Géométrie différentielle : sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, variétés

Préparation à l'Agrégation, ENS de Cachan. Hugues Auvray.

Janvier 2014

Motivation : on souhaite formaliser la notion de *figure géométrique (régulière, lisse...)*, vue comme sous-ensemble d'un espace affine réel ou complexe de dimension finie, de sorte à pouvoir effectuer du *calcul différentiel* sur les objets concernés. On dégage ensuite les notions adéquates pour conférer une structure différentielle à des espaces topologiques « abstraits », indépendamment d'un espace affine ambiant.

1 Difféomorphismes, submersions, immersions

On se donne $n, p \in \mathbb{N}^*$, $p \leqslant n$, et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty, \omega\}$; pour unifier les énoncés, on parlera de *fonctions de régularité*, ou *de classe*, C^ω, pour les fonctions analytiques réelles, c'est-à-dire développable en série entière autour de chaque point.

Définition 1. *Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^n$. On dit que $f : U \to V$ est un C^k**-difféomorphisme** si f est une bijection, et si f et sa réciproque sont de classe C^k. On dit que f est un C^k**-difféomorphisme local** en $x \in U$, s'il existe U_x et $V_{f(x)}$ voisinages respectifs de x dans U et de $f(x)$ dans V tels que $V_{f(x)} = f(U_x)$ et l'application induite $f : U_x \to V_{f(x)}$ est un C^k-difféomorphisme.*

*Soit a un point d'un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. On dit que $f : U \to \mathbb{R}^n$ est une **immersion** C^k **en** a si f est de classe C^k, et df_a est injective ; si ceci est vérifié en tout $a \in U$, on dit que f est une **immersion**.*

*Soit a un point d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. On dit que $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ est une **submersion** C^k **en** a si f est de classe C^k, et df_a est surjective ; si ceci est vérifié en tout $a \in U$, on dit que f est une **submersion**.*

Des exemples immédiats de ces notions sont respectivement l'identité $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, l'injection $\iota : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $(x^1, \ldots, x^p) \mapsto (x^1, \ldots, x^p, 0, \ldots, 0)$, et la projection $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$, $(x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^{n-p})$ (Attention : ici on utilise des exposants, et non des indices, pour numéroter les coordonnées ; il s'agit d'une convention usuelle en géométrie différentielle). L'énoncé qui suit nous dit que ces exemples sont bien les modèles du cas général :

Théorème 2. $\diamond$ ***Forme normale locale des immersions :*** *soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0, et soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une immersion C^k en 0 telle que $f(0) = 0$. Alors il existe Ψ un C^k-diffeomorphisme local en $0 \in \mathbb{R}^n$ tel qu'au voisinage de 0 :*

$$\Psi \circ f(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^p, 0, \ldots, 0)$$

(« changement de coordonnées au but »).

$\diamond$ ***Forme normale locale des submersions :*** *soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, et soit $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ une submersion C^k en 0 telle que $f(0) = 0$. Alors il existe Φ un C^k-diffeomorphisme local en $0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :*

$$f \circ \Phi(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^{n-p})$$

(« changement de coordonnées à la source »).

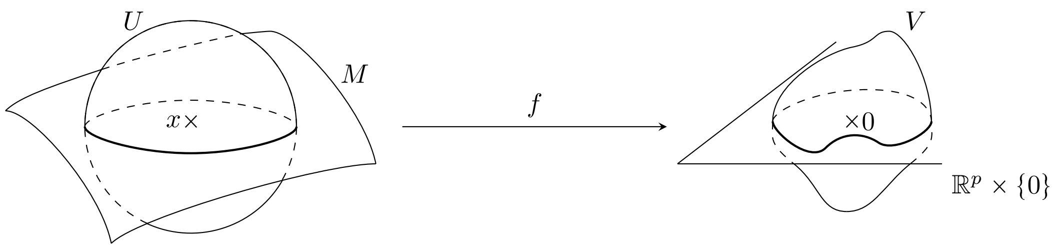
Démonstration. On applique le théorème d'inversion locale à :

