

Géométrie affine

Préparation à l'Agrégation, ENS de Cachan. Hugues AUVRAY.

Novembre 2013

Motivation : Utiliser les groupes, et plus précisément les actions de groupe, pour définir et résoudre des problèmes de Géométrie. Dans un espace vectoriel, l'origine a un rôle à part. Par exemple, toute droite vectorielle passe par 0, ce qui pose problème dès que l'on essaie de tracer un triangle dans le plan ! Le but est donc de construire un espace où tous les points jouent le même rôle. Pour cela, on peut partir d'un ensemble, dans lequel *a priori* tout point a le même rôle. Cependant, pour «passer» d'un point à un autre, la structure de groupe additif d'un espace vectoriel est bien utile : elle permet par exemple de définir les translations. Il faut donc trouver une solution intermédiaire entre un groupe et un ensemble. C'est ce que permet une action simple et transitive d'un groupe sur un ensemble (premier paragraphe). Avec ces outils, on peut alors définir un espace affine et étudier quelques propriétés de la géométrie affine.

Ce cours reprend celui de Claire Renard qui m'a précédé, et que je remercie vivement ici.

1 Rappels : actions de groupes

Soit G un groupe, d'élément neutre noté e , et X un ensemble.

Une **action** (à gauche) du groupe G sur X est un morphisme de groupes

$$\begin{aligned}\varphi : G &\longrightarrow \mathfrak{S}_X \\ g &\longmapsto (x \mapsto g \cdot x).\end{aligned}$$

Si $x \in X$, le **stabilisateur** de x est $G_x = \{g \in G, g \cdot x = x\}$. C'est un sous-groupe de G .

L'**orbite** de x est $\mathcal{O}_x = \{g \cdot x, g \in G\}$. Les orbites sont les classes d'équivalence pour la relation d'équivalence définie par : $x \sim y$ si, et seulement si, il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$. Cette relation est appelée **conjugaison**.

Remarque 1. Si $x \in X$, $g_0 \in G$ et $y = g_0 \cdot x \in X$, alors $G_y = g_0 G_x g_0^{-1}$ et $\{g \in G, g \cdot x = y\} = g_0 \cdot G_x$.

Démonstration. Si $h \in G_y$, $h \cdot y = y$. Mais comme $y = g_0 \cdot x$, $h g_0 \cdot x = g_0 \cdot x$, soit encore $g_0^{-1} h g_0 \in G_x$. Donc $h \in g_0 G_x g_0^{-1}$. L'inclusion réciproque est immédiate.

Si $g \in G$ est tel que $g \cdot x = y$, cela implique que $g \cdot x = g_0 \cdot x$, soit $g_0^{-1} g \cdot x = x$. Autrement dit, $g \in g_0 G_x$.

Si $g \in g_0 G_x$, il existe $h \in G_x$ tel que $g = g_0 h$. Alors $g \cdot x = (g_0 h) \cdot x = g_0 \cdot x = y$. \square

On distingue les types suivants d'actions remarquables :

- ◇ L'action est dite **simple** si tous les stabilisateurs sont triviaux : $\forall x \in X, G_x = \{e\}$.
- ◇ L'action est **libre** si pour tout couple $(x, y) \in X^2$, il existe au plus un élément $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$. Donc, si y est dans l'orbite de x , l'élément g tel que $y = g \cdot x$ est unique. Cela revient à dire que tout élément de G différent du neutre e agit sans point fixe, ou encore que l'action est simple!
- ◇ L'action est dite **fidèle** si, de façon équivalente,

1. Le morphisme $\varphi : G \rightarrow \mathfrak{S}_X$ est injectif.

$$2. \bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}.$$

◇ L'action est **transitive** s'il n'y a qu'une seule orbite. Autrement dit, pour tous x et $y \in X$, il existe $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$.

Lorsque $X \neq \emptyset$, on a l'implication :

$$\text{SIMPLE} \implies \text{FIDÈLE}.$$

ATTENTION : la réciproque est fautive en général.

Exemples et contre-exemples : L'action de G sur lui-même par translation à gauche est simple et transitive. Puisque l'orbite de l'élément neutre est un singleton, l'action par conjugaison n'est pas transitive, et les orbites sont les classes de conjugaison.

Le groupe des permutations \mathfrak{S}_n agit fidèlement et transitivement sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. L'action n'est pas simple lorsque $n \geq 3$: le stabilisateur d'un point est isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} .

Si V est un K -espace vectoriel, avec K un corps, le groupe linéaire $\mathcal{GL}(V)$ agit fidèlement sur V et transitivement sur $V \setminus \{0\}$. L'action n'est pas simple : le stabilisateur du vecteur nul 0 est égal à $\mathcal{GL}(V)$ tout entier. Si $v \in V \setminus \{0\}$, le stabilisateur de v est isomorphe au sous-groupe de $\mathcal{GL}(V)$

formé des matrices inversibles de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Si un groupe G agit sur X de simplement et transitivement, cela signifie que pour tous x et $y \in X$, il existe un unique $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$.

Lemme 2. *Supposons que G est un groupe abélien agissant sur $X \neq \emptyset$ de façon fidèle et transitive. Alors de plus, l'action est simple.*

Démonstration.

Comme l'action est transitive, d'après la remarque, si x et $y \in X$, les deux stabilisateurs correspondants sont conjugués. Comme G est abélien, ils sont égaux : pour tous x et $y \in X$, en fait $G_x = G_y$.

Comme l'action est fidèle, pour tout $x \in X$, $\bigcap_{y \in X} G_y = G_x = \{e\}$. □

Lemme 3. *Soit G un groupe agissant simplement et transitivement sur $X \neq \emptyset$.*

Pour tout $x \in X$, l'application

$$\begin{aligned} \Theta_x : G &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

est une bijection.

L'application

$$\begin{aligned} \Theta : X \times X &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto g, \end{aligned}$$

où g est l'unique élément de G tel que $y = g \cdot x$, est bien définie.

De plus, avec ces notations, $\Theta_x^{-1} \circ \Theta_y$ est la translation à droite par $\Theta(x, y)$.

Démonstration.

L'action étant simple et transitive, pour tout $y \in X$, il existe un unique $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$. L'application Θ_x est donc une bijection pour tout $x \in X$.

Si $y \in X$, il existe un unique élément $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$: il est égal à $\Theta_x^{-1}(y)$. Ainsi, Θ est bien définie.

Si $h \in G$, $\Theta_y(h) = h \cdot y \cdot \Theta_x^{-1} \circ \Theta_y(h)$ est l'unique élément $k \in G$ tel que $k \cdot x = h \cdot y = hg \cdot x$. Comme l'action est simple, $G_x = \{e\}$ et $\Theta_x^{-1} \circ \Theta_y(h) = hg = h\Theta(x, y)$. \square

Ainsi, lorsque le groupe G agit simplement et transitivement sur un ensemble X , on a pour tout élément $x \in X$ une bijection Θ_x entre G et X . On peut alors naturellement munir X d'une structure de groupe. Cependant, l'image de l'élément neutre $e \in G$ dans X dépend du choix de x : la structure que l'on n'obtient n'est pas canonique, et deux structures diffèrent par le choix d'une «origine» (translation à droite par $\Theta(x, y)$).

Proposition 4 (Transfert de structure). *Soit (E, \cdot_E) un groupe (respectivement un espace vectoriel, respectivement un espace topologique). Soit F un ensemble et $f : E \rightarrow F$ une bijection. Alors il existe une unique structure de groupe sur F telle que f soit un morphisme de groupes (respectivement d'espaces vectoriels, respectivement un homéomorphisme).*

En effet, cette structure est donnée par $x \cdot_F y = f(f^{-1}(x) \cdot_E f^{-1}(y))$ (et le raisonnement est identique pour un espace vectoriel ou un espace topologique).

Soit G un autre groupe.

Une application $g : G \rightarrow F$ est un morphisme de groupes si, et seulement si $f^{-1} \circ g$ est un morphisme de groupes.

Une application $h : F \rightarrow G$ est un morphisme de groupes si, et seulement si $h \circ f$ est un morphisme de groupes.

Si E et G sont deux groupes et $f : E \rightarrow F$, $g : G \rightarrow F$ deux bijections, les structures de groupe induites sur F coïncident si, et seulement si $g^{-1} \circ f : E \rightarrow G$ est un morphisme de groupes.

2 Espaces affines

Soit k un corps commutatif (typiquement, $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , ou \mathbb{F}_q corps fini à q éléments).

2.1 Définition

Définition 5. *Soit E un k -espace vectoriel. Un k -espace affine de direction E est un ensemble non vide \mathcal{E} muni d'une action du groupe additif de E fidèle et transitive.*

Si E est de dimension finie d , on dit que \mathcal{E} est de dimension finie, égale à d .

La direction E d'un espace affine \mathcal{E} est souvent notée $\vec{\mathcal{E}}$.

Remarque 6. *Comme le groupe additif d'un espace vectoriel est abélien, l'action est également simple. Ainsi, les résultats du paragraphe précédent s'appliquent.*

Si $\vec{u} \in E$ et $A \in \mathcal{E}$, on note l'action de \vec{u} par $\vec{u} \cdot A = A + \vec{u}$. Cette bijection de l'espace affine s'appelle la **translation de vecteur** \vec{u} . Avec les notations du paragraphe précédent, l'application Θ se note

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ (A, B) &\longmapsto \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Si $A \in \mathcal{E}$, la bijection Θ_A se note

$$\begin{aligned} \Theta_A : E &\longrightarrow \mathcal{E} \\ \vec{u} &\longmapsto A + \vec{u}. \end{aligned}$$

Sa bijection réciproque est

$$\begin{aligned} \Theta_A^{-1} : \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ B &\longmapsto \overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$

Dire que l'action de E sur \mathcal{E} est une action de groupe revient à énoncer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall A \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{AA} = \vec{0}, \quad \text{et} \\ \forall A, B, C \in \mathcal{E}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (\text{Relation de Chasles}). \end{aligned}$$

Définition 7. Pour tout $A \in \mathcal{E}$, la bijection $\Theta_A : \vec{u} \mapsto A + \vec{u}$ permet de munir par transfert de structure l'espace affine \mathcal{E} d'une structure d'espace vectoriel, d'origine A . On notera cet espace \mathcal{E}_A , appelé **le vectorialisé de \mathcal{E} en A** .

Ainsi, un espace affine n'a pas de structure d'espace vectoriel canonique : elle dépend du point choisi comme origine. Deux structures diffèrent donc d'une translation.

2.2 Premiers exemples

- Tout **espace vectoriel** E est muni naturellement d'une structure d'espace affine de direction E , grâce à l'action $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. (On «oublie» l'origine 0.) Par exemple, on peut voir \mathbb{R}^2 comme un plan affine.

- Si \mathcal{E} et \mathcal{F} sont deux espaces affines de directions E et F , l'**espace produit** $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ est naturellement muni d'une structure d'espace affine de direction $E \times F$. On a pour tous $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \in E \times F$, $(A, B) + (\vec{u}, \vec{v}) = (A + \vec{u}, B + \vec{v})$.

- Si X est un ensemble et \mathcal{E} un espace affine de direction E , l'espace $\mathcal{F}(X, \mathcal{E})$ des fonctions de X à valeurs dans \mathcal{E} est naturellement muni d'une structure d'espace affine de direction $\mathcal{F}(X, E)$.

- Lorsque $k = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et que E est de dimension finie, on peut transférer la structure d'espace topologique du k -espace vectoriel E sur l'espace affine \mathcal{E} via la bijection Θ_A pour tout point A de \mathcal{E} . Si B est un autre point de \mathcal{E} , $\Theta_B^{-1} \circ \Theta_A$ est la translation de vecteur \overrightarrow{BA} , qui est un homéomorphisme de E . Ainsi, cette topologie ne dépend pas du point A choisi. C'est également la topologie associée à la distance $d(A, B) = AB = \|\overrightarrow{AB}\|$. Voir le cours de géométrie euclidienne lorsque $k = \mathbb{R}$.

- De même, lorsque $k = \mathbb{R}$, et E est euclidien – donc \mathcal{E} est de dimension finie d –, les translations $\Theta_B^{-1} \circ \Theta_A$ préservent la mesure de Lebesgue de E (bien définie à un scalaire près à partir de la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^d , identifié à E après choix d'une base orthornormée). Ainsi, on peut définir une mesure de Lebesgue sur \mathcal{E} image de la mesure de Lebesgue de E par la bijection Θ_A pour $A \in \mathcal{E}$ et le résultat est indépendant du point A choisi. L'espace \mathcal{E} est donc muni d'une mesure de Lebesgue bien définie à un scalaire près.

