

# Géométrie projective

Préparation à l'Agrégation, ENS de Cachan. Hugues AUVRAY.

Janvier 2014

Dans tout ce qui suit,  $K$  est un corps commutatif (typiquement,  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{F}_q$  un corps fini).

On a défini la notion de  $K$ -espace vectoriel et de  $K$ -espace affine.

*Problème :* En géométrie affine, il faut souvent distinguer les cas. Par exemple, dans le plan affine réel, deux droites distinctes sont soit sécantes en un unique point, soit parallèles. Existe-t-il une manière de «compléter» l'espace pour que toute paire de droites distinctes se coupe en un unique point, de sorte à unifier les différents points de vue ?

## 1 Espace projectif

### 1.1 Définition

**Définition 1.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. L'**espace projectif déduit de  $E$**  et noté  $\mathbb{P}(E)$  est l'ensemble des droites vectorielles de  $E$ .

En d'autres termes, si  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence sur  $E \setminus \{0\}$  définie par  $x\mathcal{R}y$  si, et seulement si, il existe  $\lambda \in K^*$  tel que  $y = \lambda x$ , alors  $\mathbb{P}(E) \simeq (E \setminus \{0\})/\mathcal{R}$ .

Un **espace projectif** est un espace projectif déduit d'un certain espace vectoriel  $E$ .

Lorsque  $E$  est de dimension finie égale à  $n+1$ , on dit que  $\mathbb{P}(E)$  est **dimension finie égale à  $n$** . On note alors  $\dim \mathbb{P}(E) = n = \dim E - 1$ .

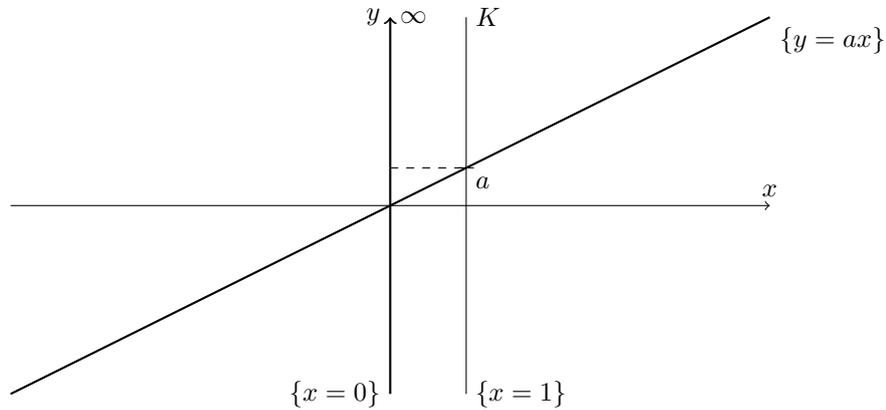
Si  $E = K^{n+1}$ , on note  $\mathbb{P}(K^{n+1}) = \mathbb{P}^n(K) = K\mathbb{P}^n$ .

★ *Exercice :* Calculer le cardinal de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)$ . (Réponse :  $(q^{n+1} - 1)/(q - 1) = q^n + \dots + q + 1$ ).

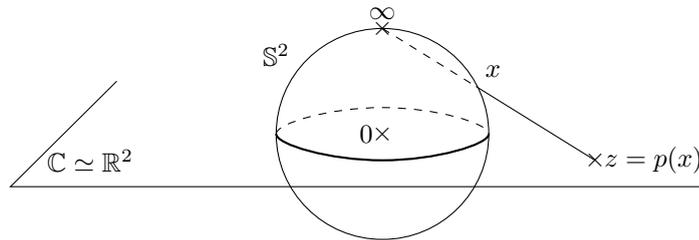
*Exemples :*

- Si  $\dim E = 0$ , il n'y a aucune droite dans  $E$  et  $\mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset$ .
- Si  $\dim E = 1$ ,  $E$  contient une unique droite et  $\mathbb{P}(E)$  est un singleton.
- Si  $\dim E = 2$ ,  $\mathbb{P}(E)$  est appelée **droite projective**. Par exemple si  $K = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1 / (x \sim -x) \simeq \mathbb{S}^1$ .

Une façon de visualiser  $\mathbb{P}^1(K)$  est de considérer que c'est l'ensemble des droites d'équation  $y = ax$  où  $a \in K$  (donc en bijection avec  $K$ ) auquel il faut rajouter la droite «verticale» d'équation  $x = 0$  (donc de «pente infinie»). Ainsi,  $\mathbb{P}^1(K) \simeq K \sqcup \{\infty\}$ .

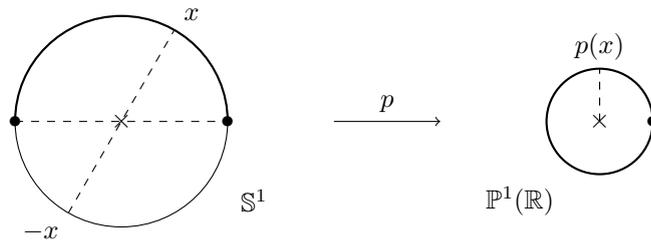


Lorsque  $K = \mathbb{R}$ , on retrouve le cercle  $\mathbb{S}^1$ . Lorsque  $K = \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{S}^2$  via la projection stéréographique (on l'appelle la **sphère de Riemann**) :



- Lorsque  $\dim E = 3$ , on parle de **plan projectif**. En particulier, le plan projectif réel  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^2 / (x \sim -x)$  est une variété différentielle analytique réelle de dimension 2, non orientable, qui peut se plonger dans  $\mathbb{R}^4$  mais pas dans  $\mathbb{R}^3$ . C'est un ruban de Möbius recollé à un disque le long de leur bord. Nous y reviendrons.

- De façon générale, lorsque  $K = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^n / (x \sim -x)$  : c'est le quotient de la sphère de  $\mathbb{R}^{n+1}$  par la relation d'antipodie. En particulier, on peut munir cet espace d'une structure de variété analytique réelle de dimension  $n$  compacte.



## 1.2 Lien projectif-affine et cartes affines.

Il est relativement difficile au début de se représenter abstraitement  $\mathbb{P}^n(K)$ , un espace projectif de dimension  $n$ . Pour cela, il peut être utile de trouver dans  $\mathbb{P}^n(K)$  un sous-ensemble mieux connu : c'est précisément ce que permet la notion de carte affine.

Si  $E$  est un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n + 1 > 0$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors toute droite vectorielle de  $E$  passant par un élément de  $F$  est tout entière contenue dans  $F$ . Ainsi,  $F \setminus \{0\}$  est stable par la relation  $\mathcal{R}$ .

En notant  $\pi : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$  la projection, l'espace projectif  $\mathbb{P}(F)$  est ainsi isomorphe à  $\pi(F \setminus \{0\}) \subseteq \mathbb{P}(E)$ . Il y a donc une inclusion naturelle  $\mathbb{P}(F) \subseteq \mathbb{P}(E)$ .

**Définition 2.** Une sous-ensemble non vide  $V \subseteq \mathbb{P}(E)$  est appelé **sous-espace projectif** s'il existe un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  tel que  $V = \mathbb{P}(F)$ .

En particulier, la **dimension** de  $V$  est  $\dim V = \dim F - 1$ .

La remarque précédente montre qu'il y a une bijection naturelle entre l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E$  et l'ensemble des sous-espaces projectifs de  $\mathbb{P}(E)$ .

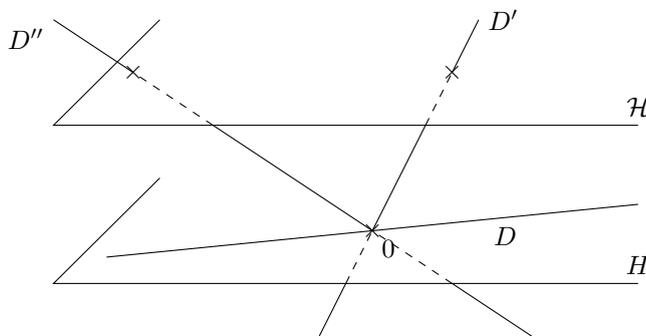
*Exemples :* Si  $\dim V = 0$ , on parle de **point** ;  $V$  correspond à une droite de  $E$ .