- $g : (x^1, \ldots, x^p, y^{p+1}, \ldots, y^n) \mapsto \big(f_1(x), \ldots, f_p(x), f_{p+1}(x) + y^{p+1}, \ldots, f_n(x) + y^n\big)$ dans le cas d'une immersion, après permutation éventuelle des (f_j).
- $h : (x^1, \ldots, x^n) \mapsto \big(f_1(x), \ldots, f_{n-p}(x), x^{n-p+1}, \ldots, x^n\big)$ dans le cas d'une submersion. □

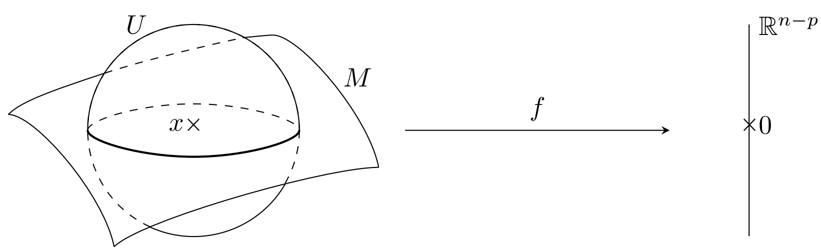
Cette clarification permet d'envisager des définitions d'espaces géométriques de dimension p et de régularité C^k dans $\mathbb{R}^n$, définitions qui se révèlent équivalentes :

Proposition et Définition 3. *Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe C^k s'il vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :*

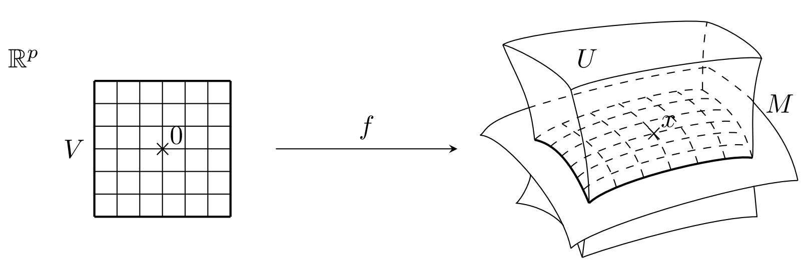
1. *(définition locale par **redressement**) pour tout x de M, il existe des voisinages respectifs U de x dans $\mathbb{R}^n$ et V de 0 dans $\mathbb{R}^n$, ainsi qu'un C^k-difféomorphisme $f : U \to V$, envoyant x sur 0, et telle que $f(U \cap M) = V \cap \big(\mathbb{R}^p \times \{0\}\big)$.*



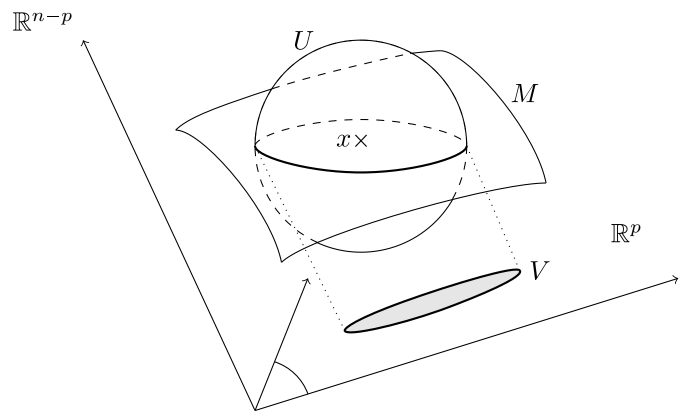
2. *(définition locale par **fonction implicite**) pour tout x de M, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$ ainsi que $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ une C^k-submersion en x, telle que $U \cap M = f^{-1}\big(\{0\}\big)$.*



3. *(définition locale par **paramétrage**) pour tout x de M, il existe des voisinages respectifs U de x dans $\mathbb{R}^n$ et V de 0 dans $\mathbb{R}^p$, ainsi que $f : V \to \mathbb{R}^n$ une C^k-immersion en 0, envoyant 0 sur x, et induisant un homéomorphisme $V \to U \cap M$.*



4. *(définition locale par **graphe**) pour tout x de M, on a un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, une identification linéaire $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ et une fonction $f : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ de classe C^k telle que $U \cap M$ soit le graphe de f, i.e. $U \cap M = \big\{\big(y, f(y)\big) \,\big|\, y \in V\big\}$.*



Démonstration. _1.⇒2._ Soient x, U et f comme dans le point *1.* ; on note $f_1, \dots, f_n$ les composantes de f. Alors $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$, $x \mapsto \big(f_{p+1}(x), \dots, f_n(x)\big)$ est une submersion de classe C^k car $g = f \circ \pi$, et $g^{-1}\big(\{0\}\big) = U \cap M$.