2.3 Barycentres ($\beta\alpha\rho\nu\varsigma$: *lourd*, en grec ancien)

Soit E un k -espace vectoriel, et \mathcal{E} un espace affine de direction E . Soit I un ensemble et $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{E}^I$ et $(\lambda_i)_{i \in I} \in k^{(I)}$ (les λ_i sont presque tous nuls).

On définit la **fonction vectorielle de Leibniz** par

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathcal{E} &\longrightarrow E \\ M &\longmapsto \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{A_i M}. \end{aligned}$$

Choisissons O une origine de \mathcal{E} . D'après la relation de Chasles, pour tout point M de \mathcal{E} , on a $\mathcal{L}(M) = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{A_i O} + (\sum_{i \in I} \lambda_i) \overrightarrow{OM}$. Il faut donc distinguer deux cas :

- si $\sum_{i \in I} \lambda_i = 0$, alors \mathcal{L} est la fonction constante égale au vecteur $\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{A_i O}$;
- si $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, il existe une unique solution G à l'équation $\mathcal{L}(G) = 0$. C'est le point $G = O + \frac{1}{\sum_{i \in I} \lambda_i} \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{O A_i}$, aussi noté $G = \frac{1}{\sum_{i \in I} \lambda_i} \sum_{i \in I} \lambda_i A_i$. De plus, pour tout point $M \in \mathcal{E}$, $\mathcal{L}(M) = (\sum_{i \in I} \lambda_i) \overrightarrow{GM}$.

Dans le cas où $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, le point G est appelé le **barycentre** de la famille $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ de points pondérés. Si tous les coefficients λ_i sont égaux, on dit que G est l'**isobarycentre** de la famille des points $(A_i)_{i \in I}$. En particulier, l'isobarycentre de deux points A et B est appelé le **milieu** de A et B .

Proposition 8 (Propriétés du barycentre). Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ une suite de points pondérés (en particulier, $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$).

- **Homogénéité** : si G est le barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ et $\mu \in k^*$, alors G est encore le barycentre de $(A_i, \mu \lambda_i)_{i \in I}$. (On suppose donc souvent que $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$.)
- **Commutativité** : si G est le barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_I$, alors G est encore le barycentre de $(A_{\sigma(i)}, \lambda_{\sigma(i)})_{i \in I}$.
- **Associativité** : Soit $(I_j)_{j \in J}$ une partition de I telle que pour tout $j \in J$, $\mu_j = \sum_{i \in I_j} \lambda_i \neq 0$. Notons G_j le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{i \in I_j}$, pour tout $j \in J$. Alors G est le barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ si, et seulement si c'est le barycentre de $(G_j, \mu_j)_{j \in J}$.

2.4 Applications affines

2.4.1 Définition

Soit \mathcal{E} et \mathcal{F} deux k -espaces affines de directions E et F . On cherche à caractériser les applications $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ qui conservent la structure affine. Autrement dit, on en reprenant les notations précédentes, on veut que pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{f}_A := \Theta_{f(A)}^{-1} \circ f \circ \Theta_A : E \rightarrow F$ soit linéaire, et l'on s'aperçoit alors que \overrightarrow{f}_A ne dépend pas A , et qu'il suffit de demander la linéarité en un point. C'est l'objet de la proposition-définition suivante.

Proposition et Définition 9. Soit \mathcal{E} et \mathcal{F} deux espaces affines de directions E et F , et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Si $A \in \mathcal{E}$ notons \mathcal{E}_A est le vectorialisé de \mathcal{E} en A via la bijection $\Theta_A : \vec{u} \mapsto A + \vec{u}$.
Il existe un point $A \in \mathcal{E}$ tel que l'application $f_A : \mathcal{E}_A \rightarrow \mathcal{F}_{f(A)}$ induite par f est linéaire.
2. Pour tout point $A \in \mathcal{E}$, l'application $f_A : \mathcal{E}_A \rightarrow \mathcal{F}_{f(A)}$ induite par f est linéaire.
3. Il existe un point A de \mathcal{E} tel que l'application $\overrightarrow{f}_A = \Theta_{f(A)}^{-1} \circ f \circ \Theta_A$ est linéaire.
4. Pour tout point A de \mathcal{E} , l'application $\overrightarrow{f}_A = \Theta_{f(A)}^{-1} \circ f \circ \Theta_A$ est linéaire.
5. Il existe une application linéaire $v : E \rightarrow F$ telle que pour tous points A et M de \mathcal{E} , $f(M) = f(A) + v(\overrightarrow{AM})$.
6. L'application f conserve les barycentres : si $G \in \mathcal{E}$ est le barycentre du système $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$, $f(G)$ est le barycentre du système $(f(A_i), \lambda_i)_{i \in I}$.
7. L'application f conserve les barycentres de trois points.
Si de plus $k \neq \mathbb{F}_2$, ceci équivaut encore à :
8. L'application f conserve les barycentres de deux points.

Une telle application f est appelée **application affine**. De plus, l'application $\overrightarrow{f}_A : E \rightarrow F$ ne dépend pas du point A choisi et est égale à l'application v de l'assertion (5). On l'appelle **l'application linéaire associée à f** , notée \overrightarrow{f} .

Remarque 10. Si \mathcal{G} est un autre espace affine et $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ une application affine, la composée $g \circ f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ est encore affine, d'application linéaire associée $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

En particulier, $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est bijective si, et seulement si $\overrightarrow{f} \in \mathcal{GL}(E)$.

Si \mathcal{E} et \mathcal{F} sont deux espaces affines, on note $\mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ l'ensemble des applications affines de \mathcal{E} dans \mathcal{F} . Cet espace est naturellement muni d'une structure d'espace affine, de direction $\mathcal{A}(\mathcal{E}, F)$.

Si $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, l'ensemble des bijections affines de \mathcal{E} est un groupe pour la loi de composition, appelé **le groupe affine de \mathcal{E}** et noté $\mathcal{GA}(\mathcal{E})$.

Démonstration de la proposition-définition.

• Les assertions (1) à (5) sont équivalentes (l'écrire pour s'en convaincre!).

• (5) \implies (6).

Si $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ est un système de points pondérés avec $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, le barycentre G est l'unique point solution de $\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{A_i G} = \vec{0}$. Comme \vec{f} est linéaire, on a encore $\sum_{i \in I} \lambda_i \vec{f}(\overrightarrow{A_i G}) = \vec{0} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{f(A_i) f(G)}$. Donc $f(G)$ est le barycentre du système $(f(A_i), \lambda_i)_{i \in I}$.

• (6) \implies (7) est immédiat.

• (7) \implies (5).

Supposons que $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ conserve les barycentres de trois points.

Soit A un point de \mathcal{E} . Notons $v : E \rightarrow F$ définie par $v(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)f(M)}$. Il faut montrer que v est linéaire.

Soient M et N deux points de \mathcal{E} , λ et $\mu \in k$. Notons G le barycentre du système $((A, 1 - \lambda - \mu), (M, \lambda), (N, \mu))$. Par définition, $(1 - \lambda - \mu)\overrightarrow{GA} + \lambda\overrightarrow{GM} + \mu\overrightarrow{GN} = \vec{0}$, soit encore $\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AM} + \mu\overrightarrow{AN}$.

L'application f conserve le barycentre de trois points, donc $f(G)$ est barycentre de $((f(A), 1 - \lambda - \mu), (f(M), \lambda), (f(N), \mu))$. Cela implique encore que $\overrightarrow{f(A)f(G)} = \lambda\overrightarrow{f(A)f(M)} + \mu\overrightarrow{f(A)f(N)}$, soit $v(\overrightarrow{AG}) = v(\lambda\overrightarrow{AM} + \mu\overrightarrow{AN}) = \lambda v(\overrightarrow{AM}) + \mu v(\overrightarrow{AN})$. Ainsi, l'application v est linéaire et f vérifie (5).

• (7) \implies (8).

Si f conserve le barycentre de trois points, elle conserve aussi celui de deux points :

si $((M, \lambda), (N, \mu))$ est un système de deux points, on l'étend en un système de trois points en choisissant $O \in \mathcal{E} \setminus \{M, N\}$ et en considérant le système $((M, \lambda), (N, \mu), (O, 0))$. Donc une application conservant le barycentre de trois points conserve aussi le barycentre de deux points.

• (8) \implies (5) dans le cas où $k \neq \mathbb{F}_2$.

Supposons que f conserve le barycentre de deux points.

Soit $A \in \mathcal{E}$ fixé, posons $v(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)f(M)}$. Il faut démontrer que v est linéaire.

Soit $\lambda \in k$ et $B \in \mathcal{E}$. Notons G le barycentre de $((A, 1 - \lambda), (B, \lambda))$. Comme précédemment, cela implique que $\overrightarrow{AG} = \lambda\overrightarrow{AB}$. L'application f conservant le barycentre, $\overrightarrow{f(A)f(G)} = \lambda\overrightarrow{f(A)f(B)}$, et donc $v(\overrightarrow{AG}) = v(\lambda\overrightarrow{AB}) = \lambda v(\overrightarrow{AB})$.

Il reste à voir que si B et $C \in \mathcal{E}$, $v(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = v(\overrightarrow{AB}) + v(\overrightarrow{AC})$.

Comme $k \neq \mathbb{F}_2$, il existe $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$. Soit B' le point de \mathcal{E} tel que $\overrightarrow{AB'} = \lambda^{-1}\overrightarrow{AB}$ et C' tel que $\overrightarrow{AC'} = (1 - \lambda)^{-1}\overrightarrow{AC}$.

Notons G' le barycentre de $((B', \lambda), (C', 1 - \lambda))$. On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG'} &= \lambda\overrightarrow{AB'} + (1 - \lambda)\overrightarrow{AC'} = \lambda\lambda^{-1}\overrightarrow{AB} + (1 - \lambda)(1 - \lambda)^{-1}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Comme f conserve le barycentre,

$$\begin{aligned} v(\overrightarrow{AG'}) &= \overrightarrow{f(A)f(G')} = \lambda\overrightarrow{f(A)f(B')} + (1 - \lambda)\overrightarrow{f(A)f(C')} \\ v(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) &= \lambda v(\overrightarrow{AB'}) + (1 - \lambda)v(\overrightarrow{AC'}) = \lambda v(\lambda^{-1}\overrightarrow{AB}) + (1 - \lambda)v((1 - \lambda)^{-1}\overrightarrow{AC}) \\ v(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) &= v(\overrightarrow{AB}) + v(\overrightarrow{AC}) \end{aligned}$$

d'après la linéarité par rapport aux scalaires de k . □

Lorsque $k = \mathbb{F}_2$, le barycentre de deux points est nécessairement égal à l'un des deux : si $((M, \lambda), (N, \mu))$ est un système avec $\lambda + \mu \neq 0$, nécessairement $(\lambda, \mu) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$.

2.4.2 Premiers exemples

• En munissant un k -espace vectoriel E d'une structure affine, toute application linéaire de E est une application affine. Les applications affines de E sont de la forme $f : x \mapsto v(x) + b$, où $v \in \mathcal{L}(E)$ et $b \in E$.

• De façon plus générale, si \mathcal{E} et \mathcal{F} sont deux k -espaces affines de directions E et F , pour tous points $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{F}$ et toute application linéaire $v \in \mathcal{L}(E, F)$, il existe une unique application affine f telle que $\vec{f} = v$ et $f(A) = B$. Elle est définie par $f : M \mapsto B + v(\overrightarrow{AM})$.

• Si $\vec{u} \in E$, on appelle **translation de vecteur** \vec{u} l'application affine définie par $t_{\vec{u}} : M \mapsto M + \vec{u}$. Son application linéaire associée est l'identité de E .

• Si $A \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$, on appelle **homothétie de centre A et de rapport λ** l'application affine définie par $h_{A,\lambda} : M \mapsto A + \lambda \overrightarrow{AM}$. Son application linéaire associée est l'homothétie de E de rapport λ : $\overrightarrow{h_{A,\lambda}} = \lambda \text{id}_E$.

★ *Exercice* : Soit \mathbb{F}_q un corps fini et $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le cardinal de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{F}_q)$? De $\mathcal{GA}(\mathbb{F}_q^n)$?

2.5 Sous-espaces affines

2.5.1 Définition

Comme pour les espaces vectoriels, on veut définir une notion de sous-espaces affines : qu'est-ce qu'une droite du plan ou de l'espace affine, par exemple ?

