

Sujets des exposés de première année

Année 2019-2020

Contact : François Bolley et Malo Jézéquel, francois.bolley@upmc.fr, malo.jezequel@ens.fr

Liste des exposés

Dimension de Hausdorff des sous-anneaux de \mathbb{R} _____	page 4
Timothée Bénard	
Nombres algébriques de petite hauteur _____	page 5
Olivier Benoist	
Chaînes de Markov et réseaux électriques _____	page 6
Maxime Berger	
Régularité des courbes minimisantes _____	page 7
Patrick Bernard	
Introduction à la géométrie tropicale _____	page 8
Thomas Blomme	
Tas de sable et géométrie tropicale _____	page 9
Thomas Blomme	
Concentration de la mesure pour les gaz de Coulomb _____	page 10
François Bolley	
Inégalités fonctionnelles et équation de Fokker–Planck _____	page 11
François Bolley et Isabelle Tristani	
Compressed sensing (vs. Deep Learning ?) _____	page 12
Claire Boyer	
Du transport optimal et de son utilisation dans les réseaux de neurones _____	page 13
Claire Boyer	

Convergence de la forme limite pour le modèle de dimères sur le réseau hexagonal	page 14
Dmitry Chelkak et Rémy Mahfouf	
Cohérence de PA_1	page 15
Adrien Deloro	
Catégoricité : le théorème de Morley	page 16
Adrien Deloro	
Forcing : en avoir fait	page 17
Adrien Deloro	
Le théorème de Hasse–Minkowski	page 18
Antoine Ducros	
Fonctions complètes de croissance des groupes	page 19
Anna Erschler	
Données aberrantes et MOM (médiane et moyennes) en apprentissage statistique	page 20
Stéphane Gaïffas	
Théorèmes de restriction de la transformée de Fourier	page 21
Isabelle Gallagher	
Meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev	page 22
Louise Gassot	
Une introduction aux systèmes désordonnés : les modèles d'accrochage	page 23
Giambattista Giacomin	
Entrelacs homotopiques	page 24
Geoffroy Horel	
La construction de Thom–Pontryagin	page 25
Geoffroy Horel	
Régularité partielle pour les équations de Navier–Stokes	page 26
Cyril Imbert	
Résolution du 19ème problème de Hilbert	page 27
Cyril Imbert	
John Nash reloaded	page 28
Cyril Imbert	

Le théorème d'Evans–Krylov _____	page 29
Cyril Imbert	
Formule de Bowen pour la dimension de Hausdorff des ensembles de Julia _____	page 30
Malo Jézéquel	
La loi du demi-cercle de Wigner _____	page 31
Joseph Lehec	
Le théorème de Dvoretzky _____	page 32
Joseph Lehec	
Spectres de graphes _____	page 33
Bertrand Maury	
Combinatoire additive _____	page 34
Ariane Mézard	
Capacité d'approximation des réseaux de neurones profonds _____	page 35
Gabriel Peyré	
Le problème de Banach–Ruziewicz _____	page 36
Salim Tayou	

Dimension de Hausdorff des sous-anneaux de \mathbb{R}

TIMOTHÉE BÉNARD
timothee.benard@ens.fr

La dimension de Hausdorff est un outil qui permet d'évaluer la taille d'objets très généraux, et généralise la notion de dimension habituelle (d'un sous-espace vectoriel, d'une variété, etc.). Dans l'idée, on dit qu'une partie de \mathbb{R}^n est de dimension de Hausdorff $d > 0$, si pour tout $r > 0$ assez petit, le nombre $N(r)$ de boules de rayon $r > 0$ nécessaires pour la recouvrir est de l'ordre de $1/r^d$. Par exemple, on peut montrer que l'ensemble de Cantor est de dimension $\frac{\log 2}{\log 3}$, ou encore qu'une trajectoire typique du mouvement Brownien dans \mathbb{R}^n (avec $n \geq 2$) est de dimension 2.

En 1960, Volkmann pose la question suivante :

Existe-t-il un sous-anneau de \mathbb{R} dont la dimension de Hausdorff est strictement comprise entre 0 et 1 ?

En 1966, Erdős et Volkmann montrent l'existence de sous-groupes de dimension intermédiaire, mais la question des sous-anneaux reste ouverte. Après un certains nombres de résultats partiels, une réponse est donnée en 2002 par Edgar et Miller :

Tout sous-anneau mesurable de \mathbb{R} est de dimension 0 ou bien \mathbb{R} tout entier.

Le but de ce mémoire sera de comprendre la preuve de ce résultat, ainsi que les bases de théorie géométrique de la mesure sous-jacentes.

Bibliographie

- [1] R. D. Mauldin. Subfields of \mathbb{R} with arbitrary Hausdorff dimension. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 161, 1, 157–165. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2016
- [2] P. Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: fractals and rectifiability*. Cambridge Univ. Press 1999
- [3] K. Falconer. *Fractal geometry : Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, 2004
- [4] G. Edgar et C. Miller. Borel subrings of the reals. *Proc. American Math. So.* 131, 4, 1121–1129, 2003

Nombres algébriques de petite hauteur

OLIVIER BENOIST
olivier.benoist@ens.fr

À tout nombre algébrique $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, on peut associer un nombre réel positif $h(\alpha)$, sa *hauteur*, qui mesure sa complexité arithmétique.

Dans ce mémoire, on démontrera un théorème de Yuri Bilu [1] selon lequel les racines d'une suite de polynômes irréductibles à coefficients rationnels s'équirépartissent sur le cercle unité si leur hauteur tend vers 0. On en déduira le théorème de Zhang décrivant les points de petite hauteur sur les sous-variétés algébriques de $\overline{\mathbb{Q}}^n$.

On suivra le livre [2].

Bibliographie

- [1] Y. Bilu. Limit distribution of small points on algebraic tori. *Duke Math. J.* 89, 3, 165–176, 1997
- [2] E. Bombieri et W. Gubler. *Heights in Diophantine geometry*. New Mathematical Monographs 4. Cambridge University Press, Cambridge, 2006

Chaînes de Markov et réseaux électriques

MAXIME BERGER
maxime.berger@ens.fr

Une chaîne de Markov est un processus aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ caractérisé par la propriété suivante : connaissant toute la trajectoire $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$, la loi de la variable aléatoire X_{n+1} ne dépend que de la valeur de x_n . Certaines de ces chaînes peuvent être décrites par un graphe dont les sommets sont associés à des valeurs réelles et les arêtes sont les probabilités de transition de la chaîne.