_2.⇒1._ On va utiliser le théorème de forme normale des submersions. Soient donc x, U et f comme dans le point *2.*, et $F = f(\cdot + x)$; le théorème nous donne $\Phi : V \to (U - x)$ un C^k-difféomorphisme local tel que $F \circ \Phi(z^1, \dots, z^n) = (z^{p+1}, \dots, z^n)$. Ainsi $\Phi^{-1}(\cdot - x) : U \to V$ est un C^k-difféomorphisme envoyant x sur 0, et si $y \in U \cap M$, $0 = f(y) = F(y - x) = F \circ \Phi\big[\Phi^{-1}(y - x)\big]$ donc $\Phi^{-1}(y - x) \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$. De plus si $z \in V \cap \big(\mathbb{R}^p \times \{0\}\big)$, et $y := \Phi(z) + x \in U$ de sorte que $z = \Phi^{-1}(y - x)$, on a bien $f(y) = F \circ \Phi(z) = 0$, donc $y \in M$.

_1.⇒3._ Soient x, U, V et f comme dans *1.* Supposons que $f(x) = 0$. Alors si $W = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$, W est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, et $f^{-1}|_W$ est une submersion C^k, et un homéomorphisme $W \to U \cap M$.

_3.⇒1._ On traite cette implication avec le théorème de forme normale locale des immersions. Si x, U, V et f sont comme dans *3.*, alors quitte à restreindre U et V, il existe un C^k-difféomorphisme $\psi : U \to W$, tel que $\psi(x) = 0$, et $\psi \circ f : V \to W \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ est un C^k-difféomorphisme. Dans cette situation, $\psi(U \cap M) = \psi \circ f(V) = W \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

_4.⇒3._ On prend x, U, V et f comme dans *4.*, et on suppose que $0 \in V$ et $f(0) = 0$. Alors $F : y \mapsto \big(y, f(y)\big)$ est un homéomorphisme de V sur $U \cap M$, qui est de plus une immersion en 0, vérifiant $F(0) = 0$.

_2.⇒4._ Soient x, U, f comme dans *2.* On pose $f = (f_1, \dots, f_{n-p})$, et on suppose que $x = 0$. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que la matrice $\big(\frac{\partial f_j}{\partial x_{p+i}}(0)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n-p}$ est inversible – comme f est une submersion, la matrice complète de ses dérivées partielles en 0 admet au moins un mineur d'ordre $n - p$ inversible.

Soit $F : y \mapsto \big(y_1, \dots, y_p, f(y)\big)$. Alors dF_0 est inversible (par blocs), d'inverse disons $z \mapsto \big(z_1, \dots, z_p, g(z)\big)$. Quitte dans ce cas à restreindre U, $U \cap M = f^{-1}(\{0\}) = F^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$, ce qui n'est autre que le graphe de g au dessus de $(\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap \mathcal{D}_g$. □

2 Exemples et contre-exemples

- Tout ouvert de $\mathbb{R}^p \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$;
- Toute sous-variété C^∞ connexe de dimension 1 est difféomorphe soit à $\mathbb{R}$, soit à $\mathbb{S}^1$ [M, App.].

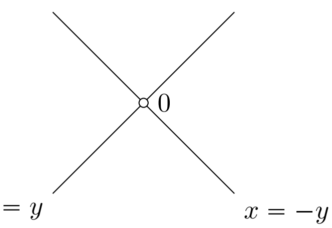
- Vocabulaire : on dit qu'une sous-variété est *lisse* lorsqu'elle est de classe C^∞, et *analytique réelle* lorsqu'elle est C^ω.

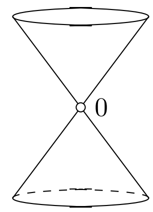
  On parle de *courbe* lorsque la dimension p vaut 1, de *surface* quand $p = 2$, et plus généralement d'*hypersurface* lorsque $p = n - 1$.

