



TD 7 : Tests du χ^2

I Tests d'ajustement

Exercice 1. On dispose de 4 pièces de monnaie, qu'on lance simultanément. On s'intéresse à la distribution du nombre X de PILE obtenus.

- 1) Si ces pièces étaient parfaites (sans biais) et indépendantes entre elles, quel serait la distribution théorique de X ?
- 2) Pour tester cette hypothèse, on itère 100 fois l'expérience. On observe le résultat suivant :

nombre de "pile"	0	1	2	3	4
observations	7	18	40	31	4

Proposer un test du χ^2 pour tester si ces observations sont compatibles avec l'hypothèse.

Exercice 2. On souhaite vérifier la qualité du générateur de nombres aléatoires d'une calculatrice scientifique. Pour cela, on procède à 250 tirages dans l'ensemble $\{0, \dots, 9\}$ et on obtient les résultats suivants :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$N(x)$	28	32	23	26	23	31	18	19	19	31

A l'aide du test du χ^2 , vérifier si le générateur produit des entiers indépendants et uniformément répartis sur $\{0, \dots, 9\}$.

Exercice 3 (Test du χ^2 de normalité). Un correcteur vient de finir de corriger une épreuve d'un concours. Par souci d'équité, la consigne est de noter les copies de telle manière que la distribution des notes soit Gaussienne avec une moyenne de $m = 10$ et un écart-type de $\sigma = 4$, c'est-à-dire de loi $\mathcal{N}(10, 16)$.

Le correcteur a corrigé $n = 100$ copies. Il a obtenu une moyenne de 9,7 et un écart type de 4,3. Même si ces valeurs sont proches de la consigne, il se demande si la distribution de ses notes suit bien une loi Gaussienne. Il partage les notes en 5 classes et obtient les effectifs suivant :

Notes	de 0 à 4	de 4 à 8	de 8 à 12	de 12 à 16	de 16 à 20
Effectifs	8	25	45	10	12

Par exemple 25 élèves ont une note comprise entre 4 et 8.

- 1) Déterminer la répartition théorique des notes en ces 5 classes.
- 2) A l'aide d'un test du χ^2 , acceptez-vous l'hypothèse que la répartition des notes suit la loi $\mathcal{N}(10, 16)$ au niveau 1% ?

II Tests d'indépendance

Exercice 4. Un traitement est administré à trois doses différentes à un groupe de sujets atteints d'une même maladie. L'expérimentation est faite en double aveugle. On compte le nombre de guérisons pour chaque dose. Les résultats sont les suivants :

	Dose 1	Dose 2	Dose 3
Sujets guéris	30	42	58
Sujets non guéris	30	35	31

L'efficacité du traitement est-elle liée à la dose utilisée ?

III Tests du χ^2 d'homogénéité

Exercice 5. 1) On compare les résultats à un examen de deux groupes de $n = 50$ étudiants ayant suivi des cours différents :

note	A	B	C	D	E
groupe 1	8	13	16	10	3
groupe 2	4	9	14	16	7

Ces deux groupes ont-ils le même niveau ?

2) Étudiants à l'entrée de l'université d'Iowa :

	Business	Engineering	Liberal Arts	Nursing	Pharmacy
M	21	16	145	2	6
F	14	4	175	13	4

Qu'en pensez-vous ?

Exercice 6. Comparaison de deux marques. Pour comparer deux marques de voitures A et B, on prend 20 voitures de chacune et on les fait rouler jusqu'à ce qu'elles tombent en panne. Les durées de vie observées sont les suivantes :

marque A	25	31	20	42	39	19	35	36	44	26
	38	31	29	41	43	36	28	31	25	38
marque B	28	17	33	25	31	21	16	19	31	27
	23	19	25	22	29	32	24	20	34	26

1) Pour vous ramener à un test d'homogénéité, mettez en oeuvre la méthode suivante : classez les 40 temps de vie par ordre croissant, séparez-les en 4 groupes de 10 et comptez combien de voitures de chaque marque on trouve dans chaque groupe.

2) Effectuez maintenant un test d'homogénéité.

IV Tests du χ^2 avec estimation de paramètres

Exercice 7. Test de la loi de Poisson. Sur 1000 jours, on enregistre le nombre d'appels à un standard par jour :

nombre d'appels	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10+
nombre de jours	14	70	155	185	205	150	115	65	30	5	6

Est-ce que le nombre d'appels suit une loi de Poisson ?

1) Estimer par maximum de vraisemblance le paramètre λ de la loi de Poisson.

2) Utiliser un test du χ^2 au niveau 5% pour répondre à la question posée.