Si  $\dim V = 1$ ,  $V$  est appelée **droite** et correspond à un plan de  $E$ . Si  $\dim V = \dim \mathbb{P}(E) - 1$ ,  $V$  correspond à un hyperplan de  $E$  et est appelé **hyperplan (projectif)**.

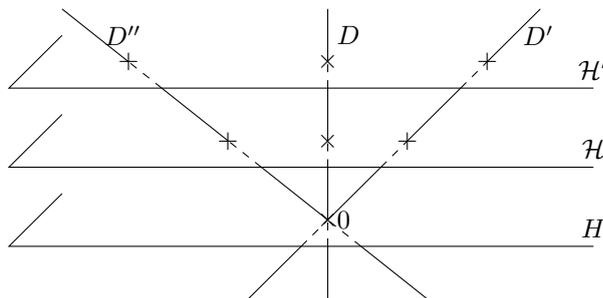
Exemple des points et des droites de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  : ce sont les projetés respectivement des droites et des plans vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ . Les hyperplans projectifs sont exactement les droites projectives de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , comme pour un plan affine ou vectoriel.

Soit  $H$  un hyperplan de  $E$ . L'espace vectoriel  $E$  peut être muni d'une structure de  $K$ -espace affine. Pour cette structure, on peut construire dans  $E$  un hyperplan affine  $\mathcal{H}$  de direction  $H$  et ne contenant pas l'origine  $0$  (donc distinct de  $H$ ).

Soit  $D$  une droite vectorielle de  $E$ . Si  $D$  n'est pas contenue dans  $H$ ,  $E = H \oplus D$  et  $D$  intersecte  $\mathcal{H}$  en un unique point. Sinon,  $D \subseteq H$ , et  $D$  ne rencontre pas  $\mathcal{H}$ . Ainsi,  $\mathcal{H}$  est en bijection avec  $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H)$ .



Si  $\mathcal{H}'$  est un autre hyperplan affine de direction  $H$  et ne contenant pas l'origine, le raisonnement précédent fournit une seconde bijection  $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H) \rightarrow \mathcal{H}'$ . La bijection induite  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  est une homothétie (une application du théorème de Thalès!), donc en particulier elle conserve la structure affine.



**Proposition et Définition 3.** Si  $H$  est un hyperplan de  $E$ , le sous-ensemble  $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H)$  est naturellement muni d'une structure d'espace affine  $\mathcal{H}$  de direction  $H$ . L'application  $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H) \rightarrow \mathcal{H}$  est appelée une **carte affine** de  $\mathbb{P}(E)$ .

Ainsi, *via* cette identification,  $\mathbb{P}(E) = \mathcal{H} \sqcup \mathbb{P}(H)$ . Un espace projectif de dimension  $n$  contient un espace affine de dimension  $n$  : on passe du projectif à l'anneau.

Réciproquement, il est également possible de passer de l'anneau au projectif. Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine de dimension  $n$  et de direction  $E$ .

Soit  $\widehat{E}$  son espace universel : *via* deux injections  $i$  et  $j$ ,  $E$  (respectivement  $\mathcal{E}$ ) s'identifie à un sous-espace vectoriel (respectivement sous-espace affine) de  $\widehat{E}$  et il existe  $\lambda \in (\widehat{E})^* \setminus \{0\}$  tel que  $E = \ker \lambda$  et  $\mathcal{E} = \lambda^{-1}(\{1\})$ . Alors  $\mathcal{E}$  est en bijection avec  $\mathbb{P}(\widehat{E}) \setminus \mathbb{P}(E)$  et  $\mathbb{P}(\widehat{E}) = \mathcal{E} \sqcup \mathbb{P}(E)$ . L'espace  $\mathbb{P}(\widehat{E})$  est appelé la **complétion projective** de l'espace affine  $\mathcal{E}$ .

*Exemples* : •  $\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$ . On a rajouté  $\mathbb{P}^0(K)$  qui est le point à l'infini.

•  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Le plan projectif est composé de tous les points du plan affine  $\mathbb{R}^2$ , auxquels on a rajouté toutes les directions des droites vectorielles de  $\mathbb{R}^2$  : ce sont les points à l'infini.

Les droites de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sont soit une droite affine  $\mathcal{D}$  de  $\mathbb{R}^2$  à laquelle on rajoute la classe de  $\vec{\mathcal{D}}$  (le point à l'infini qui correspond à la direction de  $\mathcal{D}$ ), soit la droite tout entière contenue dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  : c'est la droite des points à l'infini.

• En itérant le procédé, on obtient par récurrence que  $\mathbb{P}^n(K) = K^n \sqcup K^{n-1} \sqcup \dots \sqcup K \sqcup \{\infty\}$ . On retrouve par exemple que  $|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)| = q^n + \dots + q + 1$ .

### 1.3 Atlas de cartes et coordonnées homogènes

Soit  $(H_0, \dots, H_n)$  une famille d'hyperplans de  $E$  avec  $\bigcap_{i=0, \dots, n} H_i = \{0\}$ . Alors  $\bigcap_{i=0, \dots, n} \mathbb{P}(H_i) = \emptyset$  et  $\mathbb{P}(E) = \bigcup_{i=0, \dots, n} (\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H_i))$ . Ainsi, il existe un recouvrement de  $\mathbb{P}(E)$  par des cartes affines, et il en faut au minimum  $n + 1$ .

Lorsque  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , une carte affine est une bijection entre  $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H)$  et  $\mathcal{H} \simeq K^n$  un  $\mathbb{R}$ - ou  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On obtient donc un **atlas de cartes**. Pour définir une structure de variété différentielle sur  $\mathbb{P}^n(K)$ , il reste à considérer les changements de carte.

**Proposition 4.** *Si  $K = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{P}^n(K)$  est une  $K$ -variété analytique compacte de dimension  $n$ , et la structure différentiable est donnée par les cartes affines.*

Démonstration.

Soit comme précédemment  $(H_0, \dots, H_n)$  une famille d'hyperplans de  $K^{n+1}$  avec  $\bigcap_{i=0, \dots, n} H_i = \{0\}$ . On choisit un système  $(x_0, \dots, x_n)$  de coordonnées de  $K^{n+1}$  telles que pour tout  $i = 0, \dots, n$ ,  $H_i = \{(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1}, x_i = 0\}$ .

Si  $x = (x_0, \dots, x_n)$  et  $y = (y_0, \dots, y_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$  sont tel que  $\pi(x) = \pi(y) \in \mathbb{P}^n(K)$  si, et seulement s'il existe  $\lambda \in K^*$  tel que pour tout  $i = 0, \dots, n$ ,  $y_i = \lambda x_i$ .

**Définition 5.** *Si  $x = (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ , on note  $[x_0 : \dots : x_n]$  les **coordonnées homogènes** de  $\pi(x) \in \mathbb{P}^n(K)$ . Par définition, pour tout  $\lambda \in K^*$ ,  $[\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n]$ .*

Pour tout  $i$ , notons  $\mathcal{H}_i = \{(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1}, x_i = 1\}$ . C'est un hyperplan affine de direction  $H_i$  ne passant pas par l'origine.

Si  $x = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H_i)$ ,  $x_i \neq 0$ . Si l'on note  $\varphi_i : \mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H_i) \rightarrow \mathcal{H}_i$  la carte affine associée, elle s'écrit en coordonnées homogènes  $\varphi_i([x_0 : \dots : x_n]) = (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$ . Son inverse est  $\varphi_i^{-1}(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = [x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]$ .

Si  $i < j$ , et  $x \in \mathbb{P}(E) \setminus (\mathbb{P}(H_i) \cup \mathbb{P}(H_j))$ , en coordonnées homogènes,  $x_i \neq 0$  et  $x_j \neq 0$ . Ainsi,  $\varphi_i(\mathbb{P}(E) \setminus (\mathbb{P}(H_i) \cup \mathbb{P}(H_j))) = \mathcal{H}_i \cap \{x_j \neq 0\} = U_{i,j}$  est un ouvert de  $K^n$ .

L'application de changement de carte est donc  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : U_{i,j} \subset \mathcal{H}_i \rightarrow U_{j,i} \subset \mathcal{H}_j$  qui à  $(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$  avec  $x_j \neq 0$  associe  $(y_0, \dots, y_{j-1}, 1, y_{j+1}, \dots, y_n)$  tel que  $[x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n] = [y_0 : \dots : y_{j-1} : 1 : y_{j+1} : \dots : y_n]$ .