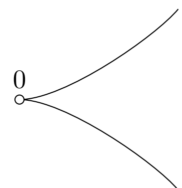
  Nous ne développerons pas ce point de vue, mais lorsque n et p sont pairs, on peut identifier $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ à $\mathbb{C}^{n/2}$ et $\mathbb{C}^{p/2}$ respectivement. Si l'on remplace alors la condition « de classe C^k » sur f par « holomorphe » dans la définition-proposition, on définit une *sous-variété (analytique) complexe* de $\mathbb{C}^{n/2}$.

- Appauvrissement de structure : si $\ell \geqslant k \geqslant 1$, alors toute sous-variété C^ℓ est une sous-variété C^k.

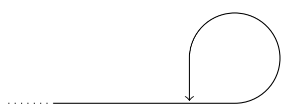
- Ne sont pas des sous-variétés : (1) $\{x^2 - y^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$, (2) $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, (3) $\{(t^2, t^3),\ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ (points doubles).

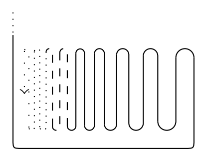
(1) 

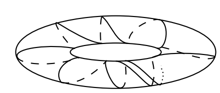
(2) 

(3) 

  Attention : l'image réciproque d'un point par une submersion est une sous-variété, mais l'image directe d'une immersion, même injective, n'est pas nécessairement une sous-variété (immergée). Une sous-variété est localement fermée, c'est-à-dire ouverte dans son adhérence (ou : localement intersection d'un ouvert et d'un fermé). Les exemples suivants ne sont donc pas des sous-variétés : (4) « $\mathbb{R}$ replié sur lui-même », (5) « $\mathbb{R}$ replié sur lui-même en oscillant », (6) $\{(e^{it}, e^{i\sqrt{2}t}),\ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ (« géodésique irrationnelle du tore »)

(4) 

(5) 

(6) 

- La sphère $\mathbb{S}^n = \{(x^0, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} |\, (x^0)^2 + \cdots + (x^n)^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+1}$ analytique réelle :

  1. soit $x \in \mathbb{S}^n$; on peut supposer $x^0 > 0$. Soit $U = \{x^0 > 0\}$, ouvert dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et soit
  $$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\longmapsto \big((x^0)^2 + \cdots + (x^n)^2 - 1, x^1, \ldots, x^n\big). \end{aligned}$$
     Alors f est un C^ω-difféomorphisme sur son image, et $f(\mathbb{S}^n \cap U) = \{0\} \times \mathbb{R}^n$.
  2. posons $U = \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$. Alors
  $$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x^0)^2 + \cdots + (x^n)^2 - 1 \end{aligned}$$
     est une submersion C^ω, et $\mathbb{S}^n \cap U = \mathbb{S}^n = f^{-1}(\{0\})$.

3. soit $V =]-\pi/2, \pi/2[^n$; c'est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. Soit

$$\begin{aligned} f : \quad V \quad &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (t_1, \ldots, t_n) &\longmapsto (\cos t_1, \sin t_1 \cos t_2, \ldots, \sin t_1 \sin t_2 \cdots \sin t_n) \,; \end{aligned}$$

c'est une immersion C^ω de V dans $\mathbb{S}^n$, et un homéomorphisme sur son image.

4. si $x^0 > 0$, $x^0 = \big(1 - (x^1)^2 - \cdots - (x^n)^2\big)^{1/2}$: $\mathbb{S}^n \cap \{x^0 > 0\}$ est le graphe de $(x^i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \mapsto \big(1 - (x^1)^2 - \cdots - (x^n)^2\big)^{1/2}$ au-dessus de $\{(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 < 1\}$.

- Les espaces projectifs $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ peuvent être vus comme sous-variétés, mais attention, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
- Les groupes classiques $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ (c'est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$), $\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$, ainsi que $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{S}\ell_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{U}_n$, $\mathcal{SU}_n$. Attention, $\mathcal{U}_n$ et $\mathcal{SU}_n$ ne sont que des sous-variétés analytiques *réelles*, et non complexes, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On définit plus loin (§4) les *variétés* différentielles, sans faire appel à un espace affine ambiant. Se restreindre aux sous-variétés des $\mathbb{R}^n$ autorise néanmoins une certaine généralité, dans la mesure où l'on a :

Théorème 4 (Whitney, 1944, [W])**.** *Toute variété C^k de dimension $n > 0$ se plonge de manière C^k dans $\mathbb{R}^{2n}$.*

L'exemple de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, qui se généralise aux dimensions supérieures 2^p, indique que la dimension $2n$ de l'espace de plongement est généralement optimale.

