

3.3 Corrigé

Corrigé Problème

Théorème de Motzkin-Taussky

Partie I

I-A : Le sens direct et le cas $n = 2$

1-a Stabilité des sous-espaces propres. — Soit λ une valeur propre de v et $E_\lambda(v)$ le sous-espace propre associé. Les endomorphismes $v - \lambda Id_E$ et u commutent.

Donc $\text{Ker}(v - \lambda Id_E) = E_\lambda(v)$ est stable par u , d'où le résultat.

1-b Les restrictions sont diagonalisables. — L'endomorphisme u laisse stable chaque sous-espace propre de v donc il induit sur chacun d'eux un endomorphisme. Comme u est diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racine simple annihilant u . Par restriction, ce polynôme annule chaque endomorphisme induit par u sur les sous-espaces propres de v , qui donc sont diagonalisables.

1-c Existence de \mathcal{B} . — Pour chaque $\lambda \in \text{Sp}(v)$, on considère \mathcal{B}_λ une base de réduction de l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(v)$. L'endomorphisme v étant diagonalisable,

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \text{Sp}(v)} \mathcal{B}_\lambda$$

est une base de E qui vérifie la propriété requise.

2 Généralisation. — On raisonne par récurrence sur l'entier $n = \dim E$.

Pour $n \leq 1$ le résultat est vrai. Supposons le résultat vrai jusqu'au rang $n \geq 1$.

Considérons E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n + 1$ et $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux.

Si cette famille ne contient que des homothéties, \mathcal{B} une base quelconque de E vérifie la propriété requise et le résultat est vrai au rang $n + 1$.

Sinon il existe $i_0 \in I$ tel que u_{i_0} ne soit pas une homothétie. Fixons λ dans $\text{Sp}(u_{i_0})$.

Pour tout $i \in I$, u_i est diagonalisable et commute avec u_{i_0} donc μ_i , la restriction de u_i à $E_\lambda(u_{i_0})$ constitue un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{L}(E_\lambda(u_{i_0}))$.

Alors $(\mu_i)_{i \in I}$ forme une famille d'endomorphismes diagonalisables de $\mathcal{L}(E_\lambda(u_{i_0}))$ qui commutent deux à deux. Comme les propriétés sur u_{i_0} assure $\dim E_\lambda(u_{i_0}) < \dim E$, il vient par hypothèse de récurrence l'existence de \mathcal{B}_λ une base commune de réduction dans $E_\lambda(u_{i_0})$ de la famille $(\mu_i)_{i \in I}$.

L'endomorphisme u_{i_0} est diagonalisable donc $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \text{Sp}(u_{i_0})} \mathcal{B}_\lambda$ est une base de E qui vérifie la propriété re-

quise alors, d'où le résultat au rang $n + 1$.

Il est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 (a) \Rightarrow (b) dans $\text{MT}(n, \mathbb{K})$. — Considérons A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant l'hypothèse (a) dans $\text{MT}(n, \mathbb{K})$. Introduisons u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et B dans \mathbb{K}^n . Ces endomorphismes commutent et sont diagonalisables.

Introduisons \mathcal{B} une base commune de vecteurs propres à u et v .

Alors \mathcal{B} est une base de vecteurs propres de $u + \lambda v$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Il en découle que $A + \lambda B$ est diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, d'où l'implication annoncée.

4 Étude de $\text{MT}(2, \mathbb{R})$. — L'implication (a) \Rightarrow (b) a lieu d'après ce qui précède. Cependant la réciproque est

fausse. Il suffit de prendre A et B symétriques réelles et qui ne commutent pas.

Par exemple, on prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5-a Étude de MT(2, C), première étape. — Remarquons que le problème peut se résoudre à une classe de similitude près. On peut alors supposer que $B = \text{Diag}(\alpha, \beta)$ où α et β sont des complexes. On ne restreint pas la généralité du problème en retranchant à B une matrice scalaire, ce qui permet de se ramener à $B = \text{Diag}(\alpha, 0)$, où $\alpha \in \mathbf{C}$, d'où ce premier point.