Ainsi,  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = (\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_i}{x_j} = \frac{1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, 1, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j})$ . Les changements de carte sont donc des difféomorphismes analytiques.

La compacité est laissée en exercice. □

*Exemples* : • Il faut deux cartes pour recouvrir  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \{[x : y], (x, y) \neq (0, 0)\}$ . La première pour  $y \neq 0$  qui peut être paramétrée par  $x \mapsto [x : 1]$  et en bijection avec  $\mathbb{R}$ . La deuxième s'obtient en échangeant les rôles de  $x$  et  $y$ . Pour obtenir tout  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  en partant de la première carte, il faut rajouter le point  $[1 : 0] = \infty$ , le point à l'infini. On retrouve  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . On a le même résultat pour  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  et bien sûr de façon générale pour  $\mathbb{P}^1(K)$  pour tout corps  $K$ .

• De même, la bijection  $(x, y) \mapsto [x : y : 1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  permet d'identifier  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  avec le plan affine réel. L'hyperplan projectif à l'infini  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  est l'ensemble des coordonnées homogènes de la forme  $[x : y : 0]$  avec  $(x, y) \neq (0, 0)$  : c'est la droite des points à l'infini.

## 1.4 Repère projectif

Si  $(e_0, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , on obtient par la projection  $\pi : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(E)$  un  $(n+1)$ -uplet  $(p_0, \dots, p_n)$  de points de  $\mathbb{P}(E)$ .

Si les coordonnées de  $x \in E$  dans la base  $(e_0, \dots, e_n)$  sont  $(x_0, \dots, x_n)$ , alors les coordonnées homogènes de  $\pi(x)$  associées à cette base sont  $[x_0 : \dots : x_n]$ . Dans la définition des coordonnées homogènes, on a donc besoin de la donnée d'une base de  $E$ . Mais en réalité, toute base de la forme  $(\lambda e_0, \dots, \lambda e_n)$  avec  $\lambda \in K^*$  fournit le même système de coordonnées homogènes. On voudrait trouver un moyen plus intrinsèque de déterminer le système de coordonnées homogènes sans revenir aux vecteurs de  $E$ , mais en prenant directement des points de  $\mathbb{P}(E)$ .

Si l'on se donne  $(p_0, \dots, p_n)$  un  $(n+1)$ -uplet de points de  $\mathbb{P}(E)$  tels que les  $(n+1)$  droites  $\pi^{-1}(p_i) \cup \{0\}$  engendrent  $E$  tout entier, cela ne suffit pas à définir les coordonnées homogènes d'un point de  $\mathbb{P}(E)$ . En effet, si pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  on choisit un relevé  $e_i \neq 0$  de  $p_i$  (au sens où  $p_i = \pi(Ke_i)$ ), ces  $(n+1)$  vecteurs forment une base  $(e_0, \dots, e_n)$  de  $E$  dont on pourrait se servir pour définir des coordonnées homogènes. Mais pour tout  $(n+1)$ -uplet  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in (K^*)^{n+1}$ ,  $(\lambda_0 e_0, \dots, \lambda_n e_n)$  est encore une base de  $E$  et fournit des coordonnées homogènes différentes des précédentes dès que deux scalaires  $\lambda_i$  sont distincts.

Pour résoudre ce problème, il faut introduire un  $(n+2)$ -ième point  $p_{n+1} = \pi(e_0 + \dots + e_n)$ . En effet, si pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\lambda_i e_i$  est un relevé non nul de  $p_i$  et  $\lambda(e_0 + \dots + e_n)$  est un relevé non nul également de  $p_{n+1}$ , alors  $\lambda(e_0 + \dots + e_n) = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n$  et comme  $(e_0, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , pour tout  $i$ ,  $\lambda_i = \lambda$  et le système de coordonnées homogènes ainsi défini par cet autre choix de vecteurs est le même.

Ceci conduit donc à la définition suivante.

**Définition 6.** *Un repère projectif de  $\mathbb{P}(E)$  est un système de  $(n+2)$  points  $(p_0, \dots, p_n, p_{n+1})$  de  $\mathbb{P}(E)$  tels qu'il existe une base  $(e_0, \dots, e_n)$  de  $E$  vérifiant  $\pi(e_i) = p_i$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $\pi(e_0 + \dots + e_n) = p_{n+1}$ .*

Si  $(e'_0, \dots, e'_n)$  est une autre base de  $E$  vérifiant les conditions de la définition, alors le raisonnement précédent montre qu'il existe  $\lambda \in K^*$  tel que pour tout  $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ ,  $e'_i = \lambda e_i$ .

Ainsi, étant donné un repère projectif  $(p_0, \dots, p_{n+1})$  de  $\mathbb{P}(E)$ , les coordonnées homogènes de tout point  $p$  de  $\mathbb{P}(E)$  sont uniquement déterminées. On les appelle les **coordonnées projectives de  $p$  dans le repère**  $(p_0, \dots, p_{n+1})$ .

## 1.5 Sous-espaces projectifs

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. Rappelons que l'application  $\mathbb{P}$  de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E$  dans l'ensemble des sous-espaces projectifs de  $\mathbb{P}(E)$ , qui à  $F$  associe  $\mathbb{P}(F)$  vu comme un sous-espace de  $\mathbb{P}(E)$ , est une bijection. De plus, elle est compatible avec l'intersection : si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ ,  $\mathbb{P}(F \cap G) = \mathbb{P}(F) \cap \mathbb{P}(G)$ . Ainsi, l'intersection d'une famille de sous-espaces projectifs de  $\mathbb{P}(E)$  est encore un sous-espace projectif de  $\mathbb{P}(E)$ .

Si  $S$  est une partie de  $\mathbb{P}(E)$ , il existe un plus petit sous-espace projectif contenant  $S$  : c'est l'intersection de tous les sous-espaces projectifs de  $\mathbb{P}(E)$  contenant  $S$ . Il est appelé le **sous-espace projectif engendré par  $S$** , noté  $\text{Proj}(S)$ , et qui n'est autre que  $\mathbb{P}(\text{Vect}(\pi^{-1}(S)))$ .

**Définition 7.** *Des points  $p_0, \dots, p_k$  de  $\mathbb{P}(E)$  sont dits **projectivement indépendants** si la dimension du sous-espace projectif  $\text{Proj}(p_0, \dots, p_k)$  est égale à  $k$ .*

Par exemple, deux points distincts sont projectivement indépendants, et définissent une droite projective. Trois points non alignés sont aussi projectivement indépendants et définissent un plan projectif. *Etc.*

**Proposition 8.** *Un  $(n+2)$ -uplet  $(p_0, \dots, p_{n+1})$  de points de  $\mathbb{P}(E)$  forme un repère projectif si, et seulement si pour tout  $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ , les points  $p_0, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_{n+1}$  sont projectivement indépendants.*

Démonstration.

Le sens direct est immédiat.

Pour la réciproque, soient  $e_0, \dots, e_{n+1}$  des vecteurs de  $E \setminus \{0\}$  relevant les points  $p_0, \dots, p_{n+1}$ . Comme les points  $p_0, \dots, p_n$  sont projectivement indépendants, la famille  $(e_0, \dots, e_n)$  forme une base de  $E$ . Il existe donc  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in K^{n+1}$  tels que  $e_{n+1} = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la famille  $(e_0, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1})$  est libre, donc  $\lambda_i \neq 0$ . Ainsi, en posant  $e'_i = \lambda_i e_i$ , ce sont des vecteurs non nuls tels que  $\pi(e'_i) = p_i$ , et  $e_{n+1} = e'_0 + \dots + e'_n$ . La famille  $(p_0, \dots, p_{n+1})$  est donc bien un repère projectif.  $\square$

**Proposition 9.** Soient  $V$  et  $W$  deux sous-espaces projectifs de  $\mathbb{P}(E)$ . Alors

$$\dim(\text{Proj}(V \cup W)) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W.$$

*Démonstration.*

Il existe deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  tels que  $V = \mathbb{P}(F)$  et  $W = \mathbb{P}(G)$ . Alors  $V \cap W = \mathbb{P}(F \cap G)$  et  $\text{Proj}(V \cup W) = \mathbb{P}(F + G)$ . Comme  $\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$ , la formule reste vraie en projectif en retranchant 1 à toutes les dimensions.  $\square$

**Corollaire 10.** (1) Si  $\dim V + \dim W \geq \dim \mathbb{P}(E)$ , alors  $V \cap W \neq \emptyset$ .

(2) Si  $n = \dim \mathbb{P}(E)$ , alors  $n$  hyperplans de  $\mathbb{P}(E)$  ont toujours un point commun.