3 Espace tangent

On se donne M une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, et un point $x \in M$.

Définition 5. *Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est* ***tangent*** *à M en x s'il existe $\delta > 0$ et $c :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^n$ une courbe C^1 à image dans M telle que : $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = v$.*

On note T_xM l'ensemble des vecteurs tangents à M en x, que l'on appelle ***sous-espace (vectoriel) tangent à*** *M* ***en*** *x ($x + T_xM$ étant le sous-espace* ***affine*** *tangent à M en x).*

Proposition 6. *1. Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, V un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to V$ un C^1-difféomorphisme tel que $f(x) = 0$ et $f(U \cap M) = (\mathbb{R}^p \times \{0\}) \cap V$, alors : $T_xM = (df_x)^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$.*

2. Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ une submersion C^1 en x telle que $U \cap M = f^{-1}\big(f(x)\big)$, alors : $T_xM = \ker(df_x)$.

3. Si U est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p$, U un voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$, et $f : V \to U$ un paramétrage local de M en x avec $f(0) = x$, alors : $T_xM = \mathrm{Im}\,(df_0)$.

Démonstration. (1.) La donnée d'une courbe c tracée sur M avec $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = v$ équivaut à celle de $f \circ c$ tracée sur $f(U \cap M)$ avec $f \circ c(0) = 0$ et $\dot{\widehat{(f \circ c)}}(0) = df_x(v)$. Or les vecteurs tangents à une courbe linéaire sont les vecteurs de cette courbe/droite. En particulier, T_xM est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p.

Nota bene : si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ et C^1 par analytique complexe, les différentielles sont $\mathbb{C}$-linéaires en tant que différentielles de fonctions holomorphes, et donc T_xM est un sous-espace *complexe* de $\mathbb{C}^n$.

(2.), sens $\subset$: si c est une courbe tracée sur M telle que $c(0) = 0$ et $\dot{c}(0) = v$, alors comme $f\big(c(t)\big) = f(x)$ pour tout t petit car f est une équation locale de M près de x, et donc $df_x(v) = 0$: $v \in \ker(df_x)$.

Pour l'inclusion réciproque, on conclut simplement comme suit : T_xM et $\ker(df_x)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, $\dim T_xM = p$, et f est une submersion donc $\dim(\ker df_x) = n-(n-p) = p$. Ainsi $T_xM = \ker(df_x)$.

(3.), sens $\subset$: soit $v \in \mathbb{R}^p$; soit γ une courbe C^1 dans V, avec $\gamma(0) = 0$ et $\dot{\gamma}(0) = v$. Alors $c := f \circ \gamma$ est une courbe C^1 tracée sur M, telle que $c(0) = f\big(\gamma(0)\big) = x$, et $\dot{c}(0) = df_0(v)$.

L'inclusion réciproque se traite à nouveau par un argument de dimension : $\dim(\operatorname{Im} df_0) = p$, car df_0 est injective (f est une immersion en 0). $\square$

Exemples :

1. $\mathbb{S}^n = f^{-1}(1)$, où $f : \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \to \|x\|^2$; ainsi $T_x\mathbb{S}^n = \ker(v \to 2\langle x, v\rangle) = x^\perp$.
2. Soit $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ (U ouvert de $\mathbb{R}^p$) est C^1, $M = \text{graph}(f) \subset \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, et $x_0 \in U$; on pose $y_0 = f(x_0)$ et $u = (x_0, y_0)$. Alors l'équation de $u + T_uM$ est : $y - y_0 = df_{x_0}(x - x_0)$.
3. On note $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K}) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \text{tr}(X) = 0\}$, $\mathfrak{o}(n,\mathbb{K}) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ {}^tX = -X\}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ {}^t\overline{X} = -X\}$, $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Ce sont les espaces tangents en l'identité, ou *algèbres de Lie*, de $\mathcal{S}\ell(n,\mathbb{K})$, $\mathcal{O}(n,\mathbb{K})$ (ou $\mathcal{SO}(n,\mathbb{K})$), $\mathcal{U}(n)$ et $\mathcal{SU}(n)$, respectivement.

