième manière »

La première part est égale au premier terme de la progression auquel on ajoute $\frac{p}{q}S$. La seconde est égale au second terme de la progression augmenté de la fraction $\frac{p}{q}$ de ce qui reste après avoir prélevé la première part, et ainsi de suite. Par rapport au premier problème, on a simplement inversé l'ordre entre progression et fraction du « reste ». Les équations sont ici :

$$\begin{cases} S = nx \\ x = \frac{p}{q}S + a \\ x = \frac{p}{q}(S - x) + (a + r) = \\ \cdots \\ x = \frac{p}{q}[(S - (k-1)x] + a + (k-1)r \\ \ldots \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$S = nx \ et \qquad \begin{cases} S = nx \\ x = \frac{p}{q}S + a, \\ x = \frac{q}{p}r \end{cases}$$

d'où la solution :

$$x = \frac{q}{p} r \; ; S = \frac{q}{p}\left(\frac{q}{p} r - a\right) ; n = \frac{\frac{q}{p} r - a}{r},$$

ou encore, avec $q' = \frac{q}{p}$:

$$x = q'r \; ; \; S = q'(q'r - a) \; ; \; n = \frac{q'r - a}{r}.$$

Notons, pour les deux genres, que :

- Si $a \leq r$, les solutions sont toujours positives ;

- Si $a > r$, S et n ne sont positifs que si $\frac{p}{q} < \frac{r}{a}$.