5-b Étude de MT(2, C), deuxième étape. — On peut alors se ramener par exemple au cas où $B = \text{Diag}(1, 0)$. Montrons l'existence de $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ tel que $A + \lambda_0 B$ soit scalaire. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Un calcul sans finesse montre que le discriminant du polynôme caractéristique de $A + \lambda B$ s'écrit

$$(\lambda + a - d)^2 + 4bc.$$

Il existe un complexe λ_0 qui annule ce discriminant. La matrice $A + \lambda_0 B$ est diagonalisable d'ordre 2 à valeur propre double donc c'est une matrice scalaire, d'où le résultat annoncé.

5-c MT(2, C) est vraie. — Ce qui précède montre que l'on peut se ramener au cas où $B = \text{Diag}(\alpha, 0)$.

Si $\alpha = 0$, les matrices A et B commutent.

Sinon on peut se ramener au cas $\alpha = 1$; alors il existe $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ tel que $A + \lambda_0 B$ soit scalaire ce qui assure que A et B commutent. On en déduit que l'implication $(b) \Rightarrow (a)$ est vraie dans l'affirmation **MT(2, C)**.

6-a CNS de diagonalisabilité dans \mathbb{F}_p . — Supposons $A \in M_n(\mathbb{F}_p)$ diagonalisable.

Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{F}_p)$ et $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{F}_p^n$ telle que $A = P^{-1}DP$.

On en déduit à l'aide du petit théorème de Fermat

$$A^p = P^{-1}D^pP = P^{-1}\text{Diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p)P = P^{-1}\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P = A.$$

Supposons réciproquement que $A^p = A$. Alors $X^p - X$ est un polynôme annulateur de A .

Le petit théorème de Fermat assure la relation

$$X^p - X = X(X-1)\cdots(X-p+1) = \prod_{k=0}^{p-1} (X-k)$$

et donc A est annulé par un polynôme scindé à racines simples sur \mathbb{F}_p .

Il en résulte que A est diagonalisable.

6-b Étude de MT(n, \mathbb{F}_2). — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ a lieu d'après ce qui précède.

Pour traiter la réciproque, considérons A et B des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{F}_2)$ satisfaisant (b) .

Le critère précédent permet de voir que A, B et $A + B$ sont des matrices de projections.

Il en découle

$$AB + BA = 0 \iff AB = BA,$$

ce qui assure que l'affirmation **MT(n, \mathbb{F}_2)** est vraie.

6-c Étude de MT(2, \mathbb{F}_p). — L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ a lieu d'après ce qui précède.

Pour traiter la réciproque, considérons A et B des matrices diagonalisables de $M_2(\mathbb{F}_p)$ satisfaisant (b) .

On mène une étude analogue au cas complexe.

Il nous suffit de traiter le cas $B = \text{Diag}(1, 0)$. Nous conserverons les notations de **I-A-5-b**.

Le discriminant du polynôme caractéristique de $A + \lambda B$ vaut

$$(\lambda + a - d)^2 + 4bc$$

et c'est un carré dans \mathbb{F}_p , pour tout choix de λ dans \mathbb{F}_p .

Il en découle que la fonction polynôme définie sur \mathbb{F}_p par

$$\lambda \mapsto (\lambda + a - d)^2 + 4bc$$

prend ses valeurs dans l'ensemble des carrés de \mathbb{F}_p . Donc la fonction polynôme définie sur \mathbb{F}_p par

$$\varphi : t \mapsto t^2 + 4bc$$

prend ses valeurs dans l'ensemble des carrés de \mathbb{F}_p . En outre, on a

$$(\forall (t, t') \in \mathbb{F}_p^2), (t^2 + 4bc = t'^2 + 4bc) \iff (t^2 = t'^2) \iff (t = \pm t'),$$

et comme $p \geq 3$

$$\#\varphi(\mathbb{F}_p) = \frac{p+1}{2} = \#\{\text{carrés dans } \mathbb{F}_p\}.$$

Donc le discriminant s'annule dans \mathbb{F}_p et on achève comme en **I-A-5-c**.

Partie I-B : Application de la réduction simultanée

1-a G est abélien de cardinal $\leq 2^n$. — On va raisonner sur les endomorphismes canoniquement associés dans $E = \mathbb{K}^n$. On considère alors \mathcal{G} un sous-groupe fini de $GL(E)$ tel que :

$$(\forall u \in \mathcal{G}), u^2 = Id_E.$$

Alors \mathcal{G} est abélien (classique) et par suite possède pour éléments des symétries commutant deux à deux.