Il est possible d'interpréter ces graphes comme un réseau électrique : les probabilités de transition associées aux arêtes sont alors vues comme des conductances (inverse de la résistance). Nous pouvons ensuite définir ce qu'est un courant ou un potentiel. L'analogie va même jusque dans les théorèmes : nous retrouverons des énoncés équivalents à la Loi d'Ohm, à la Loi des noeuds, des mailles, etc. Ces calculs nous fourniront beaucoup d'informations sur la chaîne de Markov initiale : temps d'atteinte ou de sortie, temps de mélange. Nous pourrions même déterminer la probabilité pour que la chaîne revienne à son point de départ.

Plusieurs directions seront possibles, nous pourrions re-démontrer un théorème de Polya qui caractérise la récurrence de la marche aléatoire simple. Nous pourrions déterminer le nombre de fois qu'il faut battre un jeu de cartes pour qu'il soit bien mélangé et nous intéresser au phénomène de cut-off. Ou encore déterminer le nombre de paquets de céréales qu'il faut acheter pour collectionner toutes nos figurines préférées.

Bibliographie

- [1] A. Levin, E. Wilmer et Y. Peres. Markov Chains and mixing time
- [2] R. Lyons et Y. Peres. Probabilities on Trees and Networks
- [3] P. Diaconis. The cutoff phenomenon in finite Markov chains

Régularité des courbes minimisantes

PATRICK BERNARD
patrick.bernard@ens.fr

De nombreux problèmes mathématiques et physiques se réduisent à la minimisation de fonctionnelles (par exemple la longueur, l'action, ..) Le but de ce sujet consistera à étudier la méthode variationnelle directe dans le cas de courbes minimisantes. C'est à dire que l'on cherche à montrer l'existence de courbes minimisantes et à étudier les propriétés de ces courbes. En général, on s'attend par des calculs formels à ce qu'elles vérifient une équation différentielle. Mais comme il est souvent impossible de montrer directement l'existence de minimiseurs dans des espaces de courbes régulières, il faut commencer par étudier le classique problème de la régularité des minimiseurs, ce qui sera l'objet principal de cet exposé.

Bibliographie

- [1] G. Buttazo, M. Giaquinta et S.Hildebrandt. One dimensional variational problems: an introduction. Oxford lecture series, Oxford , 1998 (en particulier le chapitre 4)
J. Mather. Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems, appendices. Math. Z. 207, 1, 169–207, 1991

Introduction à la géométrie tropicale

THOMAS BLOMME
thomas.blomme@ens.fr

La géométrie tropicale peut naïvement être vue comme la géométrie qu'on obtient en remplaçant les opérations "+" et "x" par "max" et "+". Ces opérations ne sont pas anodines car elles proviennent des valuations sur un corps. Ce simple fait permet à la géométrie tropicale de conserver de nombreuses propriétés des objets algébriques classiques, comme le théorème de Bezout qui affirme que deux courbes de degré d et d' ont dd' points d'intersection. En plus de simplifier considérablement les preuves de tels énoncés, cette relation tisse un lien entre les géométries classiques et tropicales, permettant la résolution de problèmes relevant de la géométrie classique par des méthodes tropicales. Le mémoire propose une introduction à la géométrie tropicale dans le but de retrouver un résultat de géométrie "classique" à l'aide d'un théorème de correspondance.

Bibliographie

- [1] E. Brugallé et K.Shaw. A bit of tropical geometry. arxiv.org/abs/1311.2360

Tas de sable et géométrie tropicale

THOMAS BLOMME
thomas.blomme@ens.fr

Très brièvement et très naïvement, la géométrie tropicale peut être vue comme la géométrie obtenue en remplaçant les opérations $+$ et \times par \max et $+$. Les objets géométriques classiques deviennent alors des objets affine par morceaux contenant des informations plus combinatoires que leurs analogues classiques. Les tas de sable sont une famille de systèmes dynamiques discrets : on place des grains de sable sur une grille, on en rajoute quelques grains à certains endroits, ce qui a pour effet de créer des avalanches, il faut alors attendre que la situation se stabilise. Le mémoire se propose d'étudier une des surprenantes relations entre la géométrie tropicale et ce système, qui sont pour le moment encore nombreuses à être incomprises : en un sens à détailler, les avalanches qui résultent de l'ajout de grains de sables sur la configuration maximale convergent vers une courbe tropicale.

Pour illustrer le mémoire, quelques compétences basiques en codage pourraient permettre de réaliser de jolies images.

Bibliographie

- [1] N. Kalinin et M. Shkolnikov. Tropical curves in sandpiles. arxiv.org/pdf/1509.02303.pdf
- [2] Tropical sandpile. <https://www.youtube.com/watch?v=7hC-vUuhb7c>

Concentration de la mesure pour les gaz de Coulomb

FRANÇOIS BOLLEY
francois.bolley@upmc.fr

Si x_1, \dots, x_N sont N variables aléatoires indépendantes de loi commune μ , la loi des grands nombres et le théorème central limite sont les premiers outils permettant de mesurer l'écart (la déviation) entre la mesure empirique

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$$

et la loi commune. Ces bornes de déviation peuvent alors être précisées par des outils de concentration de la mesure, qu'on appelle inégalités fonctionnelles : ainsi peut-on obtenir des estimées telles que

$$\mathbb{P} \left[\text{dist} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}, \mu \right) > r \right] \leq e^{-CNr^2}, r > 0, N \geq 1$$

pour une distance “dist” mesurant l'écart entre mesures de probabilité.

On se propose ici d'étudier de telles bornes de déviation, non plus pour des variables indépendantes, mais pour des variables de \mathbb{R}^2 (par exemple) dont la loi jointe est de la forme

$$\frac{1}{Z_N} e^{-\beta H_N(x_1, \dots, x_N)} dx_1 \dots dx_N.$$

Ci-dessus Z_N est la constante de normalisation et

$$H_N(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i \neq j} \ln \frac{1}{|x_i - x_j|} + N \sum_{i=1}^N |x_i|^2,$$

le potentiel $\ln(1/|\cdot|)$ étant le potentiel coulombien de \mathbb{R}^2 . Cette loi jointe est appelée un gaz de Coulomb et apparaît naturellement dans des modèles de physique statistique et de matrices aléatoires.

Dans ce mémoire on propose

- i) d'étudier l'origine de ces modèles (à l'aide de [1] par exemple),
- ii) de se familiariser avec les outils classiques dans le cas de variables indépendantes (à l'aide de [3] par exemple),
- iii) de voir comment ces outils peuvent être adaptés à ce modèle (à l'aide de [2] par exemple).

Bibliographie

- [1] G. Anderson, A. Guionnet et O. Zeitouni. An introduction to random matrices. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [2] D. Chafaï, A. Hardy et M. Maïda. Concentration for Coulomb gases and Coulomb transport inequalities. J. Functional Analysis 275, 6, 15, 1447–1483, 2018.
- [3] M. Ledoux. The concentration of measure phenomenon. American Math. Society, Providence, 2001.