Proposition et Définition 11. *Soit \mathcal{E} un k -espace affine de direction E et \mathcal{F} un sous-ensemble de \mathcal{E} . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. Il existe une structure d'espace affine sur \mathcal{F} telle que l'inclusion $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{E}$ soit une application affine.
2. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ et il existe F un sous-espace vectoriel de E tel que la restriction à F de l'action de E sur \mathcal{E} induise une action transitive sur \mathcal{F} .
3. \mathcal{F} est une orbite de la restriction à F un sous-espace vectoriel de E , de l'action de E sur \mathcal{E} .
4. Il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\Theta_A^{-1}(\mathcal{F})$ soit un sous-espace vectoriel de E .
5. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ et pour tout point A de \mathcal{F} , $\Theta_A^{-1}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E .
6. Il existe un point A de \mathcal{E} et F un sous-espace vectoriel de E tels que $\mathcal{F} = A + F = \{A + \vec{u}, \vec{u} \in F\}$.
7. \mathcal{F} est une classe d'équivalence pour la relation sur \mathcal{E} définie par $A \mathcal{R} B \iff \overrightarrow{AB} \in F$.
8. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ et \mathcal{F} est stable par barycentre : tout barycentre d'un système de points pondérés de \mathcal{F} est encore dans \mathcal{F} (respectivement par barycentre de trois points, de deux points si $k \neq \mathbb{F}_2$).

Un tel ensemble \mathcal{F} est alors appelé un **sous-espace affine** de \mathcal{E} .

Un sous-espace affine \mathcal{F} de \mathcal{E} est lui-même un k -espace affine, de direction F .

Deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} de directions F et G sont dits **parallèles** s'ils ont la même direction. Si $F \subsetneq G$, on dit que \mathcal{F} est **faiblement parallèle** à \mathcal{G} .

Une **droite affine** est un sous-espace affine de dimension 1. Un **hyperplan affine** est un sous-espace affine (dont la direction est) de codimension 1, *i.e.* de dimension $(\dim \mathcal{E} - 1)$ en dimension finie.

2.5.2 Exemples et contre-exemple

• Si \mathcal{F} est un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction F et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ une application affine, $f(\mathcal{F})$ est un sous-espace affine de \mathcal{G} de direction $\vec{f}(F)$.

• Si $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ est une application affine et $N \in \mathcal{G}$, l'ensemble $f^{-1}(\{N\})$ est soit vide, soit c'est un sous-espace affine de \mathcal{E} , de direction $\ker \vec{f}$. De même, si \mathcal{H} est un sous-espace affine de \mathcal{G} de direction H , $f^{-1}(\mathcal{H})$ est soit vide, soit un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction $f^{-1}(H)$.

Application : équation d'un sous-espace affine. Par exemple, les droites affines du plan k^2 sont les droites d'équation $ax + by + c = 0$, avec a, b et $c \in k$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

• Si $g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ est une autre application affine, $\{M \in \mathcal{E}, f(M) = g(M)\}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction $\ker(\vec{f} - \vec{g})$. En particulier, l'ensemble des points fixes d'une application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\ker(\vec{f} - \text{id}_{\mathcal{E}})$.

• ATTENTION! Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux sous-espaces affines, $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ peut être VIDE!!!! Si l'intersection est non vide, c'est encore un sous-espace affine, de direction $F \cap G$. De même pour $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ où les \mathcal{F}_i sont des sous-espaces affines de \mathcal{E} .

• Si $A \subseteq \mathcal{E}$ est un sous-ensemble de \mathcal{E} , on note $\text{Aff}(A)$ le **sous-espace affine engendré par** A . C'est le plus petit sous-espace affine de \mathcal{E} contenant A . Il est égal à l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant A , ou encore à l'ensemble des barycentres de systèmes de points pondérés de A .

• La réunion de deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} n'est en général pas un sous-espace affine. Comme dans le cas vectoriel, il faut considérer le sous-espace affine $\text{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$. Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, sa direction est $F + G$.

La formule des dimensions vectorielle donne dans le cas affine :

1. si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, $\dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{G} = \dim \text{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) + \dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$;
2. si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, $\dim \text{Aff}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) = \dim(F + G) + 1 = \dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{G} - \dim(F \cap G) + 1$.

★ *Exercice* : Soit \mathbb{F}_q un corps fini et $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre de droites affines de $(\mathbb{F}_q)^n$? De sous-espaces affines de $(\mathbb{F}_q)^n$ de dimension k avec $k \in \{0, \dots, n\}$?

• *Contre-exemple* : Sur $(\mathbb{F}_2)^2$, l'ensemble A formé des points $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ et $B = (0, 1)$ est stable par barycentre de deux points, mais n'est pas un sous-espace affine (ne serait-ce que pour une raison de cardinal!). Le barycentre de $((O, 1), (A, 1), (B, 1))$ est $C = (1, 1)$ et $\text{Aff}(A) = (\mathbb{F}_2)^2$.

2.5.3 Intersection de sous-espaces affines

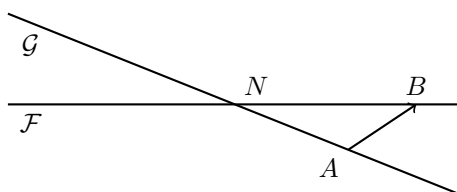
Insistons sur le fait que l'intersection de deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} peut être vide. C'est un peu le «revers de la médaille» en passant d'un espace vectoriel à un espace affine.

Lorsque \mathcal{F} et \mathcal{G} sont parallèles, alors soit $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$. Lorsque \mathcal{F} est faiblement parallèle à \mathcal{G} , soit $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{G}$, soit $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$.

Proposition 12. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de \mathcal{E} , de directions F et G . Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.
2. Il existe deux points $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$ tels que $\overrightarrow{AB} \in F + G$.
3. Pour tout couple de points $(A, B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$, $\overrightarrow{AB} \in F + G$.

Démonstration de la proposition.



- (1) \implies (2). Si $N \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, prendre $(A, B) = (N, N)$.
- (2) \implies (3). Supposons qu'il existe deux points $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$ tels que $\overrightarrow{AB} \in F + G$. Si $(C, D) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}$ est un autre couple de points, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \in F + G$, puisque $\overrightarrow{CA} \in F$ et $\overrightarrow{BD} \in G$.
- (3) \implies (1). Prenons deux points $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$. Comme $\overrightarrow{AB} \in F + G$ par hypothèse, il existe $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}$. Posons $N = A + \vec{u}$. Puisque $A \in \mathcal{F}$ et $\vec{u} \in F$, N est un point de \mathcal{F} .
Mais comme $\vec{u} = \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \vec{u} + \vec{v} + \overrightarrow{BN}$, on a $\overrightarrow{BN} = -\vec{v} \in G$. Ainsi, $N = B + \overrightarrow{BN} = B - \vec{v} \in \mathcal{G}$. Donc $N \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. \square

Corollaire 13. Deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} sont dits **supplémentaires** si leurs directions F et G sont supplémentaires dans E . Deux sous-espaces affines supplémentaires se coupent toujours en un unique point.

Par exemple, dans le plan affine, deux droites non parallèles sont sécantes en un unique point. Dans l'espace affine, un plan et une droite qui ne lui est pas faiblement parallèle se coupent en un unique point.

2.6 Repères

2.6.1 Repère cartésien et coordonnées cartésiennes

Soit \mathcal{E} un espace affine de direction E et de dimension finie n . Un **repère cartésien** $\mathcal{R} = (O, e_1, \dots, e_n)$ de \mathcal{E} est la donnée d'une origine O de \mathcal{E} et de n vecteurs (e_1, \dots, e_n) formant une base de E .

Un point M de l'espace affine \mathcal{E} est alors repéré par les coordonnées du vecteur \overrightarrow{OM} dans la base (e_1, \dots, e_n) de E , appelées **coordonnées cartésiennes** de M dans \mathcal{R} .

2.6.2 Repère affine, coordonnées affines et coordonnées barycentriques

- Soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{E}^I$. On dit que ce système est **affinement libre** si pour tout $i \in I$, $A_i \notin \text{Aff}(A_j, j \in I \setminus \{i\})$. Autrement dit, pour un/tout $i \in I$, $(\overrightarrow{A_i A_j})_{j \in I \setminus \{i\}}$ est un système libre de E .

Exemple : Deux points distincts A et B d'un espace affine \mathcal{E} sont affinement libres. Il passe par ces deux points une unique droite affine, $\text{Aff}(A, B) = (AB)$.

Trois points non alignés sont affinement libres et engendrent un plan affine.

- On dit que le système des $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{E}^I$ est **affinement générateur** si $\text{Aff}(A_i, i \in I) = \mathcal{E}$. Autrement dit, pour un/tout $i \in I$, $(\overrightarrow{A_i A_j})_{j \in I \setminus \{i\}}$ est un système générateur de E .

- Un **repère affine** $\mathcal{R} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ est un système à la fois affinement libre et générateur. Autrement dit, pour un/tout $i \in I$, $(\overrightarrow{A_i A_j})_{j \in I \setminus \{i\}}$ est une base de E .

- Tout point M de \mathcal{E} s'écrit de manière unique $M = A_0 + x_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + \dots + x_n \overrightarrow{A_0 A_n}$, avec $(x_1, \dots, x_n) \in k^n$: ce sont les **coordonnées affines de M dans le repère \mathcal{R}** .

Un point $M \in \mathcal{E}$ s'écrit aussi de manière unique comme barycentre du système $((A_0, \lambda_0), (A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$, avec $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$. Considérant le $(n+1)$ -uplet $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on parle des **coordonnées barycentriques de M** .

Si $(x_1, \dots, x_n) \in k^n$ sont les coordonnées affines de M dans le repère \mathcal{R} , les coordonnées barycentriques sont $(1 - (x_1 + \dots + x_n), x_1, \dots, x_n) \in k^{n+1}$.

★ *Exercice :* [C, Paragraphe 7.5] Si (A_0, \dots, A_n) est un repère affine de \mathcal{E} , montrer que $n+1$ points P_0, \dots, P_n de \mathcal{E} sont affinement liés si, et seulement si le déterminant des coordonnées barycentriques de P_0, \dots, P_n est nul.

Application : Équation barycentrique d'une droite affine du plan passant par deux points A et B : si les coordonnées barycentriques de A dans un repère affine (A_0, A_1, A_2) sont (a_0, a_1, a_2) et celles de B sont (b_0, b_1, b_2) , le point M de coordonnées (x_0, x_1, x_2) appartient à la droite (AB) si,

et seulement si
$$\begin{vmatrix} x_0 & a_0 & b_0 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

- Si (A_0, \dots, A_n) est un repère affine de \mathcal{E} et (B_0, \dots, B_n) sont $(n + 1)$ points distincts de \mathcal{F} alors il existe une unique application affine f telle que pour tout i , $f(A_i) = B_i$. Ainsi, la dimension de l'espace des applications affines de \mathcal{E} dans \mathcal{F} est $(\dim \mathcal{E} + 1) \dim \mathcal{F}$.

3 Quelques problèmes de géométrie affine

3.1 Utilisation des barycentres

- Une partie C d'un \mathbb{R} -espace affine \mathcal{E} est dite **convexe** si elle est stable par tout barycentre à coefficients positifs. Autrement dit, $C \subset \mathcal{E}$ est convexe si, et seulement si pour tous points $(A_i)_{i \in I} \in C^I$ et tous coefficients $(\lambda_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^{(I)} \setminus \{0\}$, le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ est encore dans C .

Une intersection de parties convexes est encore convexe. L'image directe et l'image réciproque d'une partie convexe par une application affine sont convexes.

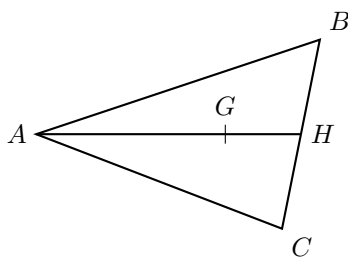
Si A est une partie de \mathcal{E} , l'**enveloppe convexe** de A est le plus petit convexe contenant A . C'est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de points de A , noté $\text{Conv}(A)$. Par exemple, si A et B sont deux points distincts, le segment $[A, B]$ est l'enveloppe convexe de $\{A, B\}$. Ceci fournit une définition équivalente : une partie C de \mathcal{E} est convexe si, et seulement si pour tous points A et B de C , tout le segment $[AB]$ est dans C (découle de l'associativité du barycentre).

En prenant le bord de l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points, on obtient un polygone en dimension deux, un polyèdre en dimension trois – on parle de polytope en dimension finie quelconque.