Extrema liés : Une fois acquise la notion d'espace tangent pour une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, un résultat tel que le théorème des extrema liés s'interprète de manière naturelle. Rappelons-en l'énoncé :

Théorème 7. *Soient $f, g_1, \dots, g_q$ des fonctions de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles ; soit X l'ensemble défini par l'annulation des g_j sur U : $X = \{x \in U |\, g_1(x) = \dots = g_q(x) = 0\}$. Si la restriction de f à X admet un extremum local en a, et si les différentielles $(dg_1)_a, \dots, (dg_q)_a$ sont des formes linéaires indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que l'on ait l'égalité de formes linaires :*

$$df_a = \lambda_1(dg_1)_a + \cdots + \lambda_p(dg_p)_a$$

*(les coefficients λ_j sont appelés **multiplicateurs de Lagrange**).*

L'hypothèse d'indépendance linéaire des dg_j au point a nous dit aisément que $g = (g_1, \dots, g_q)$ est une submersion en a donc au voisinage de a, donc que X est une variété au voisinage de a par la définition par fonction implicite. Prenons un chemin c tracé sur X tel que $c(0) = a$, et où $\dot{c}(0) = v$ est quelconque dans T_aX. Alors comme f atteint un extremum en a, $df_a(v) = 0$, et ce pour tout $v \in T_aX$. Ainsi df_a est nulle sur T_aX, soit $\bigcap_{j=1}^q \ker[(dg_j)_a] = T_aX \subset \ker(df_a)$; la conclusion suit par algèbre linéaire standard.

4 Variétés différentielles

L'exemple des vecteurs tangents suggère que les sous-variétés différentielles de $\mathbb{R}^n$ disposent d'une structure différentielle, qui leur est propre/intrinsèque au regard de la proposition 6. Étant donné un espace topologique quelconque, on aimerait, sous certaines conditions, disposer d'une telle structure différentielle. Remarquons que l'on peut déjà dans ce cas parler d'*homéomorphismes* ; fixant $n \in \mathbb{N}^*$, nous définissons :

Proposition et Définition 8. *Une variété topologique (ou « C^0 ») de dimension n est un espace topologique M tel que*

- ◇ *tout x de M admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$;*
- ◇ *de façon équivalente :*
  1. *M est séparé, à base dénombrable d'ouverts ;*
  2. *M est métrisable séparable (il existe une partie dénombrable dense) ;*
  3. *M est dénombrable à l'infini, c'est-à-dire séparé, et $M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$, où pour tout i, K_i est compact et $K_i \subset \overset{\circ}{K}_{i+1}$.*

Les conditions de dénombrabilité sur la topologie entendent mimer celles que l'on observent sur les sous-variétés des $\mathbb{R}^n$, par restriction de la topologie de l'espace ambiant ; il s'agira donc de la conserver au moment de définir les *variétés différentielles* (réelles).

Pour l'instant, fixons $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. L'étape suivante vers la définition annoncée est :

Définition 9. *Un* ***atlas de cartes*** *C^k sur M dans $\mathbb{R}^n$ est un ensemble $\mathcal{A}$ de couples (U, φ), où :*

- ◇ *$U \subset M$ est ouvert, $V = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, et $\varphi : U \to V$ est un homéomorphisme ;*
- ◇ *les ouverts U recouvrent M ;*
- ◇ *si (U_1, φ_1) et $(U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}$, alors l'homéomorphisme induit $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ est un C^k-difféomorphisme.*

On appelle les φ ***cartes****, les ouverts relatifs U leur* ***domaine****, et les $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ les* ***applications de transition****, ou* ***changement****,* ***de cartes****.*

Bien sûr, étant donné un atlas de cartes C^k, il est facile d'en manipuler les objets pour obtenir un nouvel atlas (en réduisant par exemple légèrement les domaines), dont on sent qu'il n'est pas vraiment différent de l'atlas de départ. Ceci motive la définition suivante :

Définition 10. *Deux atlas de cartes C^k sont dits* ***compatibles*** *si leur réunion reste un atlas de cartes C^k.*

La relation de compatibilité est une relation d'équivalence. La réunion des atlas de la classe d'équivalence d'un atlas C^k donné est encore un atlas C^k, maximal. Tout atlas de cartes C^k est ainsi contenu dans un unique atlas de cartes C^k maximal.