Inégalités fonctionnelles et équation de Fokker–Planck

FRANÇOIS BOLLEY ET ISABELLE TRISTANI
francois.bolley@upmc.fr, isabelle.tristani@ens.fr

Ce travail portera sur des inégalités fonctionnelles classiques (Nash, Poincaré, Log-Sobolev) et des applications aux équations aux dérivées partielles de la chaleur et de Fokker–Planck. On pourra commencer par étudier le lien entre ces deux équations. Puis, on verra comment les inégalités fonctionnelles ci-dessus permettent d’obtenir des propriétés qualitatives des solutions des équations, notamment sur leur comportement en temps grand. Une extension possible de ce travail est de généraliser ce qui précède au cas de l’équation de la chaleur fractionnaire.

Bibliographie

- [1] D. Bakry, F. Barthe, P. Cattiaux et A. Guillin. A simple proof of the Poincaré inequality for a large class of probability measures including the log-concave case. *Electron. Commun. Probab.* 13, 60-66, 2008.
- [2] J. Nash. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *Amer. J. Math.* 80, 931–954, 1958.
- [3] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto et G. Scheffer. Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques. *Panoramas et Synthèses Vol. 10*. Société Mathématique de France, Paris, 2000.

Compressed sensing (vs. Deep Learning ?)

CLAIRE BOYER
claire.boyer@upmc.fr

Dans de nombreux problèmes scientifiques ou d'ingénierie, on cherche à trouver des solutions à des systèmes d'équations linéaire sous-déterminés. Le compressed sensing est un champ des mathématiques [1] y apportant des réponses qui a connu un véritablement retentissement (cf Figure 1 représentant le nombre de hits pour “compressed sensing” dans Google Scholar) de par la promesse de la réduction de temps d'acquisition dans de nombreuses applications : traitement du signal, et de l'image (imagerie médicale...), machine learning, système de recommandation (reconstruction de matrices de faible de rang),... C'est en tout cas une belle théorie mathématique à la croisée de la statistique, de l'optimisation, des probabilités et des problèmes inverses. Le lecteur pourra se référer à l'article [2] d'Emmanuel Candès (Stanford), et au livre de Simon Foucart et Holger Rauhut [1].

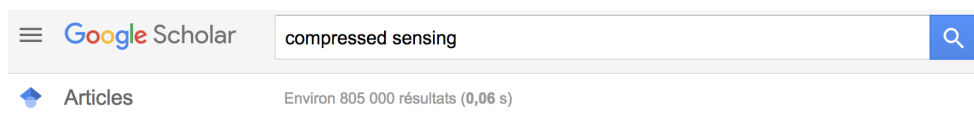


Figure 1: Le nombre d'entrées pour “compressed sensing” dans Google Scholar.

Afin de se familiariser avec de beaux outils théoriques probabilistes, nous étudierons dans un premier temps le papier [3] établissant des transitions de phase pour la reconstruction de différents objets, dans le cadre du compressed sensing. Ces transitions de phase sont caractérisées par des largeurs gaussiennes de cône de descente. On pourra alors même réfléchir à une question ouverte sur la caractérisation de ces largeurs pour des lois de probabilité plus structurées que la loi normale.

Si le temps nous le permet, nous étudierons le papier [4] qui met en compétition la théorie du compressed sensing avec la stabilité des réseaux neuronaux, (pour information cf Figure 2 représentant le nombre de hits pour “deep learning” dans Google Scholar).



Figure 2: Le nombre d'entrées pour “deep learning” dans Google Scholar.

Mots-clés : compressed sensing, largeur gaussienne, transition de phase, deep learning

Bibliographie

- [1] S. Foucart et H. Rauhut. A mathematical introduction to compressive sensing. Springer, 2013
- [2] E. Candès. Mathematics of sparsity (and a few other things). Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Seoul, 123, 2014
- [3] D. Amelunxen, M. Lotz, M. B. McCoy et J. A. Tropp. Living on the edge: Phase transitions in convex programs with random data. Information and Inference: A Journal of the IMA 3, 3, 224-294, 2014
- [4] N. M. Gottschling, V. Antun, B. Adcock et A. C. Hansen. The troublesome kernel: why deep learning for inverse problems is typically unstable. arXiv:2001.01258, 2020

Du transport optimal et de son utilisation dans les réseaux de neurones

CLAIRE BOYER
claire.boyer@upmc.fr

Le transport optimal [1] est une théorie s'intéressant à l'appariement optimal entre deux mesures de probabilité au sens d'un certain coût, ceci définissant une certaine distance. Outre les beaux concepts mathématiques introduits, des relaxations de ce problème ont permis d'envisager des algorithmes efficaces pour évaluer ces distances de transport.

Après s'être familiarisés avec cette théorie, nous nous intéresserons à l'utilisation des distances de transport dans deux structures de réseaux neuronaux tels que les VARIational Auto-Encoder (VAE) [2], et les Generative Adversarial Networks (GAN) [3].

Mots-clés : transport optimal, réseaux de neurones, VAE, GAN, optimisation, apprentissage

Bibliographie

- [1] G. Peyré et M. Cuturi. Computational optimal transport. Foundations and Trends® in Machine Learning 11, 5-6, 155–607. Now Publishers, Inc. 2019
- [2] I. Tolstikhin, O. Bousquet, S. Gelly, Sylvain et B. Schoelkopf. Wasserstein auto-encoders. arXiv:1711.01558, 2017
- [3] M. Arjovsky, S. Chintala et L. Bottou. Wasserstein gan. arXiv:1701.07875, 2017

Convergence de la forme limite pour le modèle de dimères sur le réseau hexagonal

DMITRY CHELKAK ET RÉMY MAHFOUF
remy.mahfouf@ens.fr

Que ce passe-t-il lorsque l'on pave aléatoirement un (grand) graphe bipartite, par des dominos de taille 2×1 ? Cette question posée par Kasteleyn est un sujet d'étude encore très actif, popularisé en particulier par Richard Kenyon et ses co-auteurs. On peut relier bijectivement le pavage à une fonction dite de "hauteur", dont les fluctuations convergent vers le champ libre gaussien, mais aussi l'interpréter comme une surface aléatoire en grande dimension, dont la forme limite converge vers un objet concret. On se propose de démontrer ce résultat lorsque le modèle est tiré sur le réseau hexagonal du plan.

Bibliographie

- [1] R. Kenyon. Lectures on Dimers. Arxiv : 0910.3129

Cohérence de PA_1

ADRIEN DELORO
adrien.deloro@imj-prg.fr

En 1936, Gentzen publiait une preuve de cohérence de l'arithmétique du premier ordre ; c'était cinq ans après l'annonce du second théorème d'incomplétude ; il n'y a pas là de contradiction.