Théorème 14 (Carathéodory). *Soit \mathcal{E} un \mathbb{R} -espace affine de dimension n et A une partie de E . Alors $\text{Conv}(A) = \{\sum_{i=0}^n \lambda_i A_i, (A_i) \in A^{n+1}, (\lambda_i) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1\}$. Autrement dit, l'enveloppe convexe de A est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs d'au plus $(n + 1)$ points de A .*

En particulier, l'enveloppe convexe d'une partie compacte d'un \mathbb{R} -espace affine de dimension finie est compacte.

- Soit ABC un triangle du plan affine non aplati (i.e. les points A, B et C sont affinement indépendants) et G le barycentre du système $((A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma))$, avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$. On suppose de plus que $G \neq A$, i.e. $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$.



Alors $\beta + \gamma = 0$ si, et seulement si les droites (GA) et (BC) sont parallèles.

Sinon, $\beta + \gamma \neq 0$ et le barycentre H de $((B, \beta), (C, \gamma))$ est l'unique point d'intersection des droites (AG) et (BC) .

En effet, par définition de G , on a $\overrightarrow{AG} = \beta \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{AC} = (\beta + \gamma) \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{BC}$ d'après la relation de Chasles.

Les droites (AG) et (BC) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AG} et \overrightarrow{BC} sont colinéaires. Mais comme les points A, B et C sont affinement indépendants, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{BC} sont linéairement indépendants. Comme $(\beta + \gamma) \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} - \gamma \overrightarrow{BC}$, cela implique que $\beta + \gamma = 0$. La réciproque est immédiate, toujours d'après l'égalité $\overrightarrow{AG} = (\beta + \gamma) \overrightarrow{AB} + \gamma \overrightarrow{BC}$.

Si $\beta + \gamma \neq 0$, soit H le barycentre du système $((B, \beta), (C, \gamma))$: il appartient à la droite (BC) . D'après l'associativité du barycentre, G est également le barycentre du système $((A, \alpha), (H, \beta + \gamma))$.

Ainsi, G est un point de la droite (HA) . Le point H est donc bien le point d'intersection des droites (BC) et (GA) .

★ *Points remarquables d'un triangle.* [SS]

Soit ABC un triangle non aplati. On note $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. D'autre part, notons $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{C} = \widehat{BCA}$ les angles non orientés.

- ◇ Le centre de gravité (le point d'intersection des médianes) est le barycentre de $((A, 1), (B, 1), (C, 1))$.
- ◇ Le centre du cercle circonscrit (le point d'intersection des médiatrices) est le barycentre de $((A, \sin 2\widehat{A}), (B, \sin 2\widehat{B}), (C, \sin 2\widehat{C}))$.
- ◇ L'orthocentre (le point d'intersection des hauteurs) est le barycentre de $((A, \tan \widehat{A}), (B, \tan \widehat{B}), (C, \tan \widehat{C}))$.
- ◇ Le centre du cercle inscrit (le point d'intersection des bissectrices) est le barycentre de $((A, a), (B, b), (C, c))$.
- ◇ Si le point M est strictement à l'intérieur du triangle, alors c'est le barycentre de $((A, \text{Aire}(MBC)), (B, \text{Aire}(MAC)), (C, \text{Aire}(MAB)))$.

Corollaire 15. *L'orthocentre de ABC est à l'intérieur du triangle ABC si, et seulement si les trois angles de ce triangle sont aigus.*

• Soient A et B deux points du plan affine réel, non confondus. Quelles sont les lignes de niveau de la fonction $f : M \mapsto AM/BM$?

La fonction f est bien définie en dehors du point B , à valeurs positives ou nulles, et $f^{-1}(\{0\}) = \{A\}$. D'autre part, $f^{-1}(\{1\}) = \{M \in \mathcal{E}, AM = BM\}$ est la droite médiatrice du segment $[AB]$.

Si $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$, soit M tel que $f(M) = k$. Alors $AM = kBM$, ce qui s'écrit encore $(\overrightarrow{AM})^2 = k^2(\overrightarrow{BM})^2$, ou $0 = (\overrightarrow{AM})^2 - k^2(\overrightarrow{BM})^2 = (\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{BM})$. Si G_+ est le barycentre de $((A, 1), (B, k))$ et G_- celui de $((A, 1), (B, -k))$ – bien définis car $k \neq -1$ et $k \neq 1$, distincts car $k \neq 0$ – cette relation se réécrit encore $\overrightarrow{G_+M} \cdot \overrightarrow{G_-M} = 0$. Cela implique donc que $f^{-1}(\{k\})$ est inclus dans le cercle \mathcal{C}_k de diamètre $[G_+G_-]$, puis on vérifie que tout le cercle \mathcal{C}_k est dans $f^{-1}(\{k\}) : f^{-1}(\{k\}) = \mathcal{C}_k$.

• Soit \mathcal{E} un \mathbb{R} -espace affine, I un ensemble et $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{E}^I$ et $(\lambda_i)_{i \in I} \in k^I$. **La fonction de Leibniz** est définie par

$$\begin{aligned} R : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto \sum_{i \in I} \lambda_i A_i M^2. \end{aligned}$$

Son gradient est égal à $2\mathcal{L}$, où \mathcal{L} est la fonction vectorielle de Leibniz définie précédemment.

Si $\sum_{i \in I} \lambda_i = 0$, les lignes de niveau sont les hyperplans orthogonaux au vecteur constant $\mathcal{L}(G)$ pour tout choix de $G \in \mathcal{E}$.

Sinon, soit G le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$. Les lignes de niveau sont soit vides, soit des sphères de centre G .

En effet, si G est un point de \mathcal{E} , pour tout $M \in \mathcal{E}$, $R(M) = \sum_{i \in I} \lambda_i \|\overrightarrow{A_i G} + \overrightarrow{GM}\|^2 = \sum_{i \in I} \lambda_i (A_i G^2 + GM^2 + 2\overrightarrow{A_i G} \cdot \overrightarrow{GM}) = \sum_{i \in I} \lambda_i A_i G^2 + (\sum_{i \in I} \lambda_i) GM^2 + 2(\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{A_i G}) \cdot \overrightarrow{GM}$.

Lorsque $\sum_{i \in I} \lambda_i = 0$, $R(M) = R(G) + 2\mathcal{L}(G) \cdot \overrightarrow{GM}$, et la fonction \mathcal{L} est constante, donc ne dépend pas du point G choisi.

Sinon, choisissons pour point G le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$. On a alors $\sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{A_i G} = 0$ et donc $R(M) = R(G) + (\sum_{i \in I} \lambda_i) GM^2$ pour tout point M .

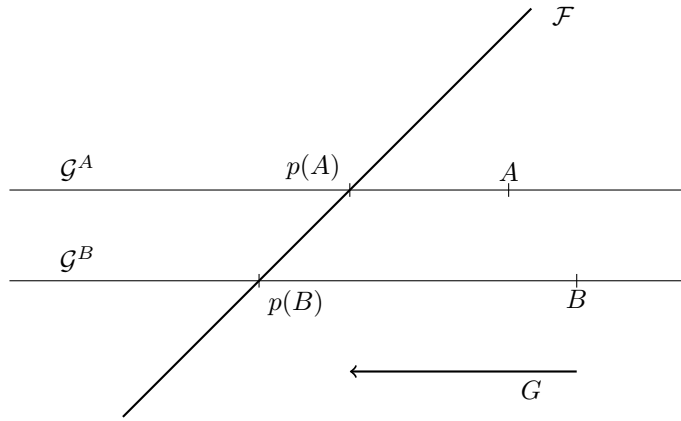
- Si $f \in \mathcal{GA}(\mathcal{E})$ est d'ordre fini n et $\text{car}(k)$ ne divise pas n , alors f admet un point fixe. En effet, si M est un point de \mathcal{E} , l'application f laisse fixe l'isobarycentre des points $(M, f(M), \dots, f^{n-1}(M))$, qui existe puisque dans k , $n \neq 0$.

ATTENTION, l'hypothèse sur la caractéristique du corps k est primordiale : si $k = \mathbb{F}_p$ et \vec{u} est un vecteur non nul, la translation de vecteur \vec{u} est d'ordre p , mais n'admet pas de point fixe.

3.2 Projections et symétries

3.2.1 Projections affines

Soit \mathcal{E} un espace affine et \mathcal{F} un sous-espace affine strict de \mathcal{E} , de direction F . Soit également G un sous-espace vectoriel de E tel que $E = F \oplus G$. Pour tout point A de \mathcal{E} , notons $\mathcal{G}^A = \{A + \vec{u}, \vec{u} \in G\}$ le sous-espace affine de direction G passant par A . Comme \mathcal{F} et \mathcal{G}^A sont supplémentaires, ils s'intersectent en un unique point, noté $p(A)$.



Proposition et Définition 16. *L'application $p : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une application affine, appelée **projection sur \mathcal{F} parallèlement à G** (ou à \mathcal{G} si \mathcal{G} est un sous-espace affine de direction G). Son application linéaire associée est la projection vectorielle sur F parallèlement à G . De plus, p restreinte à \mathcal{F} est l'identité de \mathcal{F} .*

Démonstration.

Il suffit de voir que pour tout point $A \in \mathcal{E}$, l'application qui au vecteur \vec{u} associe $\overrightarrow{p(A + \vec{u})p(A)}$ est linéaire. Si $\vec{u} \in E$, il existe un unique point $B \in \mathcal{E}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Puisque $E = F \oplus G$, soit $\pi : E \rightarrow E$ la projection vectorielle sur F parallèlement à G . Alors $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = \pi(\vec{u}) + (\vec{u} - \pi(\vec{u})) \in F \oplus G$.

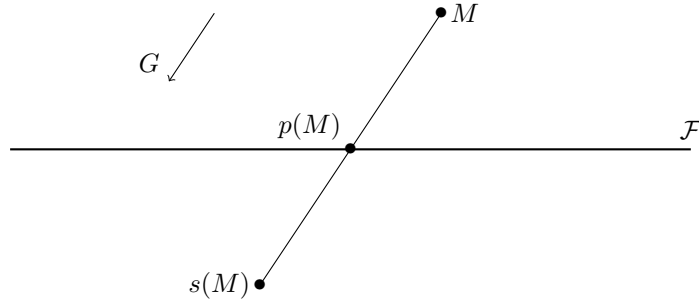
D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{p(A)p(B)} = \overrightarrow{p(A)A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Bp(B)} = \pi(\vec{u}) + (\vec{u} - \pi(\vec{u})) + \overrightarrow{p(A)A} + \overrightarrow{Bp(B)}$. C'est un vecteur de F . Comme $(\vec{u} - \pi(\vec{u})) + \overrightarrow{p(A)A} + \overrightarrow{Bp(B)} \in G$ et $\pi(\vec{u}) \in F$, d'après la décomposition en somme directe, $(\vec{u} - \pi(\vec{u})) + \overrightarrow{p(A)A} + \overrightarrow{Bp(B)} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{p(A)p(B)} = \pi(\vec{u})$. Comme π est linéaire, l'application p est bien une application affine, d'application linéaire associée π . \square

Remarque 17. *De manière analogue au cas linéaire, on a la caractérisation suivante des projections : si $p \circ p = p$, alors p est la projection sur $p(E)$ parallèlement à $\ker(\vec{p})$.*

3.2.2 Symétries affines

Soit \mathcal{E} un k -espace affine avec $\text{car}(k) \neq 2$, et \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} , de direction F . Soit G tel que $E = F \oplus G$. Soit p le projecteur affine sur \mathcal{F} parallèlement à G .

Proposition et Définition 18. *L'application $s : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ telle que pour tout $M \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{Mp(M)} = \overrightarrow{p(M)s(M)}$ est bien définie et est une application affine. On l'appelle **symétrie par rapport à \mathcal{F} parallèlement à G** . Son application linéaire associée est la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G . De plus, s est une involution : $s^2 = \text{id}_{\mathcal{E}}$.*



Démonstration.

Le point $s(M)$ est tel que $p(M)$ est le milieu de M et $s(M)$. Donc l'application s est bien définie et involutive.

Si A est un point de \mathcal{E} , et $B \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{s(A)s(B)} = \overrightarrow{s(A)p(A)} + \overrightarrow{p(A)p(B)} + \overrightarrow{p(B)s(B)} = \overrightarrow{p(A)A} + \overrightarrow{p(A)p(B)} + \overrightarrow{Bp(B)} = 2\overrightarrow{p(A)p(B)} - \overrightarrow{AB} = (2\pi - \text{id}_{\mathcal{E}})(\overrightarrow{AB})$, où π est la projection vectorielle sur F parallèlement à G . Donc l'application s est affine, d'application linéaire associée la symétrie par rapport à F parallèlement à G . \square

Remarque 19. Réciproquement, si s est une involution affine de \mathcal{E} , s est une symétrie.