Remarque : Il est bien connu que $\#\mathcal{G}$ est une puissance de deux, mais ici ce n'est pas vraiment utile.

Le corps \mathbb{K} étant de caractéristique différente de 2, ces éléments sont diagonalisables et il existe alors \mathcal{B} une base de réduction simultanée de ces éléments. En particulier la matrice d'un élément quelconque de \mathcal{G} dans cette base est de la forme

$$\text{Diag}(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1).$$

Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B} . Il apparaît alors que G est un sous-groupe multiplicatif de

$$\Gamma_n = \{P \text{Diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)P^{-1}; (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n\}$$

qui est naturellement isomorphe à $(\mathbb{F}_2^n, +)$. On en déduit que $\#G = 2^s$ où $s \in \llbracket 0, n \rrbracket$ c'est à dire $\#G \leq 2^n$, ce qui établit le résultat.

1-b $GL_n(\mathbb{K}) \sim GL_m(\mathbb{K}) \iff n = m$. — Si $n = m$ on a clairement $GL_n(\mathbb{K})$ isomorphe à $GL_m(\mathbb{K})$.

Traisons la réciproque. Considérons φ un isomorphisme de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $GL_m(\mathbb{K})$.

En conservant la notation de la question précédente, $\Gamma'_n = \varphi(\Gamma_n)$ est un sous-groupe fini de $GL_m(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$(\forall M \in \Gamma'_n), M^2 = I_m.$$

Il en résulte $\#\Gamma'_n \leq 2^m$ ou encore $2^n \leq 2^m$ c'est à dire $n \leq m$.

Les entiers naturels n et m jouant des rôles symétriques, il vient $n = m$ et le résultat annoncé.

2-a $\Phi_{A,0}$ est diagonalisable. — Introduisons pour $S \in M_n(\mathbb{C})$ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{C}))$

$$L_S : M \mapsto SM.$$

On a clairement, pour tout $S \in M_n(\mathbb{C})$

$$L_S = 0 \iff S = 0$$

puis pour tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$

$$P(L_S) = L_{P(S)}.$$

Ces propriétés assurent que S et L_S ont même polynôme minimal, pour tout $S \in M_n(\mathbf{C})$.
Donc A est diagonalisable si et seulement si $L_A = \Phi_{A,0}$ est diagonalisable, d'où le résultat.

2-b $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable. — Introduisons pour $S \in M_n(\mathbf{C})$ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(M_n(\mathbf{C}))$

$$R_S : M \mapsto MS.$$

L'endomorphisme R_S jouit des mêmes propriétés que L_S et donc est diagonalisable si et seulement si S est diagonalisable, pour tout $S \in M_n(\mathbf{C})$.

Remarquons que pour tout $(S, T) \in M_n(\mathbf{C})^2$ les endomorphismes L_S et R_T commutent avec :

$$(\forall M \in M_n(\mathbf{C})), (L_S \circ R_T)(M) = (R_T \circ L_S)(M) = SMT.$$

Supposons A et B diagonalisables.

Alors L_A et R_B sont diagonalisables et commutent donc sont simultanément diagonalisables dans une base \mathfrak{B} de $M_n(\mathbf{C})$. Cette base \mathfrak{B} se trouve être également une base de réduction de l'endomorphisme $\Phi_{A,B} = L_A + R_B$, d'où le résultat.

2-c Étude de la réciproque. — Supposons $\Phi_{A,B}$ diagonalisable.

Considérons la décomposition de Jordan-Dunford de A et B dans $M_n(\mathbf{C})$:

$$A = D_A + N_A \quad \text{et} \quad B = D_B + N_B,$$

où D_A, D_B sont diagonalisables et N_A, N_B sont nilpotentes dans $M_n(\mathbf{C})$ avec

$$D_A N_A = N_A D_A \quad \text{et} \quad D_B N_B = N_B D_B.$$

On peut écrire

$$\Phi_{A,B} = \Phi_{D_A, D_B} + \Phi_{N_A, N_B}.$$

L'endomorphisme Φ_{D_A, D_B} est diagonalisable d'après ce qui précède. Par ailleurs Φ_{N_A, N_B} est nilpotent comme somme de deux endomorphismes nilpotents qui commutent.