Théorème (Gentzen). La cohérence de PA_1 est démontrable dans une théorie naturelle.

Évidemment la démonstration ne s'appuie pas sur PA_1 . Elle se déroule dans une théorie qui n'est pas extension de PA_1 : il suffit d'une arithmétique (finie) basique et d'un peu de récurrence ordinale basse (donc un fragment remarquablement faible d'ensemblisme). Le *Hauptsatz* de Gentzen éliminant les coupures dans le formalisme du calcul des séquents, que l'on découvrirait pour l'occasion, est un outil central.

Ce stage consoleraient du cours de logique et servirait d'ultime adieu à Kurt Gödel. Attention : plus proche de la théorie de la démonstration il est plus pauvre en intuition géométrique. Après pareil sujet, on revient aux mathématiques ou l'on entre en informatique (sans moi).

Le texte d'Horská semble très élémentaire. Le livre de Takeuti est classique.

Bibliographie

- [1] G. Takeuti. Proof theory. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 81. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987
- [2] A. Horská. Where is the Gödel-point hiding: Gentzen's consistency proof of 1936 and his representation of constructive ordinals. SpringerBriefs in Philosophy. Springer, Cham, 2014

Catégoricité : le théorème de Morley

ADRIEN DELORO
adrien.deloro@imj-prg.fr

On ne confondra surtout pas avec un résultat néo-classique de géométrie l'énoncé suivant.

Théorème (Morley). Si T dénombrable est κ -catégorique en un $\kappa \geq \aleph_1$, alors elle l'est en tous.

Ce théorème a donné à la théorie des modèles une direction imprévue et bien féconde : en retombant sur la dimension de Zariski, Morley initiait sans le savoir la théorie géométrique des modèles, i.e. le rattachement de la théorie des modèles alors branche de la logique, aux mathématiques. Après la preuve, maintenant bien balisée, de ce résultat, l'encadrant peut envisager toutes sortes de développements.

Bibliographie

- [1] D. Marker. Model theory: An Introduction. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New-York, 2017
- [2] K. Tent et M. Ziegler. A course in model theory. Lecture Notes in Logic 40. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012

Forcing : en avoir fait

ADRIEN DELORO
adrien.deloro@imj-prg.fr

Le but serait d'entrevoir le forcing — non pour s'y adonner par la suite, mais pour satisfaire une curiosité légitime.

La technique des modèles intérieurs, comme son nom l'indique, procède par sous-collections pour la relation induite : on *restreint*, ce qui ne donne qu'une faible marge de manœuvre. Le forcing en revanche *augmente* le modèle en y ajoutant de nouveaux objets. Mener une preuve de forcing suppose bien sûr de travailler dans un modèle ambiant, depuis lequel on s'ingénie à contrôler finement la combinatoire de l'extension de (petits) modèles. Un but raisonnable est le résultat historique.

Théorème (Cohen). Si ZF est cohérente, alors $ZFC \cup \{2^{\aleph_0} = \aleph_2\}$ aussi.

Depuis sa démonstration en 1963, les expositions ne manquent pas. Le livre de Kunen (chapitre VII dans la première édition), celui de Dehornoy semblent indiqués. Nombreuses références possibles.

Bibliographie

- [1] P. Cohen. The discovery of forcing. Proceedings of the Second Honolulu Conference on Abelian Groups and Modules (Honolulu, 2001). Rocky Mountain J. Math. 32, 4, 1071–1100, 2002
- [2] P. Dehornoy. La théorie des ensembles. Introduction à une théorie de l'infini et des grands cardinaux. Tableau Noir 106. Calvage et Mounet, Paris, 2017
- [3] K. Kunen. Set theory. Studies in Logic 34. College Publications 34, London, 2011

Le théorème de Hasse–Minkowski

ANTOINE DUCROS
antoine.ducros@ens.fr

Sur le corps \mathbf{Q} on dispose de la valeur absolue usuelle, pour laquelle il n'est pas complet ; lorsqu'on le complète, on obtient \mathbf{R} . Mais on peut également définir des valeurs absolues plus exotiques : à chaque nombre premier p est associée une telle valeur absolue, que l'on appelle la valeur absolue *p -adique* ; lorsqu'on complète \mathbf{Q} pour cette dernière, on obtient le corps \mathbf{Q}_p des *nombre p -adiques*.

Le théorème de Hasse–Minkowski affirme alors la chose suivante : soit $q = \sum a_i X_i^2$ un polynôme appartenant à $\mathbf{Q}[X_1, \dots, X_n]$, où les a_i sont tous non nuls. Supposons que l'équation $q = 0$ a une solution non triviale, c'est-à-dire différente de $(0, \dots, 0)$, dans \mathbf{R} ainsi que dans chacun des \mathbf{Q}_p ; elle a alors une solution non triviale dans \mathbf{Q} . Autrement dit, q vue comme forme quadratique sur \mathbf{Q} est isotrope si et seulement si elle est isotrope comme forme quadratique réelle et comme forme quadratique p -adique pour tout p .

Au-delà de son intérêt théorique, ce théorème est relativement effectif, car un algorithme permet de décider si q est isotrope sur \mathbf{R} et sur tous les \mathbf{Q}_p . Par exemple si $n \geq 5$, on démontre que l'isotropie sur \mathbf{Q}_p est automatique ; la forme q est donc isotrope sur \mathbf{Q} si et seulement si elle l'est sur \mathbf{R} , donc si et seulement si les a_i ne sont pas tous de même signe.

Le but du travail proposé serait de lire complètement la preuve de ce théorème, ce qui suppose évidemment de bien comprendre les objets qu'il met en jeu, et notamment les corps p -adiques. Il faudra donc commencer par étudier la construction de \mathbf{Q}_p , ses propriétés algébriques élémentaires (description des carrés de \mathbf{Q}_p , puis des espaces quadratiques sur \mathbf{Q}_p à isométrie près), avant de passer à la preuve du théorème lui-même. Elle repose sur deux résultats arithmétiques profonds qu'on étudiera au passage, la *loi de réciprocité quadratique* et le *théorème de la progression arithmétique* (la preuve de ce dernier fait appel à un peu d'analyse complexe).

Prérequis et références. Nous utiliserons certains points du cours d'algèbre 1, notamment en ce qui concerne les formes quadratiques ; et certains points du cours à venir d'analyse complexe (utiles pour la preuve du théorème de la progression arithmétique, qu'on pourra si nécessaire admettre dans un premier temps).