En effet, comme $\text{car}(k) \neq 2$ et s est d'ordre 2, s admet un point fixe (prendre le milieu d'un point et de son image!); $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{E}, s(M) = M\}$ est donc un sous-espace affine de direction $\ker(\vec{s} - \text{id}_E)$. Comme $\vec{s}^2 = \text{id}_E$, $E = \ker(\vec{s} - \text{id}_E) \oplus \ker(\vec{s} + \text{id}_E)$ et \vec{s} est la symétrie vectorielle selon $\ker(\vec{s} - \text{id}_E)$ parallèlement à $\ker(\vec{s} + \text{id}_E)$. L'application s est donc la symétrie affine par rapport à \mathcal{F} parallèlement à $\ker(\vec{s} + \text{id}_E)$. \square

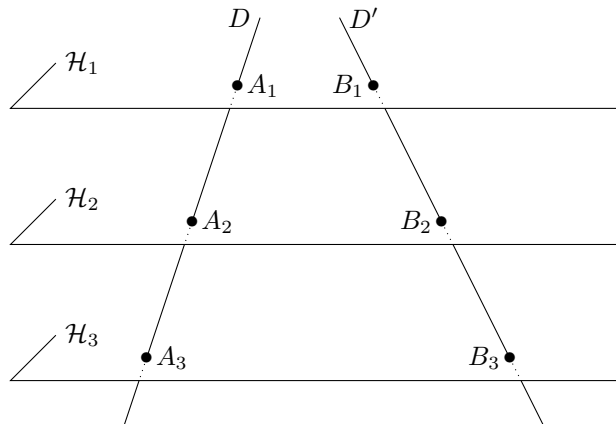
3.2.3 Applications

Si quatre points A, B, C et D sont sur une même droite affine, et $A \neq B$, il existe un unique scalaire $\lambda \in k$ tel que $\overrightarrow{CD} = \lambda \overrightarrow{AB}$. Par convention, nous le noterons $\overrightarrow{CD}/\overrightarrow{AB}$ (autre notation courante : $\overrightarrow{CD}/\overrightarrow{AB}$).

Théorème 20 (Thalès). Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension finie. Soient $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ et \mathcal{H}_3 trois hyperplans affines de \mathcal{E} parallèles et distincts. Soient D et D' deux droites distinctes de \mathcal{E} et dont aucune n'est faiblement parallèle aux hyperplans \mathcal{H}_i . Chaque droite coupe donc chacun des hyperplans en un unique point. Notons A_i le point d'intersection de \mathcal{H}_i avec D , et B_i celui de \mathcal{H}_i avec D' , pour $i = 1, 2$ et 3 .

Alors on a $\overrightarrow{A_1A_3}/\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_3}/\overrightarrow{B_1B_2}$.

Réciproquement, si $B \in D'$ vérifie $\overrightarrow{B_1B}/\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{A_1A_3}/\overrightarrow{A_1A_2}$, alors B est le point d'intersection de D' et \mathcal{H}_3 .



Démonstration.

Notons p la projection affine sur la droite D' parallèlement à \mathcal{H}_1 . Alors $p(A_i) = B_i$ pour $i = 1, 2$ et 3 . Si $\lambda = \overrightarrow{A_1A_3}/\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3} = \lambda\overrightarrow{A_1A_2}$ et cette relation est conservée par p .

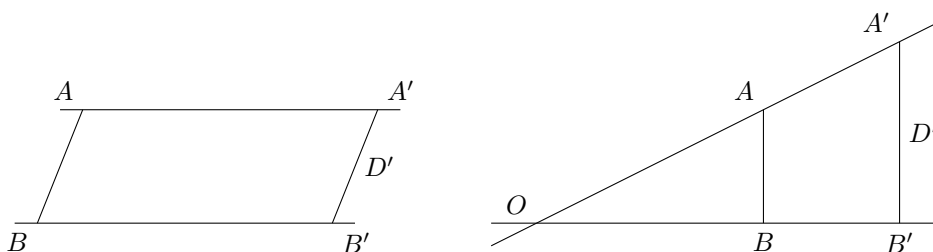
Pour la réciproque, si $\overrightarrow{B_1B} = \lambda\overrightarrow{B_1B_2}$, cela signifie que $B = p(A_3) \in \mathcal{H}_3$ (les deux points B_1 et B_2 forment un repère affine de la droite D'). \square

Lemme 21. [B1, Lemme 2.5.2]

Soient A et B deux points distincts du plan affine \mathcal{E} , $f \in \mathcal{GA}(\mathcal{E}) \setminus \{id_{\mathcal{E}}\}$. Soit $A' = f(A)$ et D' la parallèle à la droite (AB) passant par A' . Soit $B' \in \mathcal{E}$.

- Si f est une translation, $B' = f(B)$ équivaut à dire que B' est le point d'intersection de la droite D' avec la parallèle à (AA') passant par B .

- Si f est une homothétie de centre O , $B' = f(B)$ équivaut à dire que B' est le point d'intersection de la droite D' avec la droite (OB) .



Démonstration.

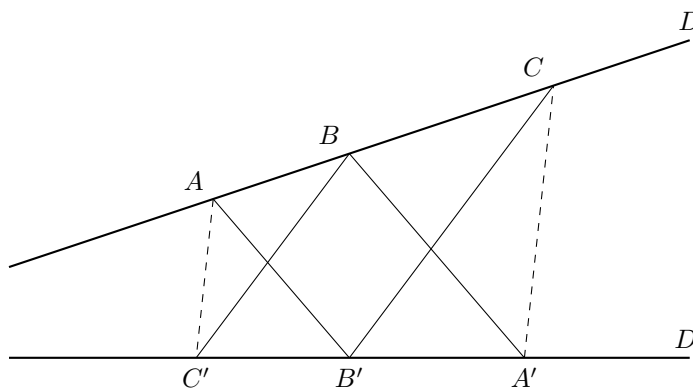
- Lorsque f est une translation, c'est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ et cela découle de la règle du parallélogramme : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$ si, et seulement si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

- Lorsque f est une homothétie de centre O , on applique le théorème de Thalès. On prend comme hyperplans les droites $D = (AB)$, D' et D'' la parallèle à D passant par O . Les deux droites sont les droites (OA) et (OA') . Si λ est le rapport de l'homothétie, $\overrightarrow{OA'}/\overrightarrow{OA} = \lambda = \overrightarrow{Of(B)}/\overrightarrow{OB}$. Donc $B' = f(B)$ si, et seulement si B' est l'intersection des droites D' et (OB) . \square

Théorème 22 (Pappus, énoncé affine). [A, I.4.5], [B1, Proposition 2.5.3]

Soient D et D' deux droites distinctes du plan affine. Soient A, B et C trois points de D et A', B' et C' trois points de D' .

Si les droites (AB') et $(A'B)$ sont parallèles, ainsi que les droites (BC') et (CB') , alors les droites (AC') et (CA') sont aussi parallèles.



Démonstration.

Il faut distinguer les cas, selon que les droites D et D' sont parallèles ou non.

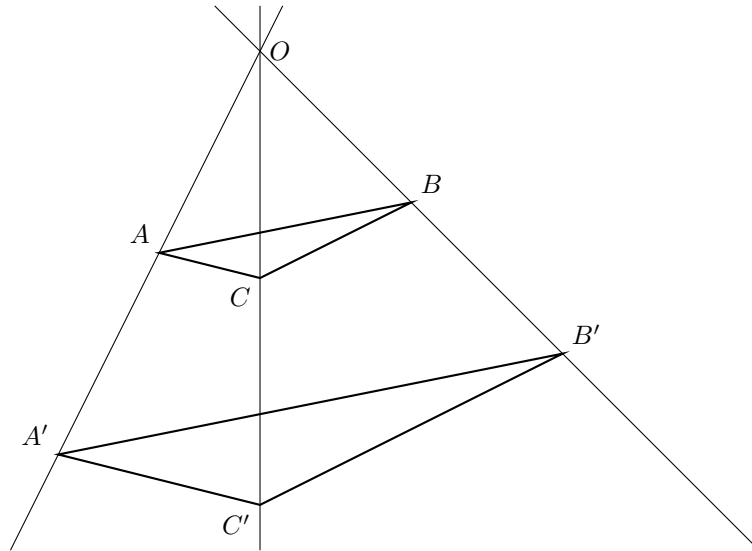
- Si D et D' ne sont pas parallèles, elles se coupent en un unique point O . Soit f l'homothétie de centre O telle que $f(A) = B$ et g l'homothétie de centre O telle que $g(B) = C$. Comme les

droites (AB') et $(A'B)$ sont parallèles, d'après le lemme 21, $f(B') = A'$. De même, $g(C') = B'$. Comme f et g sont des homothéties de même centre, elles commutent et la composée est encore une homothétie de centre O . Ainsi, comme $C = g \circ f(A) = f \circ g(A)$ et $A' = f \circ g(C')$, toujours d'après le lemme 21, les droites (AC') et $(A'C)$ sont parallèles.

• Lorsque les droites D et D' sont parallèles, on prend pour application f la translation telle que $f(A) = B$ et pour g la translation telle que $g(B) = C$. Comme deux translations commutent, le raisonnement est identique, toujours à l'aide du lemme 21. \square

Théorème 23 (Desargues, énoncé affine). [A, I.4.6], [B1, Proposition 2.5.4]

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles d'un espace affine \mathcal{E} sans sommet commun, et dont les côtés sont deux à deux parallèles. Alors les droites (AA') , (BB') et (CC') sont soit concourantes, soit parallèles.



Démonstration.

Comme les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, on en déduit que les quatre points A, B, A' et B' sont coplanaires. Donc soit les droites (AA') et (BB') sont parallèles, soit elles se coupent en un unique point O .

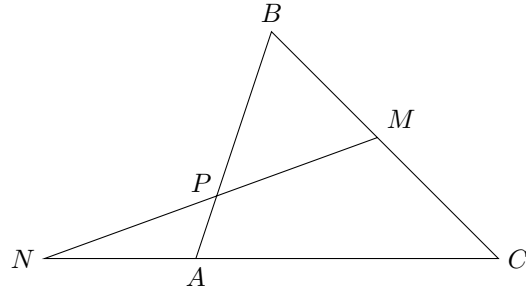
Dans ce dernier cas, soit f l'homothétie de centre O telle que $f(A) = A'$. Toujours d'après le lemme 21, $f(B) = B'$. Si $C'' = f(C)$, c'est le point d'intersection de la parallèle à (AC) passant par A' et de la droite (OC) , donc l'intersection des droites $(A'C'')$ et (OC) . De même, C'' est le point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par B' et de la droite (OC) , donc l'intersection des droites (OC) et $(B'C'')$. Ainsi, $C'' = C'$ et les trois droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.

Si les droites (AA') et (BB') sont parallèles, on applique le même raisonnement avec f la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$. \square

Théorème 24 (Ménélaüs). [SS] [C, p. 141]

Soit ABC un triangle du plan affine non aplati et trois points $M \in (BC)$, $N \in (AC)$ et $P \in (AB)$ distincts des sommets du triangle.

Les points M, N et P sont alignés si, et seulement si $(\overrightarrow{CM}/\overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AN}/\overrightarrow{CN}) \cdot (\overrightarrow{BP}/\overrightarrow{AP}) = 1$.



Démonstration.

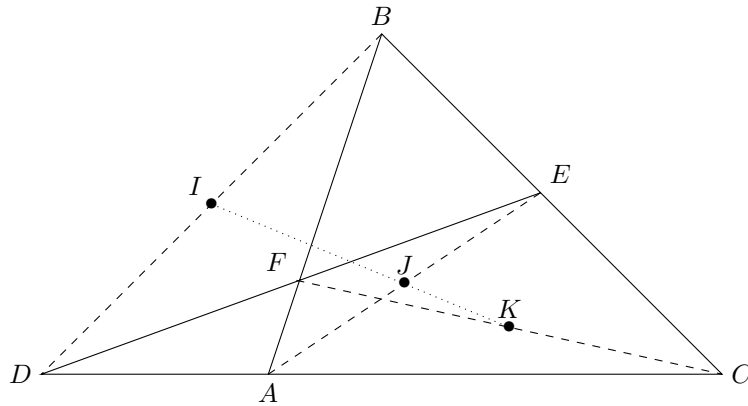
Comme par définition, $\overrightarrow{CM} = (\overrightarrow{CM}/\overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BM}$, M est le barycentre de $((A, 0), (B, -\overrightarrow{CM}/\overrightarrow{BM}), (C, 1))$. De même, N est le barycentre de $((A, 1), (B, 0), (C, -\overrightarrow{AN}/\overrightarrow{CN}))$ et P le barycentre de $((A, -\overrightarrow{BP}/\overrightarrow{AP}), (B, 1), (C, 0))$.