(3) En particulier, deux droites distinctes d'un plan projectif ont toujours un et un unique point d'intersection.

(4) Si  $H$  est un hyperplan de  $\mathbb{P}(E)$  et  $p \notin H$  un point, toute droite de  $\mathbb{P}(E)$  passant par  $p$  intersecte  $H$  en un unique point.

*Exemple du plan projectif en carte affine :* Dans une carte affine du plan projectif, qui est un plan affine, deux droites affines  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  s'intersectent ou sont parallèles. Dans le premier cas, leurs directions sont distinctes et elles ne s'intersectent pas à l'infini. Dans le second cas, ces deux droites ne s'intersectent pas dans le plan affine mais ont la même direction vectorielle. Le point d'intersection commun est alors la droite vectorielle qui est la direction commune des deux droites affines, comme élément de la droite projective à l'infini. On dit alors que les deux droites s'intersectent à l'infini. Manque un dernier cas, où l'une des droites est la droite projective à l'infini. L'autre droite coupe alors le plan affine en une droite affine  $\mathcal{D}$  et intersecte la droite à l'infini en un unique point, correspondant encore à la direction vectorielle de la droite  $\mathcal{D}$ .

## 2 Homographies

### 2.1 Morphismes et homographies

Si  $E$  et  $F$  sont des  $K$ -espaces vectoriels et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire,  $f$  envoie les droites de  $(E \setminus \ker f) \cup \{0\}$  sur des droites de  $F$ . Ainsi,  $f$  induit une application  $P(f) : \mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(\ker f) \rightarrow \mathbb{P}(F)$  telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} E \setminus \ker f & \xrightarrow{f} & F \setminus \{0\} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(\ker f) & \xrightarrow{P(f)} & \mathbb{P}(F) \end{array}$$

On remarque de plus que lorsque cela a un sens – c'est-à-dire, hors de  $\mathbb{P}(f^{-1}(\ker g))$  –,  $P$  « commute » avec la composition :  $P(f \circ g) = P(f) \circ P(g)$  (on parle de *fonctorialité*).

**Définition 11.** Soient  $\mathbb{P}(E)$  et  $\mathbb{P}(F)$  deux  $K$ -espaces projectifs. Un **morphisme** d'espaces projectifs est une application  $\varphi : \mathbb{P}(E) \setminus V \rightarrow \mathbb{P}(F)$  où  $V = \mathbb{P}(G)$  est un sous-espace projectif de  $\mathbb{P}(E)$  telle qu'il existe une application  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $\ker f = G$  et  $\varphi = P(f)$ .

Si de plus  $F = E$  et  $f \in \mathcal{G}\ell(E)$ , une telle application est appelée **isomorphisme** d'espaces projectifs ou **homographie**. L'ensemble des homographies de  $\mathbb{P}(E)$  forme un groupe, noté  $PGL(E)$ , ou  $PGL_n(K)$  lorsque l'espace est  $\mathbb{P}^{n-1}(K)$ . (ATTENTION au « décalage » dans les dimensions, pour une raison qui apparaîtra bientôt.)

Avec cette définition, on peut se demander à quelle condition deux applications linéaires  $f$  et  $g$  de  $E$  dans  $F$  définissent le même morphisme d'espaces projectifs.

**Proposition 12.** *Soient  $f$  et  $g \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $P(f) = P(g)$  si, et seulement si il existe  $\lambda \in K^*$  tel que  $g = \lambda f$ .*

Démonstration.

Le sens indirect est immédiat.

Pour le sens direct, si  $f$  et  $g$  définissent le même morphisme d'espaces projectifs, cela implique déjà que  $\ker g = \ker f$ . Soit  $G$  un supplémentaire de  $\ker f$  dans  $E$ . Comme  $P(f) = P(g)$ , l'image de  $f$  et l'image de  $g$  dans  $F$  sont égales et  $f|_G, g|_G : G \rightarrow \text{Im } f$  sont des isomorphismes. Comme  $P(f) = P(g)$ ,  $P(f|_G^{-1} \circ g|_G) = \text{id}_{\mathbb{P}(G)}$ . Ainsi,  $f|_G^{-1} \circ g|_G : G \rightarrow G$  est un automorphisme linéaire laissant globalement invariante toute droite de  $G$ . Il existe donc  $\lambda \in K^*$  tel que  $f|_G^{-1} \circ g|_G = \lambda \text{id}_G$ . Comme  $g|_G = \lambda f|_G$  et  $\ker f = \ker g$  est un supplémentaire de  $G$ ,  $f = \lambda g$ , ce qui démontre le sens direct de la proposition.  $\square$

**Corollaire 13.** *On a l'isomorphisme  $PGL(E) \simeq \mathcal{G}\ell(E)/(K^* \text{id}_E)$ .*

*Exemple :*  $PGL_2(K) \simeq \mathcal{G}\ell_2(K)/(K^* \text{id})$ . D'où le décalage précédent dans les dimensions.

Si  $f \in \mathcal{G}\ell_2(K)$ ,  $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $ad - bc \neq 0$ .

En coordonnées homogènes, on écrit  $P(f)([x : y]) = [ax + by : cx + dy]$ .

- Si  $c = 0$ ,  $ad \neq 0$  et en divisant par  $d$ , on peut supposer que  $d = 1$  et  $P(f)([x : y]) = [ax + by : y]$ .

Ainsi, dans la carte affine donnée par  $y = 1$ ,  $P(f)([x : 1]) = [ax + b : 1]$  et on retrouve une application affine. Manque l'image du point à l'infini :  $P(f)([1 : 0]) = [a : 0] = [1 : 0]$  car  $a \neq 0$ . Donc  $P(f)$  fixe le point à l'infini. C'est un prolongement à  $\mathbb{P}^1(K)$  d'une application affine de la droite  $K$ .

- Si  $c \neq 0$ , dans la carte affine,  $P(f)([x : 1]) = [ax + b : cx + d]$ .

Lorsque  $x \neq -d/c$ ,  $P(f)([x : 1]) = [\frac{ax+b}{cx+d} : 1]$ , l'expression «habituelle» d'une homographie.

Lorsque  $x = -d/c$ ,  $P(f)[-d/c : 1] = [-ad/c + b : 0] = [1 : 0]$  puisque  $-ad/c + b \neq 0$ . L'image de  $-d/c$  est donc le point à l'infini.

Calculons l'image du point à l'infini :  $P(f)([1 : 0]) = [a : c] = [a/c : 1]$  puisque  $c \neq 0$ . Ainsi, l'image du point à l'infini est  $a/c$ .

Ces deux dernières images sont cohérentes avec les limites lorsque  $x$  tend vers l'infini ou  $-d/c$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  de la fraction rationnelle  $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ .

Cette analyse se généralise en toute dimension. En particulier, une homographie  $h$  de  $PGL(E)$  préservant globalement un hyperplan projectif  $\mathbb{P}(H)$  induit une bijection affine dans la carte affine correspondante  $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H)$ . Plus précisément, dans une base de  $E$  dont les  $n$  premiers vecteurs forment une base de  $H$ , la matrice d'une application  $f$  de  $\mathcal{G}\ell(E)$  induisant  $h$  est de la forme

$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , où  $A \in \mathcal{G}\ell_n(K)$ ,  $b \in K^n$  et  $\lambda \neq 0$ . On peut en divisant par  $\lambda$  trouver un

représentant de cette forme avec de plus  $\lambda = 1$ . En coordonnées homogènes, cela donne  $h([X : 1]) = [AX + b : 1]$ . Ainsi, dans la carte affine correspondant à  $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(H)$  qui est un espace affine de direction  $H$ ,  $h = P(f)$  est un élément du groupe affine, de direction  $A \in \mathcal{G}\ell(H)$ . De plus, tout élément du groupe affine provient par ce procédé d'une unique homographie de  $\mathbb{P}(E)$ , laissant l'hyperplan à l'infini globalement invariant.