Notre référence principale sera le *Cours d'arithmétique* de Jean-Pierre Serre (Deuxième édition revue et corrigée. Le Mathématicien, No. 2. Presses Universitaires de France, Paris, 1977). Il pourra être utile de consulter également *Théorie des nombres* de Z. Borevitch et I. Chafarevitch (Traduction faite d'après l'édition originale russe. Monographies Internationales de Mathématiques Modernes, No. 8 Gauthier-Villars, Paris 1967) ainsi que *Les nombres p -adiques* de Y. Amice (Collection SUP: Le Mathématicien, No. 14. Presses Universitaires de France, Paris, 1975.).

Fonctions complètes de croissance des groupes

ANNA ERSCHLER
anna.erschler@ens.fr

La fonction de croissance compte le nombre d'éléments du groupe de la longueur donnée dans la métrique des mots. Cette fonction dépend de la partie génératrice choisie. En général, on étudie le comportement asymptotique et propriétés de cette fonction, et souvent il n'y a aucune chance de donner une formule précise. Cependant, une telle formule pour la fonction de croissance peut être donnée si la fonction génératrice de la fonction de croissance est rationnelle, cette propriété de régularité forte est vérifiée par exemple pour les générateurs standards des groupes de Coxeter, groupes de Baumslag Solitar résolubles, et pour n'importe quelle partie génératrice des groupes hyperboliques. Dans ce dernier cas, la propriété encore plus forte est vérifiée : la fonction complète de croissance $f(z) = \sum_{g \in G} gz^{l(g)}$ est rationnelle pour chaque partie génératrice. Par exemple, on peut calculer la fonction complète de croissance pour les groupes fondamentaux des surfaces.

Bibliographie

- [1] R. Grigorchuk et T. Nagnibeda. Complete growth functions of hyperbolic groups. *Invent. Math.* 130, 1, 159–188, 1997
- [2] W. Parry. Growth series of some wreath products. *Trans. Amer. Math. Soc.* 331, 2, 751–759, 1992

Données aberrantes et MOM (médiane et moyennes) en apprentissage statistique

STÉPHANE GAÏFFAS
stephane.gaiffas@ens.fr

La grande majorité des méthodes d'apprentissage statistique reposent sur un principe de minimisation du risque empirique, qui amène à un problème d'optimisation de moyenne de fonctions de "perte" associées à chaque échantillon de données, sous l'hypothèse fondamentale que les données sont indépendantes et identiquement distribuées. Par ailleurs, un problème récurrent en science des données est la présence de données aberrantes, ce qui contredit cette hypothèse fondamentale, qui est à la base de la plupart des garanties théoriques disponibles dans la littérature pour les méthodes d'apprentissage statistique.

Des méthodes dites "robustes" ont été développées depuis les années 70 pour rendre les méthodes d'apprentissage moins sensibles aux données aberrantes. Un des principes considérés dans ce cadre est l'utilisation de médiane de moyennes (MOM=Median Of Means) à la place de moyennes de fonctions de perte pour mesurer la qualité de l'attache aux données d'une procédure, et des travaux récents tels que [1] et [2] proposent une étude théorique du principe MOM dans le cadre général de l'apprentissage supervisé.

Le travail proposé dans ce mémoire est donc d'étudier la procédure MOM tant d'un point de vue théorique qu'appliqué, en produisant des expériences illustrant la robustesse de cette approche (notamment en comparaison avec des approches reposant sur une modification des fonctions de perte) et l'étude des garanties théoriques proposées pour MOM.

Bibliographie

- [1] G. Lecué et M. Lerasle. Robust machine learning by median-of-means : theory and practice. <http://arxiv.org/abs/1711.10306>
- [2] G. Lecué, M. Lerasle et T. Mathieu. Robust classification via MOM minimization. <http://arxiv.org/abs/1808.03106>

Théorèmes de restriction de la transformée de Fourier

ISABELLE GALLAGHER
isabelle.gallagher@ens.fr

On peut définir la transformée de Fourier d'une fonction f dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ par

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx .$$

L'application $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)$ est continue, et l'on peut donc prendre sa restriction à n'importe quel sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On peut aussi définir, par un procédé d'approximation, la transformée de Fourier d'une fonction f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \geq 1$ et montrer (c'est le théorème de Hausdorff–Young) que l'application $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)$ est dans $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. La restriction de \widehat{f} à tout sous-ensemble Σ de mesure de Lebesgue nulle dans \mathbb{R}^n est alors complètement arbitraire. Tomas et Stein ont pourtant découvert que cette restriction fait sens, dès que $p > 1$ est suffisamment proche de 1, si Σ est une hypersurface avec suffisamment de courbure. Le “problème de la restriction” consiste donc à savoir, pour une hypersurface Σ donnée munie d'une mesure régulière $d\sigma$, pour quelles paires (p, q) l'application

$$f \mapsto \widehat{f}_\Sigma$$

est continue de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^q(\Sigma, d\sigma)$.

Cette question n'est pas complètement résolue à ce jour. Ses applications vont de l'analyse des Equations aux Dérivées Partielles : théorèmes de dispersion et de Strichartz pour les équations des ondes ou de Schrödinger par exemple (qui permettent de résoudre ces équations dans certains cas) à l'Analyse Harmonique : le problème de Kakeya (chercher l'aire minimale d'une région du plan telle que l'on puisse y faire tourner continûment un segment unité d'un tour complet) et la conjecture de Kakeya (autour de la taille de ces régions en dimension supérieure).

Bibliographie

- [1] R. Strichartz. Restriction Fourier transform of quadratic surfaces and decay of solutions of the wave equations. *Duke Math. Journal* 44, 705-714, 1977
- [2] T. Tao. Notes de cours <https://www.math.ucla.edu/~tao/254b.1.99s/>
- [3] T. Tao. Some recent progress on the restriction conjecture. *Fourier Analysis and Convexity. Appl. Numer. Harmon. Anal.*, Birkhauser Boston, 217-243, 2004
- [4] P. A. Tomas. A restriction theorem for the Fourier transform. *Bull. Amer. Math. Soc.* 81, 477-478, 1975

Meilleure constante dans l'inégalité de Sobolev

LOUISE GASSOT
louise.gassot@ens.fr

Les inégalités de Sobolev sont fondamentales en équations aux dérivées partielles ou en calcul des variations, et une littérature abondante sur le sujet est disponible. Le but du mémoire est d'étudier la meilleure constante possible C dans l'inégalité de Sobolev sur \mathbb{R}^n

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

où $1 < p < n$, $q = \frac{np}{n-p}$, et u est une fonction suffisamment régulière et suffisamment décroissante à l'infini. On se propose de classifier les fonctions pour lesquelles cette meilleure constante est atteinte. Les fonctions qui minimisent le quotient

$$J(u) = \frac{\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}}$$

sont de la forme

$$u(x) = (a + b\|x\|^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}}$$

pour des constantes a et b strictement positives. Ce résultat a été établi par T. Aubin et G. Talenti en 1976.

