TD 3 – Mesure de Lebesgue et construction de mesures

1 – Petites questions

1. Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue finie est-il borné ?
2. Un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue strictement positive est-il d'intérieur non vide ?
3. Existe-t-il un ouvert dense de $[0,1]$ de mesure de Lebesgue nulle ?
4. Existe-t-il un ouvert dense de $[0,1]$ de mesure de Lebesgue strictement inférieure à 1 ?

2 – Intégration par rapport à la mesure de Lebesgue

Exercice 1. (*Théorème fondamental de l'analyse*)

1. (a) Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$, de dérivée f' bornée. Montrer que

$$\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0).$$

   (b) Montrer qu'on ne peut pas remplacer l'hypothèse "f dérivable sur $[0,1]$" par "f dérivable presque partout sur $[0,1]$".

2. Soit $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et $f\colon]a,b[\to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est *calculus-intégrable* s'il existe $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ de dérivée f et alors on pose

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a).$$

   (a) Trouver une fonction Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$ qui n'est pas calculus-intégrable.

   (b) Trouver une fonction calculus-intégrable sur $[0,1]$ qui n'est pas Lebesgue-intégrable.

   (c) On dit que f est *Cauchy-Lebesgue-intégrable* sur $[a,b]$ s'il existe $a \le a_0 < \cdots < a_N \le b$ tels que, pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, il existe une suite croissante d'intervalles $(I_n^i)_{n\ge0}$ telle que $\bigcup_{n\ge0} I_n^i =]a_{i-1},a_i[$, f est Lebesgue-intégrable sur I_n^i pour tout $n \ge 0$ et

$$\int_{I_n^i} f(x)\,\mathrm{d}x$$

   converge quand $n \to \infty$ et alors on pose

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{i=1}^N \lim_{n\to\infty} \int_{I_n^i} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Trouver une fonction calculus-intégrable sur $[0,1]$ qui n'est pas Cauchy-Lebesgue-intégrable.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

3 – Construction de mesures

Exercice 2. (*Unicité pour les mesures σ-finies*) Soit $(E,\mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit μ et ν des mesures sur $(E,\mathcal{A})$ telles que

— il existe une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ stable par intersections finies telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$ et $\forall A \in \mathcal{C}, \mu(A) = \nu(A)$,

— il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles de $\mathcal{C}$ telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_n), \nu(E_n) < \infty$.

Montrer que $\mu = \nu$.
Remarque. Si μ est une mesure sur $(E,\mathcal{A})$, on dit que μ est *σ-finie* s'il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles de $\mathcal{A}$ tels que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_n) < \infty$.

Exercice 3. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. On suppose que pour tous $a < b$, f est intégrable sur $]a,b[$ et

$$\int_{]a,b[} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Montrer que $f = 0$ λ-p.p.

4 – Mesures régulières

Exercice 4. (*Régularité des mesures boréliennes*) Soit (E,d) un espace métrique et μ une mesure sur $(E,\mathcal{B}(E))$. On dit que μ est *extérieurement régulière* si, pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert}, A \subset U\}.$$

On dit que μ est *intérieurement régulière* si, pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact}, K \subset A\}.$$

Enfin, on dit que μ est *régulière* si elle est extérieurement et intérieurement régulière.

1. Montrer que si μ est finie, alors, pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert}, A \subset U\}\\ &= \sup\{\mu(F) : F \text{ fermés}, F \subset A\}.\end{aligned}$$

2. Que se passe-t-il si μ est seulement supposée σ-finie ?
3. Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est régulière.

5 – À chercher pour la prochaine fois

Exercice 5. On se donne deux mesures positives boréliennes μ et ν sur $\mathbb{R}$, et on suppose que pour tout choix de $a < b \in \mathbb{R}$

$$\mu(]a,b[) \leq \nu(]a,b[) < \infty.$$

Montrer alors que $\mu(A) \leq \nu(A)$ pour tout borélien A.
Indication. Utiliser la question 1 de l'exercice 4.

6 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. (*Ensembles de Cantor*) Soit $(d_n, n \geq 0)$ une suite d'éléments de $]0,1[$, et soit $K_0 = [0,1]$. On définit une suite $(K_n, n \geq 0)$ de la façon suivante : connaissant K_n, qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de chaque intervalle, de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K = \bigcap_{n\geq 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.
2. Calculer la mesure de Lebesgue de K.
3. On note K_3 l'ensemble de Cantor obtenu en posant $d_n = \frac{1}{3}$ pour tout n. Vérifier que

$$K_3 = \left\{ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} \ ; \ (a_n) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

   et qu'il est mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 7. (*L'escalier du diable*) On définit une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\geq 0}$ de $[0,1]$ dans $[0,1]$:

- Pour $x \in [0,1]$, $f_0(x) = x$.
- La fonction f_1 est la fonction affine par morceaux qui vaut 0 en 0, 1 en 1, et $\frac{1}{2}$ sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.
- On passe de même de f_n à f_{n+1} en remplaçant f_n sur chaque intervalle $[u,v]$ où elle n'est pas constante, par la fonction affine par morceaux qui vaut $\frac{f_n(u)+f_n(v)}{2}$ sur $\left[\frac{2u+v}{3}, \frac{2v+u}{3}\right]$.

On note K_3 l'ensemble de Cantor triadique défini dans l'exercice 6.

1. Dessiner f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ continue croissante.
3. Montrer que si $]a,b[\subset K_3^c$ alors f est constante sur $]a,b[$.
4. En déduire que f est presque partout dérivable de dérivée nulle.

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue :

1. Deux compacts homéomorphes de $\mathbb{R}$ ont-ils même mesure ? L'un peut-il être de mesure nulle et l'autre de mesure positive ?
2. ($\star$) Existe-t-il un borélien A de $\mathbb{R}$ tel que pour tout intervalle ouvert borné non vide I, on ait les inégalités strictes $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$?

Fin