**Théorème 14** (Théorème fondamental de la géométrie projective.). *Si  $(p_0, \dots, p_{n+1})$  et  $(p'_0, \dots, p'_{n+1})$  sont deux repères d'un espace projectif  $\mathbb{P}(E)$ , alors il existe une unique homographie  $h \in PGL(E)$  telle que pour tout  $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$ ,  $h(p_i) = p'_i$ .*

Démonstration.

La démonstration est immédiate avec le formalisme vectoriel : si  $(e_0, \dots, e_n)$  et  $(e'_0, \dots, e'_n)$  sont des bases de  $E$  telles que pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\pi(e_i) = p_i$  et  $\pi(e'_i) = p'_i$ , avec  $\pi(e_0 + \dots + e_n) = p_{n+1}$  et  $\pi(e'_0 + \dots + e'_n) = p'_{n+1}$ , alors il existe une application  $f \in \mathcal{G}\ell(E)$  telle que pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f(e_i) = e'_i$ . L'homographie  $P(f)$  convient.

Si  $f$  et  $g \in \mathcal{G}\ell(E)$  sont telles que  $P(f)$  et  $P(g)$  conviennent, l'homographie  $P(f^{-1} \circ g)$  fixe le repère projectif  $(p_0, \dots, p_{n+1})$ . Comme précédemment, il existe donc des scalaires non nuls  $\lambda_0, \dots, \lambda_n, \lambda$  tels que pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f^{-1} \circ g(e_i) = \lambda_i e_i$  et  $f^{-1} \circ g(e_0 + \dots + e_n) = \lambda(e_0 + \dots + e_n)$  et donc pour tout  $i$ ,  $\lambda_i = \lambda$ . Ainsi,  $g = \lambda f$ , ce qui implique que  $P(f) = P(g)$ .

En particulier, la démonstration permet de voir qu'une homographie fixant un repère projectif n'est autre que l'identité.  $\square$

**Corollaire 15.** *Le groupe des homographies  $PGL(E)$  est transitif sur  $\mathbb{P}(E)$  et simplement transitif sur l'ensemble des repères projectifs de  $\mathbb{P}(E)$ .*

On remarque que si  $f \in \mathcal{G}\ell(E)$ , il y a une bijection entre les droites propres de  $f$  et les points fixes de  $P(f) \in PGL(E)$ . Ainsi, on a la proposition suivante.

**Proposition 16.** *Lorsque le corps  $K$  est algébriquement clos (par exemple  $K = \mathbb{C}$ ), toute homographie de  $PGL_n(K)$  admet au moins un point fixe. Il en va de même pour les homographies de  $PGL_{2n+1}(\mathbb{R})$ .*

**Définition 17.** *On note  $PSL_n(K)$  l'image du groupe spécial linéaire  $SL_n(K)$  par la projection  $\mathcal{G}\ell_n(K) \rightarrow PGL_n(K) \simeq \mathcal{G}\ell_n(K)/K^*$ .*

◇ *Exercice :* Lorsque  $K = \mathbb{F}_q$  est un corps fini, calculer le cardinal de  $PGL_n(\mathbb{F}_q)$  et  $PSL_n(\mathbb{F}_q)$ .

Sur ce sujet, on consultera avec profit [P, IV.5 pp. 105–107].

Il est aussi intéressant d'étudier l'action du groupe modulaire  $PSL_2(\mathbb{Z})$  sur le demi-plan de Poincaré  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$ . Ceci permet par exemple de montrer que les images des matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  dans  $PSL_2(\mathbb{Z})$  engendrent tout le groupe. Voir [Se, Chapitre VII] et [FGN, Exercice 2.17 p. 55].

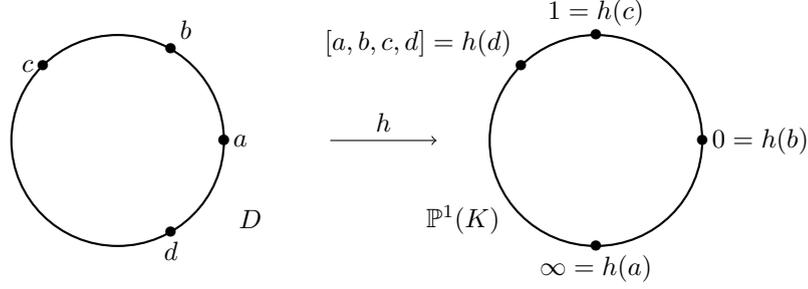
## 2.2 Birapport

Si  $D$  et  $D'$  sont deux droites projectives d'un espace projectif  $\mathbb{P}(E)$ , trois points distincts  $x_1, x_2, x_3$  de  $D$  (respectivement trois points distincts  $x'_1, x'_2, x'_3$  de  $D'$ ) forment des repères projectifs de  $D$  (respectivement  $D'$ ). Il existe donc une homographie  $h \in PGL(E)$  telle que  $h(x_i) = x'_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Ainsi, dès que la dimension de  $\mathbb{P}(E)$  est au moins 1, le groupe des homographies  $PGL(E)$  est transitif sur les triplets de points distincts et alignés de  $\mathbb{P}(E)$ . Mais qu'en est-il pour quatre points alignés ?

**Définition 18.** *Soit  $D$  une droite projective et  $x_1, x_2, x_3, x_4$  quatre points de  $D$  dont les trois premiers sont distincts. Il existe une unique homographie  $h : D \rightarrow \mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$  telle que  $h(x_1) = \infty$ ,  $h(x_2) = 0$  et  $h(x_3) = 1$ . Alors  $h(x_4) \in K \cup \{\infty\}$  est appelé le **birapport** des points  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , et noté  $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ .*

Si  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sont quatre points alignés d'un espace projectif  $\mathbb{P}(E)$  tels que les trois premiers soient distincts, leur birapport est le birapport sur la droite qu'ils déterminent. Si ce sont des points d'un  $K$ -espace affine  $\mathcal{E}$ , leur birapport est le birapport calculé dans  $\mathbb{P}(\bar{E})$  le complété projectif de  $\mathcal{E}$ .

En particulier, si  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sont quatre points alignés de  $\mathbb{P}(E)$  avec les trois premiers distincts et  $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4$  quatre autres points alignés,  $[x_1, x_2, x_3, x_4] = [x'_1, x'_2, x'_3, x'_4]$  si, et seulement si il existe une homographie  $h \in PGL(E)$  telle que  $h(x_i) = x'_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ . Ainsi, le birapport permet de caractériser les orbites des quadruplets de points distincts et alignés sous l'action du groupe des homographies.

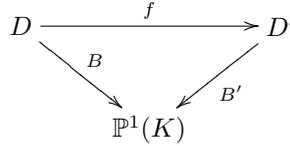


ATTENTION : La définition du birapport n'est pas très standardisée et peut différer selon les auteurs. Certains placent le point  $x_4$  en premier, par exemple... Il faut toujours redéfinir cette notion clairement et faire attention à la convention prise. En particulier, l'ordre dans lequel interviennent les points est très important.

**Proposition 19.** *Soient  $D$  et  $D'$  deux droites projectives. Toute injection  $f : D \rightarrow D'$  qui préserve le birapport est une homographie.*

Démonstration.

Fixons  $a, b, c$ , trois points distincts de  $D$ . Ils forment un repère projectif de  $D$ . Comme  $f$  est injective, les images  $f(a), f(b), f(c)$  de ces points sont trois points distincts de  $D'$ , formant donc aussi un repère projectif. Mais l'application  $B : d \mapsto [a, b, c, d]$  est par définition une homographie entre  $D$  et  $\mathbb{P}^1(K)$ , et de même l'application  $B' : d' \mapsto [f(a), f(b), f(c), d']$  est une homographie entre  $D'$  et  $\mathbb{P}^1(K)$ . Comme  $f$  préserve le birapport,  $f$  est égale à  $B'^{-1} \circ B$  qui est la composée de deux homographies, donc  $f$  est une homographie.



En effet, en calculant,  $B' \circ f(d) = [f(a), f(b), f(c), f(d)] = [a, b, c, d] = B(d)$ . □

**Proposition 20.** *Soient  $a, b, c, d$  quatre points de  $\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$  dont les trois premiers sont distincts. Alors*

$$[a, b, c, d] = \left( \frac{d-b}{d-a} \right) / \left( \frac{c-b}{c-a} \right).$$

Démonstration.