ANNEXE 3

PHOTOGRAPHIES

Avec l'aimable autorisation de la Bibliothèque Malatestiana de Cesena

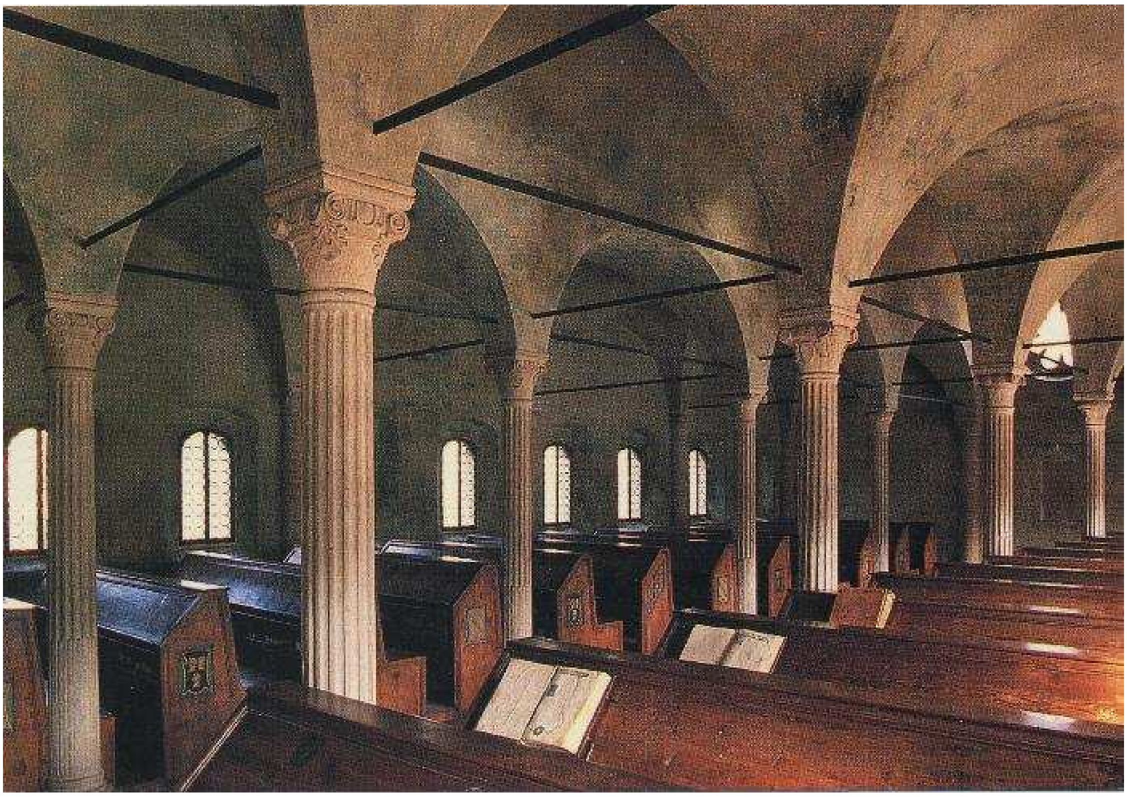

Photo 1 : salle des manuscrits de la Bibliothèque Malatestiana de Cesena

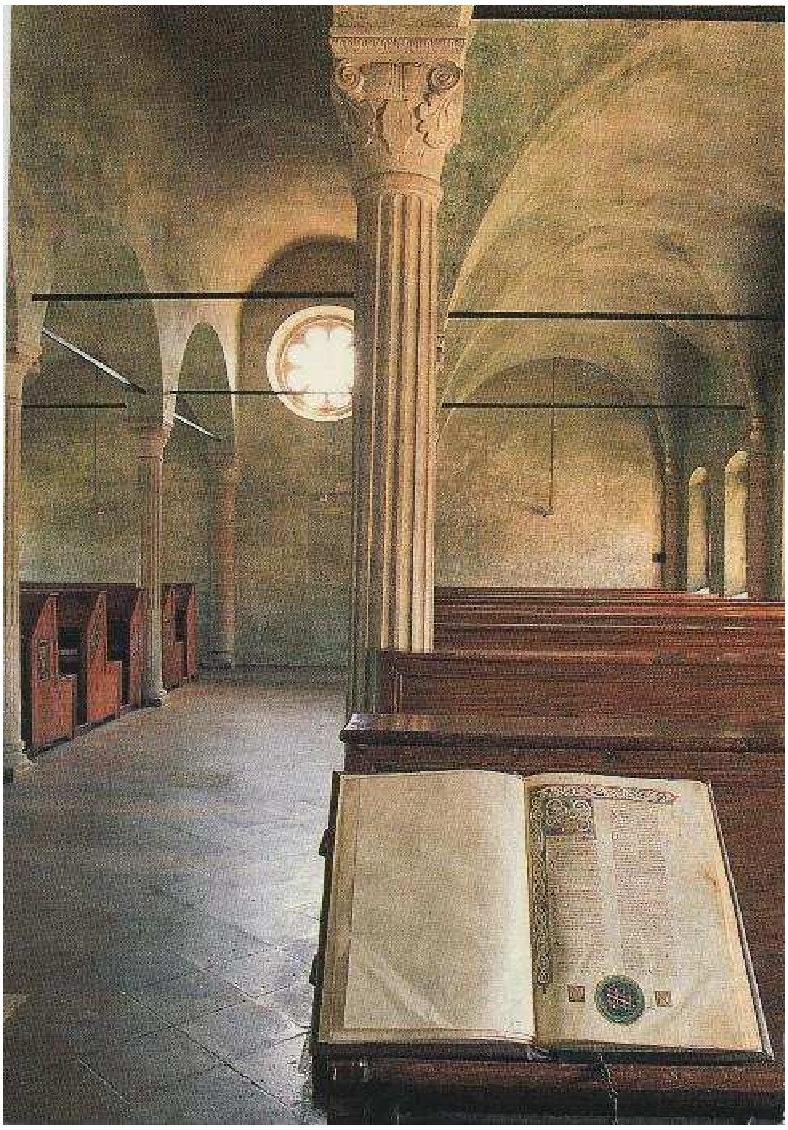