En outre on a

$$\begin{aligned} \Phi_{D_A, D_B} \circ \Phi_{N_A, N_B} &= (L_{D_A} + R_{D_B}) \circ (L_{N_A} + R_{N_B}) \\ &= L_{D_A} \circ L_{N_A} + L_{D_A} \circ R_{N_B} + R_{D_B} \circ L_{N_A} + R_{D_B} \circ R_{N_B} \\ &= L_{N_A} \circ L_{D_A} + R_{N_B} \circ L_{D_A} + L_{N_A} \circ R_{D_B} + R_{N_B} \circ R_{D_B} \\ &= (L_{N_A} + R_{N_B}) \circ (L_{D_A} + R_{D_B}) \\ &= \Phi_{N_A, N_B} \circ \Phi_{D_A, D_B} \end{aligned}$$

Les égalités du milieu découlant du fait des propriétés vues plus haut et que D_A et N_A puis D_B et N_B commutent. On en déduit que les endomorphismes Φ_{D_A, D_B} et Φ_{N_A, N_B} commutent et représentent la décomposition de Jordan-Dunford de $\Phi_{A,B}$. Cet endomorphisme étant diagonalisable, il vient par unicité de cette décomposition $\Phi_{N_A, N_B} = 0$.

La relation $\Phi_{N_A, N_B}(I_n) = 0$ fournit $N_B = -N_A$ et par suite N_A est dans le centre de $M_n(\mathbf{C})$.

La matrice N_A est donc scalaire nilpotente, ce qui assure $N_A = N_B = 0$ et les matrices A et B sont diagonalisables.

L'équivalence se trouve ainsi établie.

Remarque : Cette équivalence subsiste pour $\mathbb{K} = \mathbf{R}$ ou un corps de caractéristique nulle.

2-d Éléments propres de $\Phi_{A,B}$. — La matrice B étant diagonalisable, ${}^t B$ est diagonalisable.

Considérons $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ des bases de vecteurs propres de A et ${}^t B$ associés respectivement aux

valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$. On notera P et Q les matrices de passage de la base canonique à chacune de ces bases.

Introduisons alors, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

$$M_{ij} = X_i^t Y_j.$$

On a alors, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

$$\begin{aligned} \Phi_{A,B}(M_{ij}) &= AX_i^t Y_j + X_i^t Y_j B \\ &= AX_i^t Y_j + X_i^t ({}^t B Y_j) \\ &= \lambda_i X_i^t Y_j + \mu_j X_i^t Y_j \\ &= (\lambda_i + \mu_j) M_{ij}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $M_{ij} = P E_{ij} {}^t Q$, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, où $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ désigne la famille de matrices canoniques de $M_n(\mathbf{C})$. Comme $M \mapsto P M {}^t Q$ est un automorphisme de $M_n(\mathbf{C})$, il en résulte que $(M_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ constitue une base de vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$ associés aux valeurs propres $(\lambda_i + \mu_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

3-a $I_2 \in V$. — Si I_2 n'était pas un élément de V , l'ensemble $M_2(\mathbf{R}) = \mathbf{R}I_2 \oplus V$ serait constitué de matrices diagonalisables, ce qui est grossièrement faux. Donc I_2 est un élément de V .

3-b Adaptation de A et B . — Considérons A_1 une matrice non scalaire de V .

La matrice A_1 étant diagonalisable, en retranchant une matrice scalaire bien choisie, on peut se ramener au cas où A_1 admet 0 comme valeur propre simple. Elle est alors semblable à une matrice du type λA où λ est un réel non nul.

Il en résulte que V est conjugué à un hyperplan V' de $M_2(\mathbf{R})$ possédant I_2 et A .

Considérons (I_2, A, B_1) une base de V' ; en combinant B_1 avec I_2 et A , on peut la ramener de la forme

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix},$$

où (a, b) sont des scalaires réels. Cette matrice étant diagonalisable non nulle, elle vérifie $ab > 0$ et donc est proportionnelle à une matrice du type $B = \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\omega = \sqrt{b/a}$.

En résumé V est conjugué à un hyperplan engendré par les matrices (I_2, A, B) .

3-c V est conjugué à $S_2(\mathbf{R})$. — Il suffit d'établir que $W = \text{Vect}(I_2, A, B)$ est conjugué à $S_2(\mathbf{R})$.