Soit  $h \in PGL_2(K)$  l'unique homographie telle que  $h(a) = \infty$ ,  $h(b) = 0$  et  $h(c) = 1$ . On vérifie que  $h$  est donnée par  $h(t) = \left( \frac{t-b}{t-a} \right) / \left( \frac{c-b}{c-a} \right)$ , d'où la formule du birapport. □

Cette formule montre bien que l'ordre dans lequel on considère les quatre points d'un birapport est très important. On peut alors se demander ce que l'on obtient en permutant ces points, s'ils sont tous distincts. C'est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 21.** *Soient  $x_1, x_2, x_3, x_4$  quatre points distincts d'une droite projective  $\mathbb{P}^1(K)$  (donc  $K \neq \mathbb{F}_2$ ). Le birapport de ces points est  $[x_1, x_2, x_3, x_4] = \lambda \in K \setminus \{0, 1\}$ .*

*Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_4$  agit sur l'ensemble  $K \setminus \{0, 1\}$  via l'action qui à  $\sigma \in \mathfrak{S}_4$  associe  $\sigma \cdot \lambda = [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}]$ . Cette action ne dépend pas du choix des points  $x_i$ , seulement de la valeur du birapport  $\lambda$ . L'orbite de  $\lambda$  est  $\{\lambda, 1/\lambda, 1-\lambda, 1-1/\lambda, 1/(1-\lambda), \lambda/(\lambda-1)\}$ , certains de ces éléments pouvant être confondus pour certaines valeurs de  $\lambda$ . Si de plus  $K \neq \mathbb{F}_4$ , le noyau de cette action est le groupe de Klein  $V_4 \subset \mathfrak{S}_4$  constitué par l'identité et les doubles transpositions.*

Démonstration.

Il suffit de considérer l'effet d'une transposition sur le birapport : on vérifie que  $[x_2, x_1, x_3, x_4] = \lambda^{-1} = [x_1, x_2, x_4, x_3]$  et que  $[x_1, x_2, x_3, x_4] + [x_1, x_3, x_2, x_4] = 1$ . Comme  $\mathfrak{S}_4$  est engendré par ces

trois transpositions, on en déduit la proposition. On retrouve au passage que  $\mathcal{A}_4$  contient  $V_4$  un sous-groupe distingué propre, et n'est donc pas simple.  $\square$

Lorsque  $\lambda = -1$  et que  $\text{car}(K) \neq 2$ , l'orbite est constituée de seulement trois éléments,  $\{-1, 1/2, 2\}$ . En général, la définition du birapport est encore valable lorsque deux points sont confondus, mais ne s'adapte plus si trois points sont confondus. Cependant, dans ce cas très particulier, on peut trouver une généralisation adaptée. C'est la notion de division harmonique.

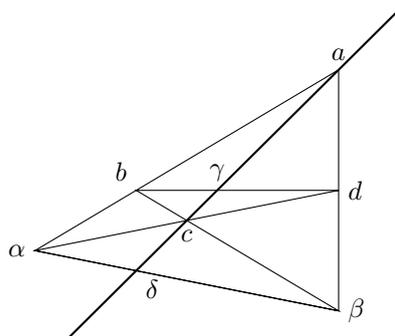
**Définition 22.** Soit  $K$  un corps de caractéristique différente de 2. Quatre points d'un  $K$ -espace projectif ou d'un  $K$ -espace affine sont dits **en division harmonique** si trois d'entre eux sont confondus et le quatrième distinct, ou s'ils sont distincts et alignés, de birapport égal à  $-1$ .

ATTENTION : L'ordre dans lequel sont considérés les points est important : si  $a, b, c, d$  sont tous distincts et en division harmonique,  $[a, c, b, d] = 1 - (-1) = 2$  et  $a, c, b, d$  ne sont plus en division harmonique.

*Exemple fondamental :* Si  $d = \infty$  et  $a, b, c \in K$  sont distincts,  $a, b, c, \infty$  sont en division harmonique si, et seulement si  $c$  est le milieu de  $a$  et  $b$ .

Si  $a, b, c, d \in K$  sont distincts, avec  $a = 0$ , alors ces quatre points sont en division harmonique si, et seulement si  $2/b = 1/c + 1/d$ .

**Proposition 23** (Quadrilatère complet et division harmonique). Soit  $(a, b, c, d)$  un repère projectif d'un plan projectif  $P$ . Soit  $\alpha$  le point d'intersection des droites  $(ab)$  et  $(cd)$ ,  $\beta$  celui des droites  $(ad)$  et  $(bc)$  et  $\gamma$  celui des droites  $(ac)$  et  $(bd)$ . Notons aussi  $\delta$  le point d'intersection des droites  $(ac)$  et  $(\alpha\beta)$ . Alors les quatre points  $a, c, \gamma, \delta$  sont alignés et en division harmonique.



La démonstration de cette proposition utilise la technique des éléments à l'infini : nous la reportons au prochain paragraphe.

**Théorème 24** (Des six birapports). Soient  $a, b, c, d, a', b', c', d'$  huit points distincts d'une droite projective. Alors on a l'égalité

$$[a, b, c', d'] [b, c, a', d'] [c, a, b', d'] [a', b', c, d] [b', c', a, d] [c', a', b, d] = 1.$$

Voir [A, Exercice VI.40] pour la démonstration et les applications aux théorèmes de géométrie affine : le théorème de Miquel, la droite de Simson et le pivot.

### 2.3 La droite projective complexe

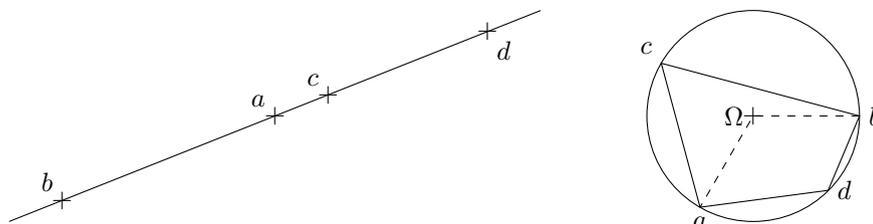
En considérant  $\mathbb{C}$  comme un plan euclidien réel, on identifie la droite projective complexe  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  avec  $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ . Dans ce contexte, les homographies de  $PGL_2(\mathbb{C})$  agissent sur le plan réel auquel on a rajouté un point infini, via l'expression avec les affixes : si  $h \in PGL_2(\mathbb{C})$  admet un représentant de matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  avec  $ad - bc \neq 0$ , alors on représente  $h$  par l'application de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  qui à  $z \in \mathbb{C}$  associe  $\frac{az+b}{cz+d}$  avec le prolongement adéquat en l'infini et  $-d/c$  si  $c \neq 0$ .

La dimension complexe de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  étant 1, il n'y a qu'une seule droite complexe. Par contre, on peut se demander quelle est l'image dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  d'une droite réelle du plan affine  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$  par une homographie.

Une homographie est une fonction méromorphe, donc conserve les angles orientés.

Une droite du plan n'est pas bornée. On peut donc la compléter en un cercle de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  en lui ajoutant le point  $\infty$ . Ainsi, les cercles du plan  $\mathbb{R}^2$  et les droites union l'infini représentent en réalité le même type d'objets dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , appelé les **cercles-droites**. Via la projection stéréographique, ce sont les cercles de la sphère de Riemann  $S^2$ , intersection de la sphère avec un plan affine de  $\mathbb{R}^3$ . Les droites correspondent alors aux cercles qui passent par le pôle d'où s'effectue la projection stéréographique.

**Proposition 25.** Soient  $a, b, c, d$  quatre points distincts du plan affine  $\mathbb{C}$ . Ces quatre points sont alignés ou cocycliques si, et seulement si leur birapport  $[a, b, c, d]$  est réel.



Démonstration.

Comme les quatre points sont distincts, le birapport dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  se calcule avec les affixes :  $[a, b, c, d] = \left(\frac{d-b}{d-a}\right) / \left(\frac{c-b}{c-a}\right)$ . Mais avec la structure euclidienne usuelle de  $\mathbb{C}$ , l'argument de ce complexe est la mesure de la différence entre les angles orientés  $(\widehat{DB}, \widehat{DA})$  et  $(\widehat{CB}, \widehat{CA})$ , ce qui signifie que ces angles diffèrent de 0 ou  $\pi$ , soit encore que les quatre points sont alignés ou cocycliques.  $\square$

Comme les homographies préservent le birapport, une homographie de  $PGL_2(\mathbb{C})$  envoie un cercle ou une droite sur un cercle ou une droite.