Dans le repère affine (A, B, C) , on a donc les coordonnées barycentriques de ces trois points.

Ils sont alignés si, et seulement si le déterminant
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\overrightarrow{BP}/\overrightarrow{AP} \\ -\overrightarrow{CM}/\overrightarrow{BM} & 0 & 1 \\ 1 & -\overrightarrow{AN}/\overrightarrow{CN} & 0 \end{vmatrix}$$
 est nul, *i.e.* si, et seulement si $(\overrightarrow{CM}/\overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{AN}/\overrightarrow{CN}) \cdot (\overrightarrow{BP}/\overrightarrow{AP}) = 1$. □

Théorème 25 (du quadrilatère complet). [SS, p. 20]

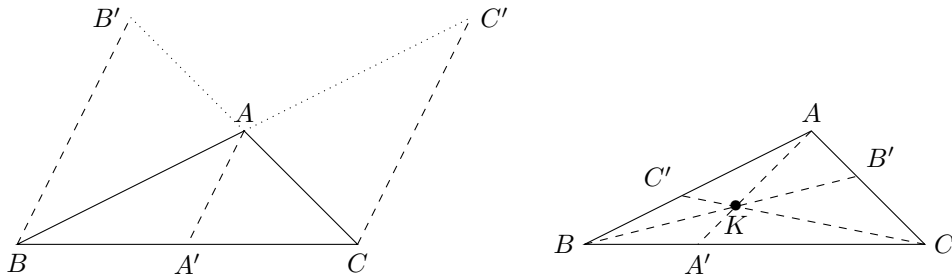
Les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés.



Théorème 26 (Céva). [SS, p. 22]

Soit ABC un triangle non aplati du plan affine. Soient A' , B' et C' trois points distincts tels que $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$.

Alors les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si, et seulement si $\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = -1$.



3.3 Le théorème fondamental de la géométrie affine

Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux k -espaces affines. Une application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{F} conserve l'alignement : l'image d'une droite est une droite.

Y a-t-il une réciproque ? On constate immédiatement que si $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{F} = 1$, toute application surjective $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ convient. D'autre part, si $\mathcal{E} = \mathcal{F} = \mathbb{C}^n$, et $f : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, alors l'image de la droite $D = a \cdot \mathbb{C} + b$ par f est la droite $\bar{D} = \bar{a} \cdot \mathbb{C} + \bar{b}$. Mais on remarque que la conjugaison complexe est un automorphisme du corps \mathbb{C} . Il s'agit de comprendre en quoi ces exemples permettent de formuler une réciproque, qui sera le théorème fondamental de la géométrie affine.

Définition 27. Soient E et F deux k -espaces vectoriels. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **semi-linéaire** s'il existe un automorphisme σ du corps k tel que pour tous $x, y \in E$, pour tous $\lambda, \mu \in k$, $f(\lambda x + \mu y) = \sigma(\lambda)f(x) + \sigma(\mu)f(y)$.

Si \mathcal{E} et \mathcal{F} sont deux k -espaces affines, une application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est dite **semi-affine** s'il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que l'application $\vec{f} : E \rightarrow F$ définie par $f(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)f(M)}$ est semi-linéaire.

Par exemple, l'application $f : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ définie ci-dessus est semi-affine.

Remarque 28. Le corps \mathbb{R} n'admet pas d'autre automorphisme que l'identité. Les seuls automorphismes continus du corps \mathbb{C} sont l'identité et la conjugaison complexe. Mais \mathbb{C} admet d'autres automorphismes, bien sûr non continus.

Théorème 29 (Théorème fondamental de la géométrie affine). [B1, 2.6.1][F, Partie I Chapitre V]

Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux k -espaces affines, de même dimension finie $d \geq 2$.

Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une bijection telle que pour tous points A, B et C alignés, les images $f(A), f(B)$ et $f(C)$ sont alignées. Alors f est semi-affine.

Corollaire 30. Si \mathcal{E} et \mathcal{F} sont deux \mathbb{R} -espaces affines de même dimension $d \geq 2$ et $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une bijection qui conserve l'alignement, alors f est affine.

Démonstration du Théorème fondamental de la géométrie affine.

La démonstration s'effectue en cinq étapes, voir [B1].

• Étape 1 : Si les points (A_0, \dots, A_k) sont affinement indépendants dans \mathcal{E} , leurs images $(f(A_0), \dots, f(A_k))$ sont également affinement indépendantes dans \mathcal{F} .

En effet, on complète la famille (A_0, \dots, A_k) en un repère affine (A_0, \dots, A_d) . Si la famille $(f(A_0), \dots, f(A_k))$ était liée, alors le sous-espace affine \mathcal{F}' engendré par $(f(A_0), \dots, f(A_d))$ serait un sous-espace strict de \mathcal{F} . Mais comme f conserve l'alignement, $f(\text{Aff}(A_0, \dots, A_d)) = f(\mathcal{E}) \subseteq \text{Aff}(f(A_0), \dots, f(A_d)) \subsetneq \mathcal{F}$, ce qui contredit la surjectivité de f .

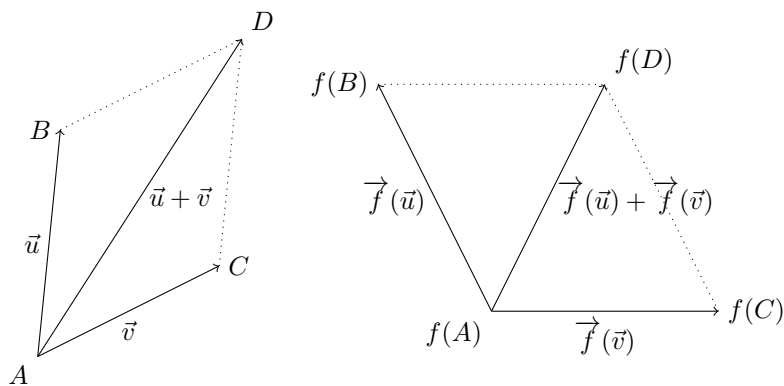
• Étape 2 : L'image d'une droite de \mathcal{E} par f est une droite tout entière de \mathcal{F} . Si D et D' sont deux droites parallèles de \mathcal{E} , leurs images $f(D)$ et $f(D')$ sont deux droites parallèles de \mathcal{F} .

En effet, si D est une droite de \mathcal{E} , soient A et B deux points distincts de D . Comme f est injective, $f(A)$ et $f(B)$ sont deux points distincts de \mathcal{F} . Soit D' la droite de \mathcal{F} passant par $f(A)$ et $f(B)$. Montrons que $D' = f(D)$. Par hypothèse, on sait que $f(D) \subseteq D'$. Soit N un point de D' . Comme f est surjective, il existe $M \in \mathcal{E}$ telle que $f(M) = N$. Comme les trois points $f(A), f(B)$ et $f(M)$ sont alignés, d'après la première étape, les points A, B et M sont aussi nécessairement alignés, donc $M \in D$ et $f(D) = D'$.

Soient D et D' deux droites parallèles de \mathcal{E} . On peut les supposer distinctes, sinon il n'y a rien à prouver. Soit P le plan affine qui les contient. Alors $f(P)$ est contenu dans un plan affine P' de \mathcal{F} . Ainsi, $f(D)$ et $f(D')$ sont deux droites contenues dans le même plan affine P' . Si elles ne sont pas parallèles, elles s'intersectent en un unique point N , mais cela contredit l'injectivité de f . En effet, il existe dans ce cas deux points distincts $M \in D$ et $M' \in D'$ tels que $f(M) = f(M') = N \in f(D) \cap f(D')$.

• Étape 3 : Si A est un point de \mathcal{E} , l'application $\vec{f} : E \rightarrow F$ telle que $\vec{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)f(M)}$ vérifie $\vec{f}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\vec{v})$ lorsque les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont linéairement indépendants.

Supposons les vecteurs \vec{u} et $\vec{v} \in E$ linéairement indépendants (ce qui est possible car $d \geq 2$). Posons $B = A + \vec{u}$, $C = A + \vec{v}$ et $D = A + \vec{u} + \vec{v}$. Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. En particulier, le point D est uniquement déterminé comme le point d'intersection de la parallèle à (AB) passant par C et la parallèle à (AC) passant par B . Mais d'après la deuxième étape, $f(D)$ est alors le point d'intersection de la parallèle à $(f(A)f(B))$ passant par $f(C)$ et de la parallèle à $(f(A)f(C))$ passant par $f(B)$. Ainsi, $\overrightarrow{f(A)f(D)} = \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(A)f(C)}$, ce qui montre le résultat.



• Étape 4 : Construction de l'isomorphisme σ .

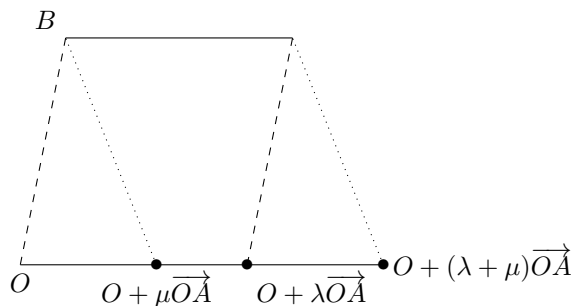
Soient deux points distincts O et A de \mathcal{E} . Ils définissent une droite $D = (OA)$ de \mathcal{E} : $D = O + k \cdot \overrightarrow{OA}$. De même, l'image de D par f est une droite D' passant par $O' = f(O)$: $D' = O' + k \cdot \overrightarrow{O'A'}$ où $A' = f(A)$. La restriction de f à D nous fournit une bijection de D dans D' , et par identification, nous donne une bijection $\sigma : k \rightarrow k$. Plus précisément, pour tout scalaire $\lambda \in k$, on fait correspondre le point $M = O + \lambda \overrightarrow{OA} \in D$. Comme $f(M) \in D'$, il existe un unique scalaire $\mu \in k$ tel que $f(M) = O' + \mu \overrightarrow{O'A'}$. Posons $\sigma(\lambda) = \mu$. Comme f est injective et surjective, σ l'est aussi.

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\sigma} & k \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ D & \xrightarrow{f} & D' \end{array}$$

Il reste à montrer que σ est un morphisme de corps. Comme $f(O) = O'$ et $f(A) = A'$, $\sigma(0) = 0$ et $\sigma(1) = 1$. Il reste à montrer que pour tous λ et $\mu \in k$, $\sigma(\lambda + \mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu)$ et $\sigma(\lambda \cdot \mu) = \sigma(\lambda) \cdot \sigma(\mu)$.

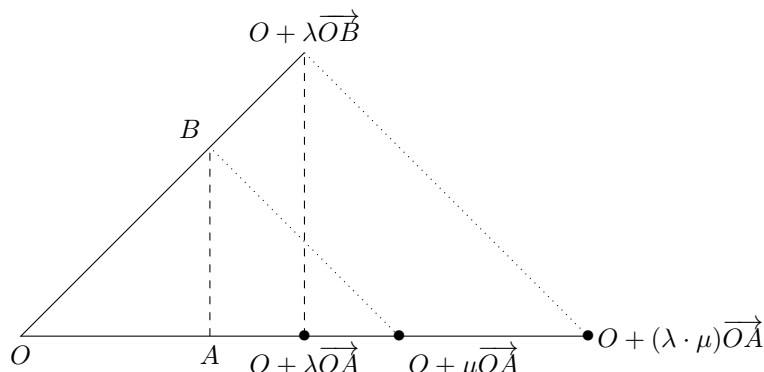
Comme $d \geq 2$, il existe un point B de \mathcal{E} n'appartenant pas à D . Les points O , A et B sont affinement libres et définissent un plan affine P . De même, si $B' = f(B)$, les points O' , A' et B' définissent un plan affine P' de \mathcal{F} .

Le point $O + (\lambda + \mu) \overrightarrow{OA}$ se construit géométriquement à partir des points O , $O + \lambda \overrightarrow{OA}$, $O + \mu \overrightarrow{OA}$ et B , par l'intersection de parallèles.



Comme la configuration est préservée par f , la construction est identique pour le point $f(O + (\lambda + \mu) \overrightarrow{OA})$ à partir des points O' , $O' + \sigma(\lambda) \overrightarrow{O'A'}$, $O' + \sigma(\mu) \overrightarrow{O'A'}$ et B' . Donc $\sigma(\lambda + \mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu)$.