On utilise pour cela la matrice de dilatation $P = \text{Diag}(\omega, 1)$. On a

$$P^{-1} I_2 P = I_2, \quad P^{-1} A P = A \quad \text{et} \quad P^{-1} B P = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui fournit $P^{-1} W P = S_2(\mathbf{R})$ et le résultat.

4 Généralisation pour $n = 2$. — Un tel sous-espace vectoriel est de dimension ≤ 3 .

Le cas de la dimension 3 relève de ce qui précède.

En outre, le résultat est clair pour les espaces vectoriels de dimension ≤ 1 .

Considérons $V_1 = \text{Vect}(M, N)$, un plan vectoriel de matrices diagonalisables.

Si $I_2 \in V_1$, il s'écrit $\text{Vect}(I_2, Q)$, où Q est une matrice non scalaire de V_1 .

Introduisons P la matrice de passage de la base canonique vers une base de diagonalisation de Q .

Alors $P^{-1} V_1 P$ est un sous-espace vectoriel de matrices symétriques, ce qui établit le résultat dans ce premier cas.

Si $I_2 \notin V_1$ alors c'est un sous-espace vectoriel de l'hyperplan de matrices diagonalisables $\text{Vect}(I_2, M, N)$ qui est conjugué à $S_2(\mathbf{R})$. Ainsi V_1 est conjugué à un sous-espace vectoriel de $S_2(\mathbf{R})$, d'où le résultat.

Partie II : Le cas $n = 3$

1 Discriminant de $-X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. — On a successivement

$$\begin{aligned} \Delta(-X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma) &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 2\alpha & -3 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 2\alpha & -3 \\ \gamma & \beta & 0 & \beta & 2\alpha \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & -\alpha & -3 & 0 \\ \beta & \alpha & -2\beta & 2\alpha & -3 \\ \gamma & \beta & -3\gamma & \beta & 2\alpha \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & -\alpha & -3 & 0 \\ \alpha & -2\beta & 2\alpha & -3 \\ \beta & -3\gamma & \beta & 2\alpha \\ \gamma & 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \Delta(-X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma) &= \gamma \begin{vmatrix} -\alpha & -3 & 0 \\ -2\beta & 2\alpha & -3 \\ -3\gamma & \beta & 2\alpha \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} -1 & -\alpha & -3 \\ \alpha & -2\beta & 2\alpha \\ \beta & -3\gamma & \beta \end{vmatrix} \\ &= -27\gamma^2 - 18\gamma\alpha\beta + \alpha^2\beta^2 - 4\alpha^3\gamma + 4\beta^3 \end{aligned}$$

ce qui constitue le résultat.

2 Coefficient dominant demandé. — On a

$$P_{M+\lambda N} = \begin{vmatrix} m_1 + \lambda s - X & m_2 & m_3 \\ m_4 & m_5 - X & m_6 \\ m_7 & m_8 & m_9 - X + \lambda \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est un polynôme des variables X et λ dont le degré partiel par rapport à λ n'excède pas deux, le terme de degré deux en λ étant obtenu par le développement de

$$(m_1 + \lambda s - X)(m_5 - X)(m_9 - X + \lambda).$$

Le coefficient de λ^2 est donc $s(m_5 - X)$. Alors on peut écrire

$$P_{M+\lambda N} = -X^3 + \alpha(\lambda)X^2 + \beta(\lambda)X + \gamma(\lambda)$$

où $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ et $\gamma(\lambda)$ sont des polynômes en λ dont seuls $\beta(\lambda)$ et éventuellement $\gamma(\lambda)$ contiennent un terme de degré deux en λ , puisque s est non nul. Il en résulte que le discriminant

$$-27\gamma^2(\lambda) - 18\gamma(\lambda)\alpha(\lambda)\beta(\lambda) + \alpha^2(\lambda)\beta^2(\lambda) - 4\alpha^3(\lambda)\gamma(\lambda) + 4\beta^3(\lambda)$$

est de degré 6 en λ , le coefficient dominant étant donné par les termes $\alpha^2(\lambda)\beta^2(\lambda) + 4\beta^3(\lambda)$.

Comme on a $\alpha(\lambda) = \text{tr}(M + \lambda N)$, le coefficient de λ dans $\alpha(\lambda)$ vaut donc $s + 1$.

Celui de λ^2 dans $\beta(\lambda)$ est $-s$. On en déduit que le coefficient de λ^6 est

$$s^2(s+1)^2 - 4s^3 = (s(s-1))^2 \neq 0,$$

d'où le résultat annoncé.