On peut le démontrer aussi directement : un calcul immédiat montre que le groupe des homographies  $PGL_2(\mathbb{C})$  est engendré par les similitudes directes, d'expression  $z \mapsto az + b$  et de l'application  $z \mapsto 1/z$ , qui est la composée de la réflexion  $z \mapsto \bar{z}$  et de l'inversion  $z \mapsto 1/\bar{z}$ . Comme ces transformations préservent les cercles-droites de  $P^1(\mathbb{C})$ , les éléments de  $PGL_2(\mathbb{C})$  préservent les cercles-droites. Mais ce ne sont pas les seules : les réflexions et les inversions préservent aussi les cercles-droites, mais renversent l'orientation. Donc toute application du type  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  préserve aussi les cercles-droites. Une application de ce type est appelée **anti-homographie**. Elle est la composée de la réflexion  $z \mapsto \bar{z}$  et de l'homographie  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ , et donc renverse l'orientation.

**Définition 26.** Soit  $\mathcal{C}$  le groupe des bijections de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  engendré par les homographies et la réflexion  $z \mapsto \bar{z}$ . On l'appelle le **groupe circulaire**. Il contient le groupe  $PGL_2(\mathbb{C})$  comme sous-groupe distingué d'indice 2.

**Théorème 27.** Les éléments du groupe circulaire  $\mathcal{C}$  sont exactement les bijections de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  qui préservent l'ensemble des cercles-droites.

Voir [A, Théorème VI.7.11] pour une démonstration de ce joli résultat. On peut aussi utiliser le théorème fondamental de la géométrie affine.

Voir aussi l'alternative (ou porisme) de Steiner...

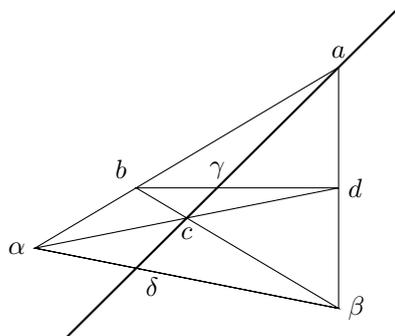
## 3 Utilisation d'éléments à l'infini

### 3.1 Envoyer des éléments à l'infini

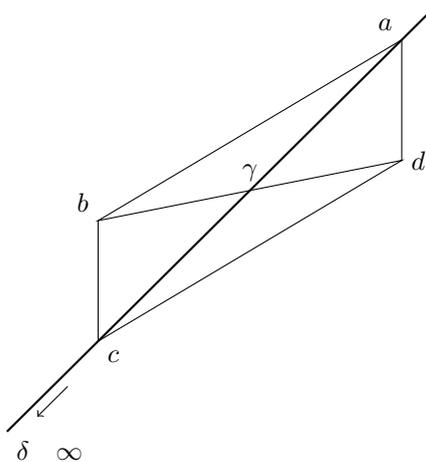
Lorsque l'on considère un problème de géométrie plane, on se place dans le plan affine réel. Mais l'on peut tout à fait décider de le compléter et de travailler dans une carte affine de la complétion projective  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  de  $\mathbb{R}^2$ . Nous avons déjà décrit les droites de cet espace : il y a les droites affines auxquelles il faut rajouter un point à l'infini correspondant à la direction de la droite, et la droite à l'infini, que nous noterons  $D$ . Mais si l'on choisit une droite  $D'$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  autre que  $D$ , cette droite

peut aussi être utilisée pour considérer une autre carte affine,  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus D'$ . Comme il existe une homographie de  $PGL_3(\mathbb{R})$  envoyant la droite  $D$  sur la droite  $D'$ , on passe de la première carte à la seconde carte affine *via* cette homographie. En particulier, les droites, les relations d'incidence et les birapports sont préservés par le changement de carte. La droite  $D$  devient une droite affine union un point à l'infini, et tous les points de  $D'$  deviennent les points à l'infini. En particulier, deux droites intersectant  $D'$  en un unique point deviennent parallèles. On peut ainsi choisir d'envoyer certains points à l'infini pour simplifier les démonstrations. Regardons par exemple la démonstration que nous avons laissée de côté.

Démonstration de la proposition du quadrilatère complet en division harmonique.



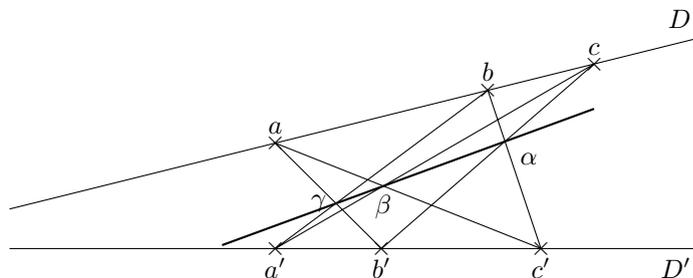
Soit  $D = (\alpha, \beta)$ . Envoyons cette droite à l'infini.



Dans la carte affine  $P \setminus D$ , les droites  $(ab)$  et  $(cd)$  sont parallèles, ainsi que les droites  $(ad)$  et  $(bc)$ . Le quadrilatère  $(abcd)$  est alors un parallélogramme et  $\gamma$  l'intersection de ses diagonales, donc le milieu de  $[ac]$ . Quant au point  $\delta$ , sur la droite  $D$ , il est à présent à l'infini. Ainsi, les quatre points  $a, c, \gamma, \delta$  sont en division harmonique.  $\square$

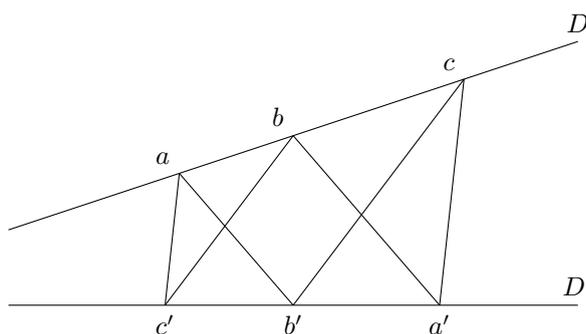
### 3.2 Théorème de Pappus, version projective

**Théorème 28** (Pappus, version projective). Soient  $D$  et  $D'$  deux droites du plan projectif  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ,  $a, b, c$  trois points distincts de  $D$  et  $a', b', c'$  trois points distincts de  $D'$ . Soient  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  les points d'intersection respectivement des droites  $(bc')$  et  $(b'c)$ ,  $(ac')$  et  $(a'c)$ ,  $(ab')$  et  $(a'b)$ . Alors ces trois points sont alignés.



Démonstration.

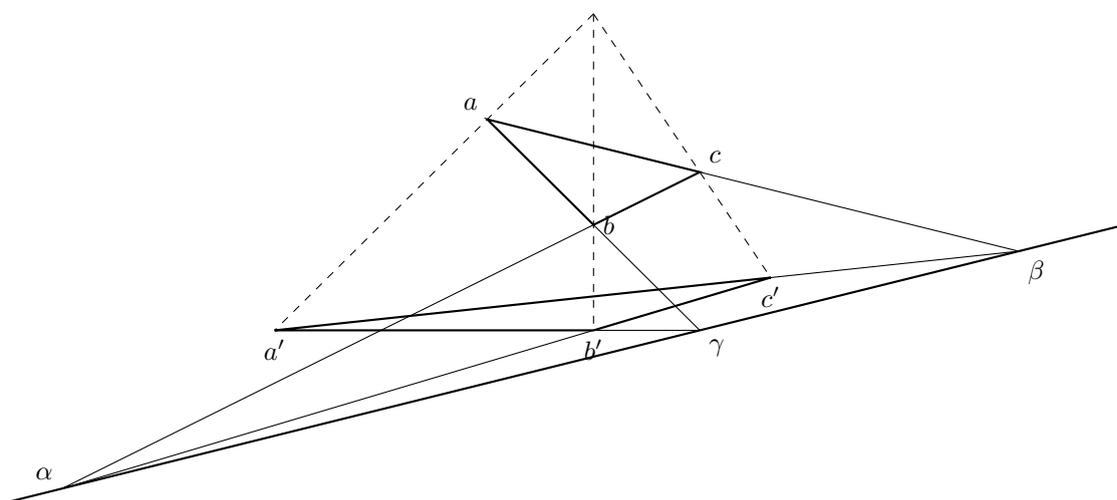
Choisissons d'envoyer la droite  $(\alpha\gamma)$  à l'infini. Dans cette nouvelle carte affine, les droites  $(bc')$  et  $(b'c)$  (respectivement  $(ab')$  et  $(a'b)$ ) sont parallèles.