Soit M vu sans topologie *a priori*, et $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ un recouvrement de M par des ouverts en bijection, *via* les « cartes » relatives (les applications φ), à des ouverts de $\mathbb{R}^n$, tel que les applications de transition sont C^k. Il existe alors une unique topologie sur M tel que $\mathcal{A}$ soit un atlas de cartes C^k : c'est la topologie la moins fine rendant continues les cartes φ.

Grâce à la notion d'atlas, nous pouvons à présent définir :

Définition 11. *Si $k > 0$, une* ***variété différentielle de classe*** *C^k* ***de dimension*** *n est un espace topologique M séparé à base dénombrable d'ouverts, muni d'un atlas de cartes C^k maximal à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.*

Remarque 12.

- *On peut remplacer « séparé à base dénombrable d'ouverts » par « métrisable séparable », ou « dénombrable à l'infini ».*
- *Une variété différentielle est une variété topologique ; plus généralement, une variété C^k est une variété C^ℓ dès que $k \geqslant \ell$.*

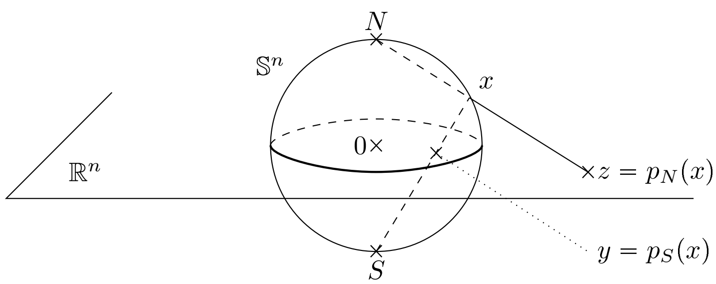
- *Si $k = \infty$, on parle de variétés* ***lisses****; si $k = \omega$, de variétés* ***analytiques réelles****. Dans la pratique, les termes « lisse » et « différentielle » sont omis, l'ordre de régularité n'étant précisé qu'au besoin.*

  Par ailleurs, dans le cas complexe, avec changements de cartes holomorphes, on parle de ***variétés (analytiques) complexes*** *ou* ***holomorphes****.*

<u>*Exemples :*</u>

- N'importe quel $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n ! On se réfère alors aux atlas maximaux comme *structures différentiables*. Dans la pratique, il suffit de se donner un atlas, car on en déduit la classe d'équivalence de la structure différentiable – ce qui reste vrai pour toute variété. Ici, toute bijection $E \simeq \mathbb{R}^n$ fournit un tel atlas ; la plupart du temps, on prend simplement un isomorphisme linéaire, qui est homéomorphe pour les topologies usuelles : la structure différentiable en résultant est alors indépendante de l'isomorphisme.

- La sphère de dimension n, $\mathbb{S}^n = \{(x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{j=0}^n (x^j)^2 = 1\}$, munie de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^{n+1}$. On prend comme atlas les projections stéréographiques Nord et Sud : on pose $N = (1, 0, \dots, 0)$, $S = (-1, 0, \dots, 0)$, et p_N, p_S sont définies respectivement sur $U_N = \mathbb{S}^n \backslash \{N\}$ et $U_S = \mathbb{S}^n \backslash \{S\}$ (qui sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$) par :

  Le seul changement de carte à considérer est $p_S \circ p_N^{-1} : \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$; on montre facilement (exercice !) que pour tout $x \neq 0$, $p_S \circ p_N^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$: $p_S \circ p_N^{-1}$ est donc un difféomorphisme lisse, et même analytique. Par conséquent, $\mathbb{S}^n$ est une variété analytique réelle de dimension n.

L'**idée à retenir** de la définition 11 est que l'on peut *lire dans les cartes* les propriétés relatives au calcul différentiel. Par exemple :

Définition 13. *Soient M et N deux variétés de classe C^k, $k \geqslant 1$, et $f : M \to N$ une application. On dit que f est* ***différentiable de classe C^ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant k$, en*** *$x \in M$, si : il existe des cartes (U, φ) et (V, ψ) telles que $x \in U$, $f(U) \subset V$, et telles que l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ entre ouverts de $\mathbb{R}^{\dim(M)}$ et $\mathbb{R}^{\dim N}$ est C^ℓ en $\varphi(x)$.*

On lit donc le caractère différentiable de f dans des cartes, précisément en regardant f dans ces cartes.