On étudiera ici la preuve de G. Talenti [1]. Les techniques employées font intervenir le réarrangement symétrique d'une fonction, les fonctions à variation bornée, la dimension de Hausdorff, l'inégalité isopérimétrique et des notions d'analyse fonctionnelle. Une preuve de l'inégalité de Sobolev peut être lue à cette occasion.

Bibliographie

- [1] G. Talenti. Best constant in Sobolev inequality. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 110, 1, 353–372, 1976.

An introduction to disordered systems: the pinning models

Une introduction aux systèmes désordonnés : les modèles d'accrochage

GIAMBATTISTA GIACOMIN
giambattista.giacomin@ens.fr

What happens to a simple symmetric random walk if we reward (or if we penalize) the passages through the origin? This problem can be restated for general Markov processes and can be fully solved. It turns out that this mathematical problem is just a way of presenting a physical model that has been proposed in the study of several phenomena (connected for example to polymers, interfaces, and more). The model becomes more realistic, and substantially more challenging, if the reward (or penalty) is not constant, notably if it is chosen as the realization of a random (disordered) sequence. At this level there is some mathematics [5] to be understood in order to properly define the model in the limit of very large systems: if working with random walks, the size of the system is the length of the walk. Going beyond is challenging, but some results should be at reach, notably the analysis of the irrelevant disorder regime following [4] and/or the smoothing inequality [3, 1]. All these topics are also contained in [2].

Bibliographie

- [1] F. Caravenna and F. den Hollander. A general smoothing inequality for disordered polymers, *Electron. Commun. Probab.* 18, 1-15, 2013
- [2] G. Giacomin. Disorder and critical phenomena through basic probability models. *École d'été de probabilité de Saint-Flour XL-2010. Lecture Notes in Mathematics 2025*, Springer, 2011
- [3] G. Giacomin and F. L. Toninelli. Smoothing effect of quenched disorder on polymer depinning transitions. *Commun. Math. Phys.* 266, 1-16, 2006
- [4] H. Lacoin. The martingale approach to disorder irrelevance for pinning models. *Electron. Commun. Probab.* 15, 418-427, 2010
- [5] J. F. C. Kingman. Subadditive Ergodic Theory. *Ann. Probab.* 1, 882-909, 1973

Entrelacs homotopiques

GEOFFROY HOREL
horel@math.univ-paris13.fr

Un nœud est un plongement différentiable f de l'intervalle $[0,1]$ vers la boule de dimension 3 dont les deux extrémités sont deux points fixés distincts du bord de la boule. Le but de la théorie des noeuds est de classifier l'ensemble des nœuds à déformation près. Cette classification est très loin d'être achevée à l'heure actuelle.

On peut plus généralement considérer les entrelacs. Un entrelacs à n brins est un plongement de l'union disjointe de n copies de l'intervalle dans la boule de dimension 3 où les extrémités de chaque intervalle sont des points prescrits et disjoints du bord. Là encore on peut se poser la question de la classification des entrelacs à déformation près. Chaque brin forme un nœud mais en plus les brins peuvent être noués les uns aux autres de manière non-triviale. La théorie des entrelacs est donc strictement plus difficile que la théorie des nœuds.

Cependant de façon surprenante, la théorie des entrelacs modulo la théorie des noeuds est bien comprise. Précisément, on peut considérer les entrelacs homotopiques : dans ce contexte on autorise les déformations où les brins s'autointersectent mais on interdit toujours deux brins distincts de s'intersecter. On ignore donc la complexité de chaque brin individuellement mais on retient les interactions entre brins distincts. Les travaux de thèse de Milnor suivis d'un papier de Habegger et Lin ont permis de donner une classification complète des entrelacs homotopiques en termes d'automorphismes de groupes libres. Le but du mémoire sera de comprendre ce théorème.

Bibliographie

- [1] J. Milnor. Link groups. *Ann. of Math.* (2) 59, 77–195, 1954.
- [2] N. Habegger et X.-S. Lin. The classification of links up to link-homotopy. *J. Amer. Math. Soc.* 3, 2, 389–419, 1990.

La construction de Thom–Pontryagin

GEOFFROY HOREL
horel@math.univ-paris13.fr

Un cobordisme entre deux variétés compactes M et N de dimension n est une variété à bord W de dimension $(n + 1)$ dont le bord est l’union disjointe de M et N . On dit que deux variétés sont cobordantes s’il existe un cobordisme entre elles. Deux variétés difféomorphes sont cobordantes mais la réciproque n’est pas vraie : par exemple un cercle est cobordant à l’union disjointe de deux cercles (le cobordisme est donné par une surface en forme de pantalon). L’ensemble des variétés de dimension n modulo la relation de cobordisme est un groupe pour l’union disjointe qu’on appelle groupe de cobordisme de dimension n .

Pontryagin et Thom ont introduit une construction très élégante qui permet d’interpréter les groupes de cobordismes comme les groupes d’homotopie de certains espaces. En utilisant des outils de topologie algébrique, on peut alors calculer ces groupes de cobordismes. Dans l’autre sens, cette construction permet de donner un sens géométrique à certains groupes d’homotopie. En particulier, on peut interpréter les groupes d’homotopie des sphères comme des groupes de cobordismes.

Le but du mémoire sera de comprendre cette construction et de l’utiliser pour effectuer un “calcul géométrique” de certains groupes d’homotopie des sphères.

Bibliographie

- [1] J. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*.
- [2] J. Milnor et J. Stasheff. *Characteristic classes*.
- [3] R. Thom. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Comment. Math. Helv.* 28, 17–86, 1954.

Régularité partielle pour les équations de Navier–Stokes

CYRIL IMBERT
cyril.imbert@ens.fr

Les équations de Navier–Stokes décrivent le mouvement d’un fluide visqueux. Jean Leray a construit en 1934 des solutions faibles et la question de la régularité de ces solutions est un des problèmes du millénaire. Scheffer a commencé une étude de la régularité partielle de ces solutions dans une série d’articles entre 1976 et 1980. Il s’agit d’estimer la taille des points autour desquels la solution n’est pas régulière. En 1982, Caffarelli, Kohn et Nirenberg améliorèrent ces résultats dans un article célèbre. Vasseur a proposé une nouvelle démonstration de ce résultat en 2007 qui repose sur les méthodes développées par E. De Giorgi pour la résolution du 19ème problème de Hilbert.