Il suffit alors d'appliquer la version affine du théorème pour conclure que les droites  $(ac')$  et  $(a'c)$  sont aussi parallèles, donc que le point  $\beta$  est aussi sur la droite à l'infini  $(\alpha\gamma)$ .  $\square$

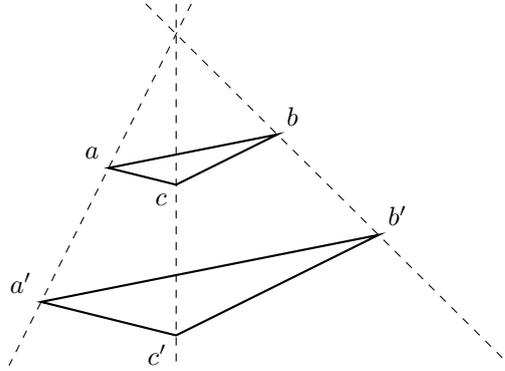
### 3.3 Dualité projective et théorème de Desargues

**Théorème 29** (Desargues, version projective). *Soient  $abc$  et  $a'b'c'$  deux triangles du plan projectif  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Soient  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  les points d'intersection respectivement des droites  $(bc)$  et  $(b'c')$ ,  $(ac)$  et  $(a'c')$ ,  $(ab)$  et  $(a'b')$ . Alors ces trois points sont alignés si, et seulement si les droites  $(aa')$ ,  $(bb')$  et  $(cc')$  sont concourantes.*



Démonstration du sens direct.

Supposons  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  alignés. On envoie la droite qu'ils forment à l'infini.



Les côtés des triangles deviennent alors parallèles deux à deux. D'après la version affine du théorème, les trois droites  $(aa')$ ,  $(bb')$  et  $(cc')$  sont alors bien concourantes.  $\square$

On pourrait procéder de même pour la réciproque, mais en réalité c'est aussi l'occasion d'introduire la dualité pour résoudre fort élégamment ce type de problème.

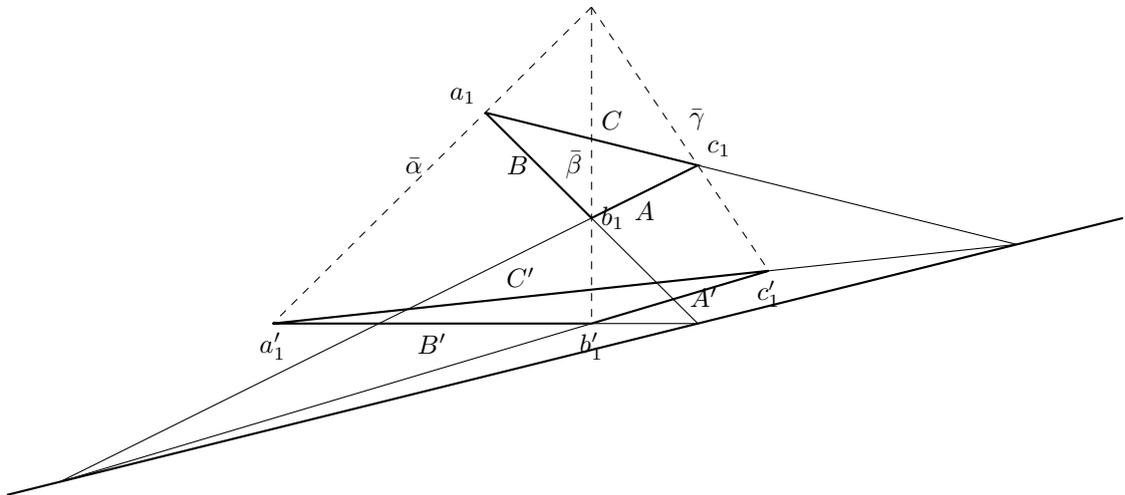
Le dual  $E^*$  d'un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$  est en bijection avec  $E$ . De plus, l'application qui à un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  associe l'orthogonal de  $F$  dans le dual (i.e.  $F^\circ = \{\varphi \in E^*, \varphi|_F = 0_F\}$ ) est une bijection entre les sous-espaces vectoriels de  $E$  et les sous-espaces vectoriels de  $E^*$ . En projectif, cela donne une bijection entre les sous-espaces projectifs de  $\mathbb{P}(E)$  et les sous-espaces projectifs de  $\mathbb{P}(E^*)$ . En particulier, les droites de  $E$  étant en bijection avec les hyperplans de  $E^*$ , il y a bijection entre les points de  $\mathbb{P}(E)$  et les hyperplans projectifs de  $\mathbb{P}(E^*)$ .

Lorsque  $E = \mathbb{R}^3$ , cela donne une bijection entre les points et les droites du plan projectif  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Dire qu'un point  $a$  est sur une droite  $D$  équivaut à dire que dans le dual, le point  $d$  est sur la droite  $A$ . La droite passant par deux points  $a$  et  $b$  correspond dans le dual au point d'intersection entre les droites  $A$  et  $B$ . Dire que trois droites sont concourantes en un point revient par dualité à dire que trois points sont alignés. *Etc.*

Démonstration du sens indirect.

Transformons par dualité la figure. Les triangles  $(abc)$  et  $(a'b'c')$  deviennent par dualité des triangles des côtés  $A, B, C$ , respectivement  $A', B', C'$ . Notons  $(a_1b_1c_1)$  et  $(a'_1b'_1c'_1)$  ces triangles, de sorte que  $a_1$  est le point d'intersection des côtés  $B$  et  $C$ , etc.

Les points  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  deviennent des droites dans le dual. Comme  $\alpha$  est l'intersection de  $(bc)$  et  $(b'c')$ , la droite correspondante est la droite  $(a_1a'_1)$ . De même,  $\beta$  correspond à la droite  $(b_1b'_1)$  et  $\gamma$  à la droite  $(c_1c'_1)$ .



Dire que les droites  $(aa')$ ,  $(bb')$  et  $(cc')$  sont concourantes revient au dual à dire que les points d'intersection respectivement de  $A = (b_1c_1)$  et  $A' = (b'_1c'_1)$ ,  $B$  et  $B'$ ,  $C$  et  $C'$  sont alignés, et dire que les points  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont alignés revient à dire que les droites  $(a_1a'_1)$ ,  $(b_1b'_1)$  et  $(c_1c'_1)$  sont

concourantes. Ainsi, montrer un sens du théorème suffit, le second s'en déduit en considérant la configuration duale.  $\square$

## Références

- [A] Michèle Audin. *Géométrie*. Collection Mathématiques. Paris : Belin. Montpellier : Espaces 34. 320 p., 1998.
- [B] Marcel Berger. *Géométrie. Vol. 1*. CEDIC, Paris, 1977. Actions de groupes, espaces affines et projectifs. [Actions of groups, affine and projective spaces].
- [C] François Combes. *Algèbre et géométrie*. Mathématiques.
- [F] Jean Frenkel. *Géométrie pour l'élève-professeur. 2e ed. rev. et corr.* 1977.
- [FGN] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Exercices de mathématiques : Oraux X-ENS Algèbre 1*. Cassini, Paris, 2001.
- [P] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*, volume 18 of *Collection de l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles*. École Normale Supérieure de Jeunes Filles, Paris, 1982. Edité en collaboration avec Marc Cabanes et Martine Duchene.
- [Sa] Pierre Samuel. *Géométrie projective*. Mathématiques. [Mathematics]. Presses Universitaires de France, Paris, 1986.
- [Se] Jean-Pierre Serre. *Cours d'arithmétique*. Presses Universitaires de France, Paris, 1977. Deuxième édition revue et corrigée, Le Mathématicien, No. 2.
- [T] Claude Tisseron. *Géométries affine, projective et euclidienne*, volume 1408 of *Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics]*. Hermann, Paris, 1983. Collection Formation des Enseignants et Formation Continue. [Collection on Teacher Education and Continuing Education].