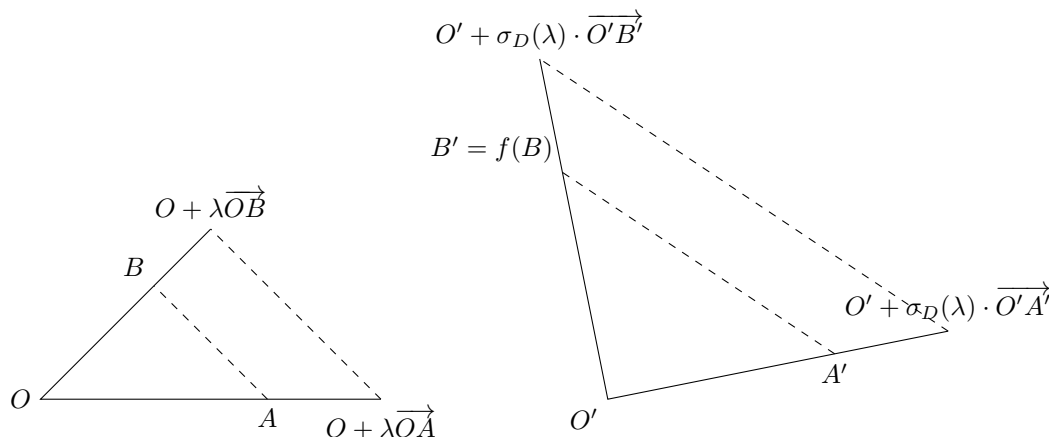
De même, le point $O + \lambda \cdot \mu \overrightarrow{OA}$ se construit à partir des points $O, A, O + \lambda \overrightarrow{OA}, O + \mu \overrightarrow{OA}$ et B , par l'intersection de parallèles en appliquant le théorème de Thalès.



Cette configuration étant préservée par f , comme précédemment, on obtient $\sigma(\lambda \cdot \mu) = \sigma(\lambda) \cdot \sigma(\mu)$.

- Étape 5 : L'application f est semi-affine.

Après l'étape 4, on sait que restreinte à toute droite affine D de \mathcal{E} , l'application f est semi-affine, pour un automorphisme σ_D qui dépend a priori de la droite D considérée. Mais si D' est une autre droite de \mathcal{E} intersectant D en un point O , une nouvelle application du théorème de Thalès montre qu'en réalité $\sigma_D = \sigma_{D'}$.



Puisque pour toute droite D' de \mathcal{E} , il existe une droite D'' qui intersecte à la fois D et D' , on en déduit que σ est indépendant de la droite D choisie. Comme de plus l'application \vec{f} est additive pour les vecteurs de E non colinéaires d'après l'étape 3, l'application f est semi-affine. \square

4 Le groupe affine

4.1 Rappel sur les suites exactes et scindées [P, I.6]

Soient G_0, \dots, G_n des groupes. La suite $G_0 \xrightarrow{f_1} G_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} G_n$ est dite **exacte** si les f_i sont des morphismes de groupes tels que pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\ker f_{i+1} = \text{Im } f_i$.

Cas particulier : on appelle **suite exacte courte** une suite exacte de la forme

$$\{1\} \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow \{1\},$$

où donc i est injective, p surjective et $\text{Im } i = \ker p$. Le groupe N s'identifie à $\overline{N} = \text{Im } i = \ker p$, qui est un sous-groupe distingué de G , et $H \simeq G/\overline{N}$.

Question : Existe-t-il un sous-groupe \overline{H} de G tel que $p|_{\overline{H}} : \overline{H} \rightarrow H$ soit un isomorphisme ? (ATTENTION : un tel sous-groupe \overline{H} n'est pas nécessairement distingué. En fait, il est distingué si, et seulement si G est égal au produit direct $\overline{N} \times \overline{H}$.)

Ce n'est pas nécessairement le cas : la suite $\{0\} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \{0\}$ est exacte, mais il n'existe pas de sous-groupe \overline{H} relevant $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sinon, \overline{H} serait distingué dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ puisque ce dernier groupe est abélien, et cela impliquerait que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est isomorphe au produit direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce qui n'est évidemment pas le cas !

Lorsque la réponse à la question est affirmative, on note $G \simeq N \rtimes H$ et on dit que G est le **produit semi-direct de N par H** . L'extension est alors dite **scindée**.

Une **section** est un morphisme de groupes $s : H \rightarrow G$ vérifiant $p \circ s = \text{id}_H$.

Proposition 31. Soit $\{1\} \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow \{1\}$ une suite exacte. L'extension est scindée si, et seulement si il existe une section $s : H \rightarrow G$, ce qui équivaut encore à :

Il existe \overline{N} et \overline{H} , deux sous-groupes de G isomorphes à N et H respectivement, avec

- (1) $\overline{N} \triangleleft G$,
- (2) $\overline{N} \cap \overline{H} = \{1\}$, et
- (3) $G = \overline{N}\overline{H} = \{nh, n \in \overline{N}, h \in \overline{H}\}$.

Dans ce dernier cas, l'action de \overline{H} sur \overline{N} s'effectue par conjugaison. On retrouve bien le fait que le produit est direct si, et seulement si l'action de \overline{H} sur \overline{N} est triviale, ce qui équivaut encore à dire que le sous-groupe \overline{H} est distingué dans G .

4.2 Structure du groupe affine

Soit \mathcal{E} un k -espace affine, de direction E . Quelle est la structure du groupe affine $\mathcal{GA}(\mathcal{E})$? En particulier, peut-on le relier au groupe $\mathcal{GL}(E)$ des automorphismes de E ?

4.2.1 Les dilatations

Rappelons que si $\vec{u} \in E$, la **translation** de vecteur \vec{u} est l'application $t_{\vec{u}} : M \mapsto M + \vec{u}$. C'est un élément de $\mathcal{GA}(\mathcal{E})$.

Notons $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ l'ensemble des translations de \mathcal{E} . C'est un groupe abélien, et l'application

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{E}) \\ \vec{u} &\longmapsto t_{\vec{u}} \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes.

Proposition 32. $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \{f \in \mathcal{A}(\mathcal{E}), \vec{f} = \text{id}_E\}$. Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ est le noyau du morphisme $\mathcal{GA}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{GL}(E)$ qui à f associe \vec{f} .

Démonstration.

L'inclusion directe découle directement de la définition d'une translation.

Soit $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$ telle que $\vec{f} = \text{id}_E$. Soit A un point de \mathcal{E} . Pour tout $M \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{f(A)f(M)} = \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}$, et donc par l'identité du parallélogramme, $\overrightarrow{Mf(M)} = \overrightarrow{Af(A)}$, ce qui implique que $f(M) = M + \overrightarrow{Af(A)}$. L'application f est donc la translation de vecteur $\overrightarrow{Af(A)}$ (remarquons que ce vecteur ne dépend pas du choix du point A). \square

Rappelons également que si $A \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$, l'**homothétie** de centre A et de rapport λ est l'application affine définie par $h_{A,\lambda}(M) = A + \lambda \overrightarrow{AM}$.

Proposition 33. Soit $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$. L'ensemble des homothéties de rapport λ est égal à l'ensemble des applications affines $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ telles que $\vec{f} = \lambda \text{id}_E$.

Lemme 34 (Application affine et points fixes). Soit $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$. L'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un sous-espace affine de \mathcal{E} , de direction $\ker(\vec{f} - \text{id}_E)$.

En particulier, si $\ker(\vec{f} - \text{id}_E) = \{0\}$, l'application f admet un unique point fixe.

Démonstration du lemme.

Le premier point du lemme a déjà été évoqué au paragraphe 2.5.2.

Si M est un point fixe de f et $A \in \mathcal{E}$, alors $f(M) = M = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM})$. Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{Af(A)} + \vec{f}(\overrightarrow{AM})$, soit encore $(\vec{f} - \text{id}_E)(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{f(A)A}$.

L'ensemble des solutions M de cette équation est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\ker(\vec{f} - \text{id}_E)$. De plus, lorsque $\ker(\vec{f} - \text{id}_E) = \{0\}$, l'application $\vec{f} - \text{id}_E$ est une bijection et le point fixe de f est égal à l'unique point $M = A + (\vec{f} - \text{id}_E)^{-1}(\overrightarrow{f(A)A})$. \square

Démonstration de la proposition.

Si h est une homothétie de rapport $\lambda \in k \setminus \{0, 1\}$, par définition, $\vec{h} = \lambda \text{id}_E$.

Réciproquement, si f est une application affine telle que $\vec{f} = \lambda \text{id}_E$, $\ker(\vec{f} - \text{id}_E) = \ker(\lambda - 1)\text{id}_E = \{0\}$ puisque $\lambda \neq 1$. Donc f admet un unique point fixe A . Pour tout point $M \in \mathcal{E}$, $f(M) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AM}) = A + \lambda \overrightarrow{AM}$ et f est bien l'homothétie de centre A et de rapport λ . \square

Définition 35. Notons $\mathcal{HT}(\mathcal{E}) = \{f \in \mathcal{A}(\mathcal{E}), \vec{f} = \lambda \text{id}_E, \lambda \in k^*\}$. C'est un sous-groupe du groupe affine $\mathcal{GA}(\mathcal{E})$, appelé **groupe des dilatations**, ou encore **groupe des homothéties-translations**. C'est l'ensemble des homothéties et des translations de \mathcal{E} . Il est encore égal à l'ensemble des bijections affines qui envoient une droite sur une droite qui lui est parallèle.

Le dernier point est immédiat en se souvenant qu'une application linéaire bijective qui envoie toute droite vectorielle sur elle-même est une homothétie vectorielle, i.e. de la forme λid_E avec $\lambda \in k^*$.

4.2.2 Le groupe affine

Rappel : Si f est une application affine bijective, alors f^{-1} est aussi affine, et $\vec{f^{-1}} = (\vec{f})^{-1}$. Ainsi, $\mathcal{GA}(\mathcal{E})$ est un groupe pour la loi de composition.

Proposition 36. Pour tout point $A \in \mathcal{E}$, notons $\mathcal{GA}(\mathcal{E})_A = \{f \in \mathcal{GA}(\mathcal{E}), f(A) = A\}$ l'ensemble des bijections affines fixant A .

Le groupe affine $\mathcal{GA}(\mathcal{E})$ est muni d'une structure de produit semi-direct $\mathcal{GA}(\mathcal{E}) \simeq E \rtimes \mathcal{GA}(\mathcal{E})_A$. Si $\mathcal{E} \neq \mathbb{F}_2$, ce produit n'est pas direct, et le centre du groupe affine est trivial : $Z(\mathcal{GA}(\mathcal{E})) = \{\text{id}_{\mathcal{E}}\}$.

Démonstration.

Le groupe des translations $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{GA}(\mathcal{E})$, isomorphe à E via l'application $\vec{u} \mapsto t_{\vec{u}}$. Rappelons également que la suite suivante est exacte : $0 \rightarrow E \simeq \mathcal{T}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{GA}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{GL}(E) \rightarrow \{1\}$, l'application $\mathcal{GA}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{GL}(E)$ étant $f \mapsto \vec{f}$.

Cette suite est scindée : si $A \in \mathcal{E}$, l'ensemble $\mathcal{GA}(\mathcal{E})_A$ (bijections affines laissant A invariant) est un sous-groupe de $\mathcal{GA}(\mathcal{E})$ isomorphe à $\mathcal{GL}(E)$ qui fournit une section

$$\begin{aligned} s : \mathcal{GL}(E) &\longrightarrow \mathcal{GA}(\mathcal{E})_A \\ v &\longmapsto (M \mapsto A + v(\overrightarrow{AM})). \end{aligned}$$

Ainsi, le groupe affine est muni d'une structure de produit semi-direct $\mathcal{GA}(\mathcal{E}) \simeq E \rtimes \mathcal{GA}(\mathcal{E})_A$.

Si le produit était direct, le sous-groupe des translations serait contenu dans le centre de $\mathcal{GA}(\mathcal{E})$. Montrons donc que le centre est trivial. Soit $f \in Z(\mathcal{GA}(\mathcal{E}))$. Puisque f commute à toute application affine, \vec{f} est dans le centre de $\mathcal{GL}(E)$. Ainsi, il existe $\lambda \in k^*$ tel que $\vec{f} = \lambda \text{id}_E$ et $f \in \mathcal{HT}(\mathcal{E})$ est soit une homothétie, soit une translation.

Supposons que $k \neq \mathbb{F}_2$, et donc que $\mathcal{HT}(\mathcal{E})$ n'est pas réduit aux translations.