Photo 2 : salle des manuscrits de la Bibliothèque Malatestiana de Cesena

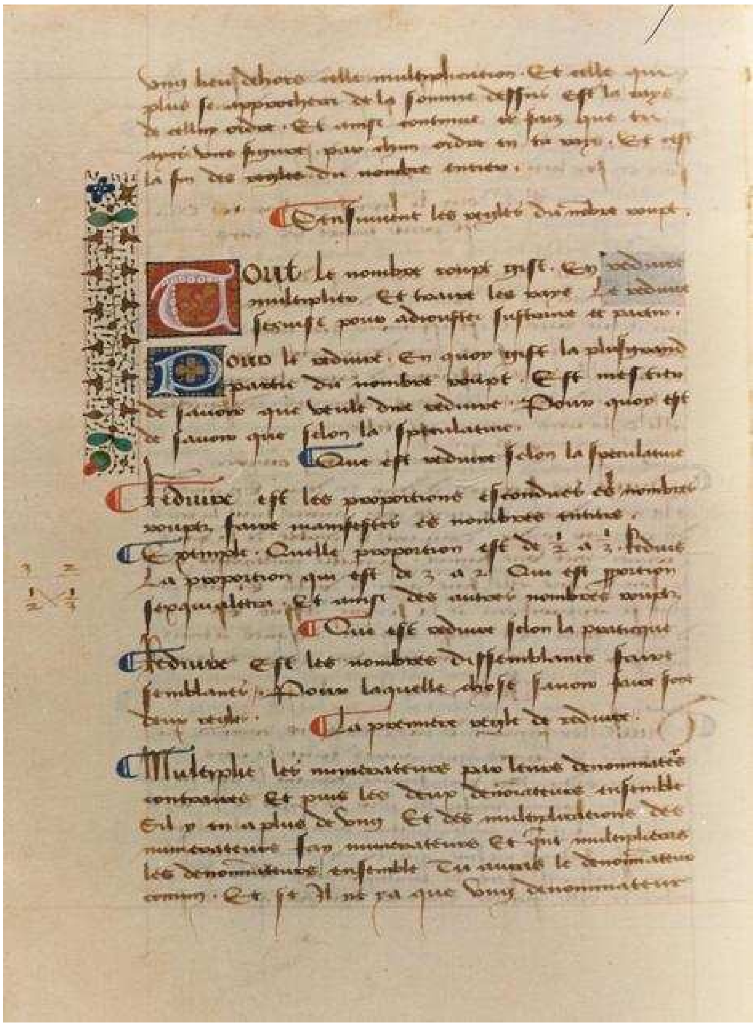

Photo 3 : Le *Compendy de la practique des nombres*, chapitre sur les nombres rompus

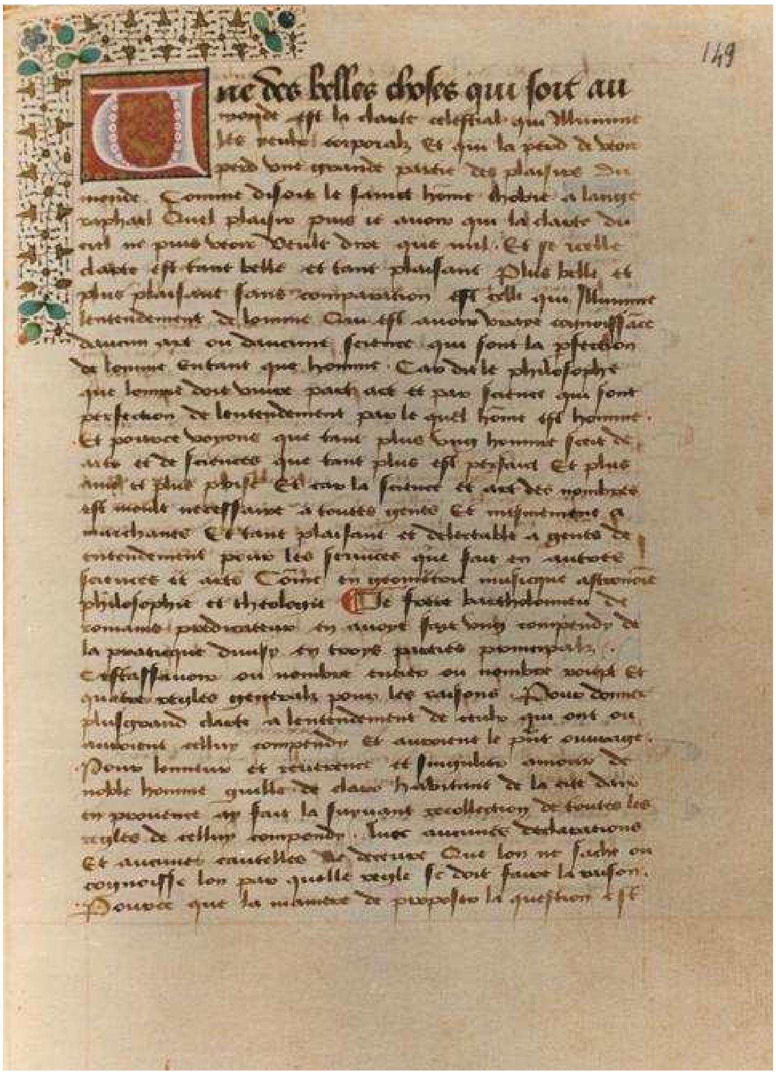

Photo 4 : Le Compendy de la practique des nombres, p. 1