Bibliographie

- [1] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg. Partial regularity for suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations. *Comm. Pure Applied Math.* 1982
- [2] A. F. Vasseur. A new proof of partial regularity of solutions to Navier–Stokes equations. *NoDEA* 2007

Résolution du 19ème problème de Hilbert

CYRIL IMBERT
cyril.imbert@ens.fr

En 1956, E. De Giorgi résolvait le 19ème problème de Hilbert sur les minimiseurs locaux de fonctionnelles intégrales. Pour ce faire, il développe une nouvelle théorie de la régularité elliptique. Quelques mois plus tard, J. Nash obtient le même résultat par un autre chemin. Cet article (en italien) aura une influence considérable. Il s'agira de comprendre la démonstration de De Giorgi comme exposée par exemple dans les notes d'Alexis Vasseur en bibliographie.

Bibliographie

- [1] E. de Giorgi, Sull'analiticità delle estremali degli integrali multipli. Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Ser. 8, vol. 20, pp. 438-441, 1956
- [2] A. F. Vasseur. The DeGiorgi method for elliptic and parabolic equations and some applications. Notes de cours (Beijing).

John Nash reloaded

CYRIL IMBERT
cyril.imbert@ens.fr

En 1957, J. Nash résolvait indépendamment de De Giorgi (mais quelques mois plus tard) le 19ème problème de Hilbert. Il développait dans cet article une approche différente de celle de De Giorgi, s'appuyant notamment sur l'étude de la solution fondamentale de l'équation. J. Moser démontrera en 1961 une inégalité vérifiée par les solutions du problème (dite inégalité de Harnack) qui redonne le résultat de De Giorgi et Nash. La démonstration de Nash inspirera E. B. Fabes et D. W. Stroock qui donneront une nouvelle démonstration de l'inégalité de Harnack parabolique de Moser. Il s'agira de comprendre l'article de Fabes et Stroock.

Bibliographie

- [1] J. Nash. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. American J. Math. 1958
- [2] E. B. Fabes et D. W. Stroock. A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality using the old Ideas of Nash. Archive for Rational Mechanics and Analysis 1986.

Le théorème d'Evans–Krylov

CYRIL IMBERT
cyril.imbert@ens.fr

En 1982, Evans et Krylov démontraient indépendamment que les solutions des équations elliptiques complètement non-linéaires convexes avaient des solutions classiques. Ils montraient même que l'on peut estimer le module de continuité des dérivées secondes des solutions. Il s'agira de comprendre la démonstration de ce joli résultat de régularité elliptique. On pourra suivre par exemple le cours de Caffarelli et Cabré publié en 1995 ou bien étudier une démonstration plus récente et originale de L. Caffarelli et L. Silvestre.

Bibliographie

- [1] L. C. Evans. Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 25, 333-363, 1982
- [2] N. V. Krylov. Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, ser. mat.* Vol. 46 No. 3 487-523, 1982. English translation in *Math. USSR Izvestija*, Vol. 20 No. 3, 459-492, 1983
- [3] L. A. Caffarelli et X. Cabré. Fully nonlinear elliptic equations. *Colloquium Publications* Vol. 43, American Math. Society, Providence, 1995
- [4] L. Caffarelli et L. Silvestre. On the Evans–Krylov theorem. *Proceedings of the American Math. Society*, 138(1), 263-265, 2010

Formule de Bowen pour la dimension de Hausdorff des ensembles de Julia

MALO JÉZÉQUEL
malo.jezequel@ens.fr

Les *ensembles de Julia* sont des sous-ensembles de \mathbb{C} qui apparaissent naturellement lors de l'étude de la dynamique de certaines applications holomorphes. Les ensembles de Julia fournissent de beaux exemples d'ensembles fractaux (on trouvera quelques dessins à l'adresse <http://images.math.cnrs.fr/Une-balade-parmi-les-ensembles-de-Julia.html>), cette structure géométrique riche s'expliquant par le fait que les ensembles de Julia sont invariants par des dynamiques à la fois conformes (i.e. qui préservent les angles) et chaotiques.

Le but du mémoire est d'étudier cette structure géométrique par le calcul de la *dimension de Hausdorff* des ensembles de Julia. Pour cela, on utilisera une méthode proposée par Bowen [1] basée sur le recours au *formalisme thermodynamique* [4] : certaines idées empruntées à la physique statistique se trouvent être particulièrement fructueuses pour étudier les propriétés de certains systèmes dynamiques. Aucune notion de physique statistique n'est cependant requise. Si le temps le permet, on pourra également étudier certaines des applications historiques de la formule de Bowen [1, 3].

La méthode développée par Bowen reste aujourd'hui un outil fondamental dans l'étude des propriétés fractales des ensembles définis par des dynamiques conformes, avec des applications par exemple à la théorie analytique des nombres [2].

Plutôt que les références historiques sur la formule de Bowen et ses applications citées ci-dessus, on préférera le livre plus accessible de Zinsmeister [5].

Bibliographie

- [1] R. Bowen. Hausdorff dimension of quasicircles. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 50, 11–25, 1979
- [2] O. Jenkinson et M. Pollicott Mark. Rigorous effective bounds on the Hausdorff dimension of continued fraction Cantor sets: a hundred decimal digits for the dimension of E_2 . *Adv. Math.* 325, 87–115, 2018
- [3] D. Ruelle, David. Repellers for real analytic maps. *Ergodic Theory Dynamical Systems* 2, 1, 99–107, 1982
- [4] D. Ruelle, David. *Thermodynamic formalism. The mathematical structures of equilibrium statistical mechanics.* Second edition. Cambridge Math. Library. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004
- [5] M. Zinsmeister. *Formalisme thermodynamique et systèmes dynamiques holomorphes.* Panoramas et Synthèses, 4. Société Math. de France, Paris, 1996

La loi du demi-cercle de Wigner

JOSEPH LEHEC

lehec@ceremade.dauphine.fr

On se donne une matrice symétrique M_n de taille $n \times n$ dont les entrées situées au-dessus de la diagonales sont des variables aléatoires i.i.d. centrées réduites. Un résultat fameux dû à Wigner (1955) affirme que lorsque n tend vers l'infini, la mesure empirique des valeurs propres de $\frac{1}{\sqrt{n}}M_n$, c'est-à-dire la mesure de probabilité qui affecte un poids $1/n$ à chacune des valeurs propres de la matrice, converge presque sûrement vers une mesure déterministe, portée par l'intervalle $[-2, 2]$ et dont la densité sur cet intervalle est la fonction $\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$. À un facteur multiplicatif près le graphe de la densité est donc le demi-cercle de diamètre $[-2; 2]$ situé au-dessus de l'axe des abscisses, d'où le nom de loi du demi-cercle. L'aspect le plus remarquable de ce théorème est son caractère universel : la loi limite ne dépend pas de la loi des entrées de la matrices, pourvu que celles-ci aient un second moment.

On peut démontrer ce théorème de deux manières, soit par un calcul de moments, ce qui fait intervenir des arguments combinatoires, ou par l'étude de la transformée de Stieljes qui fait appel à des arguments d'analyse complexe.