Si f est une homothétie de centre $A \in \mathcal{E}$, alors pour toute translation $t = t_{\vec{u}}$, $t \circ f \circ t^{-1}$ est l'homothétie de même rapport que f et de centre $t(A) = A + \vec{u}$. Ainsi, pour $t \neq \text{id}_{\mathcal{E}}$, $t \circ f \circ t^{-1} \neq f$ et $f \notin Z(\mathcal{GA}(\mathcal{E}))$. (On a encore une fois utilisé le «principe de conjugaison», cf [P, p. 16].)

Si f est une translation de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$, pour toute homothétie h de centre A , $f \circ h \circ f^{-1}$ est une homothétie de centre $f(A) \neq A$, et donc $f \notin Z(\mathcal{GA}(\mathcal{E}))$.

Dans le cas $k = \mathbb{F}_2$, f est une translation, de vecteur \vec{e}_1 disons. Choisisant une origine O dans \mathcal{E} , et complétant (O, \vec{e}_1) en un repère cartésien de \mathcal{E} , on voit aisément (comme la dimension de \mathcal{E} est > 1) que ne f ne commute pas avec l'application permutant les deux premières coordonnées.

Ainsi, le centre du groupe affine est trivial. \square

Par suite, le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \{1\} & & \{1\} & & \{1\} \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\{1\} & \longrightarrow & \mathcal{T}(\mathcal{E}) \simeq E & \longrightarrow & \mathcal{HT}(\mathcal{E}) & \longrightarrow & Z(\mathcal{GL}(E)) = k^* \text{id}_E \longrightarrow \{1\} \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\{1\} & \longrightarrow & \mathcal{T}(\mathcal{E}) \simeq E & \longrightarrow & \mathcal{GA}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{f\ell} & \mathcal{GL}(E) \longrightarrow \{1\} \\
& & \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \vec{\pi} \\
& & \{1\} & \longrightarrow & \mathcal{GA}(\mathcal{E})/\mathcal{HT}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{p} & \mathcal{PGL}(E) \longrightarrow \{1\} \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & \{1\} & & \{1\}
\end{array}$$

Le morphisme p est bien un isomorphisme : au besoin, on s'en convainc par un peu de «chasse dans le diagramme».

S'il existe une fonction $f \in \mathcal{GA}(\mathcal{E})$ telle que $p(\pi(f)) = 0$ dans $\mathcal{PGL}(E)$, cela signifie par commutativité du diagramme que $f\ell(f) = \vec{f} \in k^* \text{id}_E$, et nous avons vu qu'alors $f \in \mathcal{HT}(\mathcal{E})$. Donc $\pi(f) = 0$ et p est injectif.

De même, si $\vec{v} \in \mathcal{PGL}(E)$, il existe $v \in \mathcal{GL}(E)$ tel que $\vec{v} = \vec{\pi}(v)$. Comme $f\ell$ est surjective, il existe $f \in \mathcal{GA}(\mathcal{E})$ telle que $\vec{f} = v$, et alors $p(\pi(f)) = \vec{\pi}(\vec{f}) = \vec{\pi}(v) = \vec{v}$. Ainsi, p est surjectif.

Remarque 37. Si $G \subseteq \mathcal{GA}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe fini de cardinal n et que $\text{car}(k)$ ne divise pas n , alors il existe au moins un point $A \in \mathcal{E}$ fixe par tous les éléments de G . Ainsi, via la section $\mathcal{GA}(\mathcal{E})_A \rightarrow \mathcal{GL}(E)$, G s'identifie à un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$.

En effet, si $G = \{g_1 = \text{id}_{\mathcal{E}}, g_2, \dots, g_n\}$ et $M \in \mathcal{E}$, l'isobarycentre A des points $(M, g_2(M), \dots, g_n(M))$ est bien défini et fixe par tous les éléments de G .

Application : Classification des sous-groupes finis des isométries du plan, de l'espace, détermination des groupes d'isométries des polyèdres réguliers.

4.2.3 Cas réel : orientation

Dans le cas où $k = \mathbb{R}$, la décomposition en produit semi-direct $\mathcal{GA}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ fournit des indications sur la topologie du groupe affine.

En particulier, le groupe affine réel a deux composantes connexes,

$$\begin{aligned}
\mathcal{GA}(\mathbb{R}^n)^+ &= \{f \in \mathcal{GA}(\mathbb{R}^n), \det(\vec{f}) > 0\}, \text{ et} \\
\mathcal{GA}(\mathbb{R}^n)^- &= \{f \in \mathcal{GA}(\mathbb{R}^n), \det(\vec{f}) < 0\} = \mathcal{GA}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{GA}(\mathbb{R}^n)^+.
\end{aligned}$$

Ceci permet d'introduire une **orientation** sur un \mathbb{R} -espace affine. Les éléments de $\mathcal{GA}(\mathbb{R}^n)^+$ sont les bijections affines qui préservent l'orientation, et ceux de $\mathcal{GA}(\mathbb{R}^n)^-$ celles qui renversent l'orientation.

5 Espace universel

Pour ce paragraphe, voir [B1, Chapitre 3] et [F] (qui utilisent les champs de vecteurs), ou [LF].

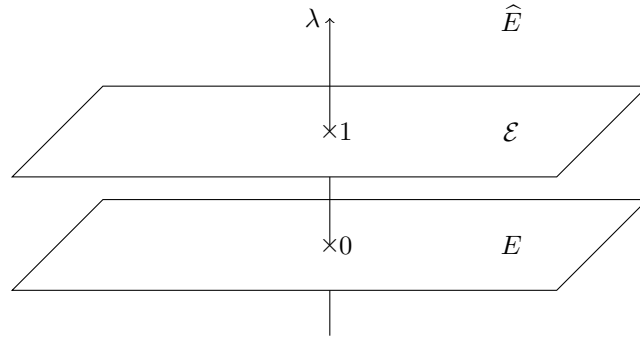
Nous avons déjà mentionné que par exemple lorsque G est le barycentre de $((A, 2), (B, 3))$, on note $G = \frac{2}{5}A + \frac{3}{5}B$, ou encore $5G = 2A + 3B$. Mais quel est le sens de cette écriture? Peut-on définir le point $2A + 3B$ alors que $2 + 3 \neq 1$?

Proposition 38. *Soit \mathcal{E} un k -espace affine de direction E . Il existe un k -espace vectoriel \widehat{E} , deux plongements $i : \mathcal{E} \rightarrow \widehat{E}$ affine injectif (pour la structure de k -espace affine naturellement associée à \widehat{E}) et $j : E \rightarrow \widehat{E}$ linéaire injectif et une forme linéaire $\lambda : \widehat{E} \rightarrow k$ tels que $i(\mathcal{E}) = \lambda^{-1}(\{1\})$ et $j(E) = \lambda^{-1}(\{0\})$.*

De plus, pour toute application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow F$ où F est un k -espace vectoriel, il existe une unique application linéaire $\widehat{f} : \widehat{E} \rightarrow F$ telle que $\widehat{f} \circ i = f$.

Autrement dit, il existe un k -espace vectoriel \widehat{E} dans lequel \mathcal{E} s'identifie à un hyperplan affine de direction E .

Définition 39. *Un tel espace vectoriel \widehat{E} est appelé l'espace universel associé à \mathcal{E} .*



Éléments de démonstration de la proposition.

Un point de vue est de considérer l'espace $k^{(\mathcal{E})}$, l'ensemble des combinaisons linéaires finies de points de \mathcal{E} (donc par exemple $2A + 3B$ comme précédemment). C'est un k -espace vectoriel de dimension infinie.

Soit Bar le sous-espace vectoriel de $k^{(\mathcal{E})}$ engendré par les éléments du type $(\sum_{i \in I} \lambda_i)G - \sum_{i \in I} \lambda_i A_i$ où G est le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$. Notons $\widehat{E} = k^{(\mathcal{E})}/Bar$ et $\pi : k^{(\mathcal{E})} \rightarrow \widehat{E}$ la projection canonique. Si $i : \mathcal{E} \rightarrow k^{(\mathcal{E})} \rightarrow \widehat{E}$ est la composée de l'injection canonique et de π , i est une application affine.

En effet, si $G \in \mathcal{E}$ est le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$, $(\sum_{i \in I} \lambda_i)G - \sum_{i \in I} \lambda_i A_i \in Bar$ et donc $\pi((\sum_{i \in I} \lambda_i)G) = \pi(\sum_{i \in I} \lambda_i A_i)$, soit encore $(\sum_{i \in I} \lambda_i)\pi(G) = \sum_{i \in I} \lambda_i \pi(A_i)$. Donc $i(G)$ est encore le barycentre des $(i(A_i), \lambda_i)_{i \in I}$ et i conserve le barycentre.

Si $j = \vec{i}$, $j : E \rightarrow \widehat{E}$ est le plongement cherché pour E .

D'autre part, si $\tilde{\lambda} : k^{(\mathcal{E})} \rightarrow k$ est l'application définie par $\tilde{\lambda}(A) = 1$ si $A \in \mathcal{E}$, alors $\tilde{\lambda}(Bar) = \{0\}$ et l'application induite au quotient $\lambda : \widehat{E} \rightarrow k$ est bien définie et linéaire par construction.

Montrons que $i(\mathcal{E}) = \lambda^{-1}(\{1\})$.

L'inclusion directe découle directement de la définition de λ .

Réciproquement, si $x \in \widehat{E}$ est tel que $\lambda(x) = 1$, il existe $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in k$ tels que $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i i(A_i)$, et $\lambda(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$. Ainsi, si G est le barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq r}$, dans \widehat{E} , $i(G) = \sum_{i=1}^r \lambda_i i(A_i) = x$.

Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow F$ une application affine. Il existe une unique application linéaire $\widehat{f} : k^{(\mathcal{E})} \rightarrow F$ prolongeant f , définie par $\widehat{f}(A) = f(A)$ pour tout $A \in \mathcal{E}$.

Comme $\widehat{f}(Bar) = \{0\}$, l'application quotient $\widehat{f} : \widehat{E} \rightarrow F$ existe et est unique. Elle vérifie bien $\widehat{f} \circ i = f$.

Pour montrer que i et j sont injectives, on choisit $A \in \mathcal{E}$ et on utilise l'injection $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_A$ qui au point M associe le vecteur \overrightarrow{AM} .

De façon plus informelle, on peut partir de l'espace vectoriel $E \times k$ et définir λ comme la projection sur le dernier facteur. On vérifie que $j : E \rightarrow E \times k$ défini par $j(\vec{u}) = (\vec{u}, 0)$ est linéaire et qu'il existe un isomorphisme affine entre \mathcal{E} et $E \times \{1\}$.

On peut aussi fixer un repère affine (A_0, \dots, A_n) de \mathcal{E} , et construire le k -espace vectoriel \widehat{E} de base (A_0, \dots, A_n) . Il faut voir que cette construction ne dépend pas de la base choisie, que \mathcal{E} s'identifie à $\{\sum_{i=0}^n \lambda_i A_i, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1\}$ et E à $\{\sum_{i=0}^n \lambda_i A_i, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 0\}$. On pose donc $\lambda(\sum_{i=0}^n \lambda_i A_i) = \sum_{i=0}^n \lambda_i$. [C, 7.5]

□

Références

- [A] Michèle Audin. *Géométrie*. Collection Mathématiques. Paris : Belin. Montpellier : Espaces 34. 320 p., 1998.
- [B1] Marcel Berger. *Géométrie. Vol. 1*. CEDIC, Paris, 1977. Actions de groupes, espaces affines et projectifs. [Actions of groups, affine and projective spaces].
- [B2] Marcel Berger. *Géométrie. Vol. 2*. CEDIC, Paris, 1977. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères. [Euclidian spaces, triangles, circles and spheres].
- [C] François Combes. *Algèbre et géométrie*. Mathématiques.
- [F] Jean Frenkel. *Géométrie pour l'élève-professeur. 2e ed. rev. et corr.* 1977.
- [LF] Jacqueline Lelong-Ferrand. *Les fondements de la géométrie*. Mathématiques. [Mathematics]. Presses Universitaires de France, Paris, 1985.
- [P] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*, volume 18 of *Collection de l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles*. École Normale Supérieure de Jeunes Filles, Paris, 1982. Edité en collaboration avec Marc Cabanes et Martine Duchene.
- [SS] Yvonne Sortais and René Sortais. *La géométrie du triangle. Exercices résolus. (Geometry of triangles. Solved exercises). (La géométrie du triangle. Exercices résolus.) Nouveau tirage*. Actualités Scientifiques et Industrielles. 1429. Paris : Hermann. 210 p., 1997.
- [T] Claude Tisseron. *Géométries affine, projective et euclidienne*, volume 1408 of *Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics]*. Hermann, Paris, 1983. Collection Formation des Enseignants et Formation Continue. [Collection on Teacher Education and Continuing Education].