Remarquons qu'ainsi définie, la différentiabilité d'une application entre variétés, à un ordre au plus l'ordre de régularité des variétés en jeu, est bien indépendant du choix des cartes. En effet, changer de carte – disons, φ' pour φ et ψ' pour ψ dans la définition ci-dessus – force seulement à regarder la régularité de $\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1})^{-1}$ (après ajustement éventuel des ouverts de travail). Puisque seule une régularité C^ℓ, $\ell \geqslant k$, nous intéresse, et que les changements de carte $\psi' \circ \psi^{-1}$ et $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ sont C^k de même que leur inverse, on en déduit bien l'indépendance énoncée.

Cette discussion illustre néanmoins le manque de sens *a priori* à parler d'application C^m entre variétés C^k si $m > k$, des atlas C^k-compatibles pouvant ne pas être C^m-compatibles.

Par ailleurs, à k fixé, la question de l'existence de différentes structures C^k (c'est-à-dire, d'atlas C^k non C^k-compatibles) est un problème difficile, même sur des objets géométriques familiers – on parle alors de structures différentiables « exotiques ». Signalons toutefois l'exemple des sphères en dimension au plus 7 : pour $n \leqslant 6$, $\mathbb{S}^n$ admet une seule structure C^1, tandis que $\mathbb{S}^7$ admet 28 de ces structures.

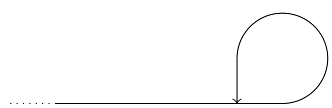
Une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ est une variété : on a déjà évoqué le caractère séparable à base dénombrable d'ouverts, et si $p = \dim M$, la caractérisation par redressement nous donne au voisinage U_x de tout x dans $\mathbb{R}^n$ un difféomorphisme $\varphi_x : U_x \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ tel que $\varphi_x(U_x \cap M) \subset \mathbb{R}^p \times \{0\}$. Notant π la projection $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}^p$, je vous laisse vérifier que $\{(U_x \cap M, (\pi \circ \varphi)|_{U_x \cap M}), x \in M\}$ forme un atlas de M, de régularité celle de M comme sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Dans quelle mesure peut-on envisager un énoncé réciproque ? Et de quelle manière rattacher une variété « abstraite » à un espace (affine) ambiant ? Ceci passe par la notion de *plongement* :

Définition 14. *Soient M, N deux variétés C^k, $k \geqslant 1$. On dit que $f : M \to N$ est un* ***plongement*** *C^k si :*

- ◇ *$f : M \to f(M)$ est un homéomorphisme ;*
- ◇ *f est une immersion C^k (i.e. lue dans les cartes, f est en tout point une immersion C^k).*

Attention, la première condition est nécessaire, comme l'illustre l'exemple suivant d'une immersion injective lisse de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, dont on a vu plus haut que l'image n'est pas une sous-variété :



Proposition 15. *Soit M une variété C^k, et $f : M \to \mathbb{R}^n$. Alors f est un plongement C^k ssi les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- ◇ *$f(M)$ est une sous-variété C^k de $\mathbb{R}^n$;*
- ◇ *$f : M \to f(M)$ est un C^k-difféomorphisme.*

Démonstration. Sens $\Leftarrow$: *a fortiori*, $f : M \to f(M)$ est un homéomorphisme. L'inclusion $f(M) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ est une immersion. Ainsi $f : M \to \mathbb{R}^n$ est une immersion car composée de deux immersions.

Sens $\Leftarrow$: seul le premier ◇ est à montrer. Pour définir une carte locale pour M, on se ramène à un ouvert de $\mathbb{R}^p$, technique déjà vue lors de l'équivalence *(1.)⇔(3.)* de la définition des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. □

On énonce à nouveau le théorème de Whitney [W] :

Théorème 16. *Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, et M^n une variété C^k, non nécessairement compacte. Alors il existe un C^k-plongement de M dans $\mathbb{R}^{2n}$.*

Références

[M] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Based on notes by David W. Weaver, Revised reprint of the 1965 original.

[W] Hassler Whitney. The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space. *Ann. of Math. (2)*, 45 :220–246, 1944.