L'objectif de l'exposé sera d'étudier ces deux preuves. Si le temps le permet on pourra aussi se pencher sur des résultats reliés, comme le théorème de Bai–Yin qui prévoit que la plus grande valeur propre converge vers le bord droit du support de la loi limite.

Bibliographie

- [1] <https://terrytao.wordpress.com/2010/02/02/254a-notes-4-the-semi-circular-law/>

Le théorème de Dvoretzky

JOSEPH LEHEC

lehec@ceremade.dauphine.fr

Le théorème de Dvoretzky (1960) assure que tout espace de Banach de dimension infinie contient des sous-espaces presque euclidiens de dimension arbitrairement grande. Ce théorème a été revisité dix ans plus tard par Vitali Milman, qui a donné un résultat plus précis: tout espace de dimension n contient un sous espace presque euclidien de dimension $\log(n)$. Surtout Milman introduit dans sa démonstration la notion de concentration de la mesure, qui a eu une énorme influence par la suite, bien au-delà de la théorie des espaces de Banach.

Le sujet consistera à étudier en détails la démonstration de Milman.

Bibliographie

- [1] K. Ball. An elementary introduction to modern convex geometry. In *Flavors of geometry*, Cambridge Univ. Press, 1997
- [2] M. Ledoux. The concentration of measure phenomenon. American Math. Soc., 2001
- [3] T. Figiel, J. Lindenstrauss et V. Milman. The dimension of almost spherical sections of convex bodies. *Bull. American Math. Soc.*, vol. 82, 4, 1976

Spectres de graphes

BERTRAND MAURY
bertrand.maury@ens.fr

Les graphes, dont la théorie a suscité une littérature considérable depuis plus de deux siècles, jouent un rôle central dans la modélisation de phénomènes les plus divers: réseaux électriques, hydrauliques, phénomènes de diffusion, et plus récemment systèmes complexes en biologie, réseaux de communication, propagation d'opinion dans les réseaux sociaux, collecte des ordures ménagères, machine learning, et jusqu'à l'analyse de pièces musicales. Le Laplacien discret, opérateur canoniquement associé à tout graphe, joue un rôle central dans la plupart de ces domaines d'applications. L'objet de ce projet est l'étude, au travers de différents documents, de ce que le spectre de cet opérateur nous dit du graphe sur lequel il est défini, et de l'incidence que cela peut avoir sur le comportement du système modélisé. Les ou les domaines applicatifs privilégiés pourront être précisés au cours de l'étude en fonction des affinités des élèves, et l'étude théorique pourra être complétée par un travail d'implémentation effective sur ordinateur.

Bibliographie

- [1] F. R. K Chung, Spectral Graph Theory, CBMS 92.

Combinatoire additive

ARIANE MÉZARD

`ariane.mezard@imj-prg.fr`

La combinatoire additive est une branche de la théorie des nombres où sont étudiées des parties de l'ensemble des entiers et leur comportement vis-à-vis de l'addition. Il s'agit d'obtenir des estimations reliant sommes, différences et produits d'ensembles finis et d'établir des propriétés arithmétiques. Nous nous intéressons notamment aux progressions arithmétiques de longueur fixée k , c'est-à-dire des familles de la forme $a + jb$, j variant de 0 à $k - 1$ dans une ensemble fini E d'entiers. Le théorème de Szemerédi prédit l'existence de telles progressions arithmétiques en imposant une condition sur la densité de E dans $[1, N]$. L'objet de ce stage est de comprendre la démonstration de ce théorème pour k petit.

Bibliographie

- [1] T. Tao. Lecture notes on additive combinatorics.
<https://www.math.cmu.edu/~af1p/Teaching/AdditiveCombinatorics/Tao.pdf>

Capacité d'approximation des réseaux de neurones profonds

GABRIEL PEYRÉ
gabriel.peyre@ens.fr

Les réseaux de neurones profonds ont depuis 2012 révolutionné la vision par ordinateur et le traitement du langage naturel. Leurs propriétés théoriques sont cependant essentiellement inconnues. Ce projet a pour but d'étudier un article analysant les espaces d'approximation obtenus lorsque l'on fait croître la profondeur du réseau. Il s'agit d'un des ingrédients importants pour comprendre la capacité de généralisation de ces réseaux. Ce projet sera aussi l'occasion d'effectuer des expériences numériques pour illustrer les résultats théoriques.

Bibliographie

- [1] Rémi Gribonval, Gitta Kutyniok, Morten Nielsen, Felix Voigtlaender. Approximation spaces of deep neural networks, 2019.
<https://hal.inria.fr/hal-02117139/file/main.pdf>

Le problème de Banach–Ruziewicz

SALIM TAYOU
salim.tayou@ens.fr

Le problème de Banach–Ruziewicz [2] est la question de savoir si toute mesure de probabilité finiment additive sur la sphère unité \mathbb{S}^n ($n \geq 1$) invariante par l'action du groupe réel $O(n+1)$ est égale à la mesure de Lebesgue. Dit autrement, est-ce que l'intégrale de Lebesgue est la seule forme linéaire, à un multiple près, sur $L^\infty(\mathbb{S}^n)$ invariante par rotation?

Quand $n \geq 4$, Margulis [3] et Sullivan [5] ont montré que c'est effectivement le cas et similairement, quand $n = 2, 3$, où la réponse est due à Drinfeld [1]. A contrario, pour $n = 1$, cette mesure n'est pas unique.

Ce problème a pour origine le paradoxe de Banach–Tarski qui affirme qu'on peut décomposer la sphère \mathbb{S}^n pour $n \geq 2$ en un nombre fini de morceaux, à partir desquels on peut reconstruire deux copies de \mathbb{S}^n en utilisant uniquement des rotations. Ceci n'est pas possible pour $n = 1$.

L'objectif de ce mémoire sera d'étudier les différents aspects de ce problème en suivant l'approche de Sarnak [4, Chapitre 2].

Bibliographie

- [1] V. G. Drinfel'd. Finitely additive measures on S^2 and S^3 , invariant with respect to rotations. *Funct. Anal. Appl.* 18, 245–246, 1984
- [2] A. Lubotzky. *The Banach–Ruziewicz Problem*, 7–18. Birkhäuser Basel, Basel, 1994
- [3] G. A. Margulis. Some remarks on invariant means. *Monat. Math.* 90, 233–235, 1980
- [4] P. Sarnak. *Some applications of modular forms*. Cambridge Tracts in Mathematics 99, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990
- [5] D. Sullivan. For $n > 3$ there is only one finitely additive rotationally invariant measure on the n -sphere defined on all Lebesgue measurable subsets. *Bull. Am. Math. Soc.* 4, 121–123, 1981