3-a Expression de $P_{B+\lambda Q}$. — On a successivement

$$\begin{aligned} P_{B+\lambda Q} &= \begin{vmatrix} b_1 - X & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 - X & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 + \lambda - X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b_1 - X & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 - X & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 - X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 - X & b_2 & 0 \\ b_4 & b_5 - X & 0 \\ b_7 & b_8 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= -X^3 + aX^2 + bX + c + \lambda \begin{vmatrix} b_1 - X & b_2 \\ b_4 & b_5 - X \end{vmatrix} \end{aligned}$$

et donc en utilisant les hypothèses

$$P_{B+\lambda Q} = -X^3 + (a + \lambda)X^2 + (b - (b_1 + b_5)\lambda)X + c.$$

3-b Recherche du coefficient dominant. — Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, le discriminant de $P_{B+\lambda Q}$ s'écrit

$$-27c^2 - 18c(a + \lambda)(b - (b_1 + b_5)\lambda) + (a + \lambda)^2(b - (b_1 + b_5)\lambda)^2 - 4(a + \lambda)^3c + 4(b - (b_1 + b_5)\lambda)^3.$$

On voit alors que c'est un polynôme en λ dont le degré est donné par le terme médian qui est de degré 4 et dont le coefficient dominant est $(b_1 + b_5)^2 \neq 0$.

4-a Premier résultat sur \mathcal{F} . — La matrice B est diagonalisable et les autres matrices de \mathcal{F} sont, à une matrice scalaire près, proportionnelles à des matrices du type $A + \lambda B$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, qui sont diagonalisables. Il en découle que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de matrices diagonalisables de $M_3(\mathbb{C})$.

En outre, si $\dim \mathcal{F} < 3$, alors l'une des matrices A et B est combinaison linéaire de l'autre et de I_3 et dans ce cas elles commutent, d'où le résultat.

4-b Adaption de A et B . — Si A et B ont chacune des valeurs propres doubles, on leur retranche une matrice scalaire bien choisie et on obtient des matrices proportionnelles à des matrices de projection de rang 1. Dans ce cas, on peut donc se ramener au cas où A et B sont des matrices de projection de rang 1 et en conjuguant \mathcal{F} , à $A = \text{Diag}(0, 0, 1)$ et B une matrice de projection de rang 1.

Sinon, ces matrices étant diagonalisables non scalaires, l'une d'elles, A pour se fixer les idées, n'admet que des valeurs propres simples. Si on lui retranche une matrice scalaire bien choisie, on est ramené à une matrice ayant 0 pour valeur propre simple et donc proportionnelle à une matrice admettant 0 et 1 comme valeurs propres simples puis en conjuguant \mathcal{F} , on est ramené au cas

$$A = \text{Diag}(s, 0, 1),$$

où s est un complexe distinct de 0 et 1.

Le discriminant de $P_{B+\lambda A}$ est un polynôme de degré six en λ d'après la question II-2.

Ce polynôme admet donc une racine complexe λ_0 . En particulier $B + \lambda_0 A$ est diagonalisable avec une valeur propre au moins double. Cette matrice n'étant pas scalaire, cette valeur propre est double et en retranchant une matrice scalaire bien choisie, on peut se ramener au cas où celle-ci est 0 puis se ramener au cas où cette matrice est un projecteur de rang 1.

On peut donc par conjugaison supposer que $\mathcal{F} = \text{Vect}(I_3, A, B)$ est de dimension 3 avec $A = \text{Diag}(0, 0, 1)$.

Posons

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix}.$$

En retranchant une matrice scalaire bien choisie, on peut se ramener aux conditions requises dans **II-3-a**.

Si $b_1 + b_5 \neq 0$, le discriminant de $P_{B+\lambda A}$ est un polynôme de degré 4 en λ d'après **II-3-b** et alors il s'annule sur \mathbf{C} en une valeur λ_1 . La matrice $B + \lambda_1 A$ admet alors une valeur propre double et en retranchant une matrice scalaire bien choisie, on peut se ramener à une matrice proportionnelle à un projecteur de rang 1, puis à un projecteur de rang 1. On peut donc dans ce cas trouver un système (I_3, A, B) qui engendre \mathcal{F} avec $A = \text{Diag}(0, 0, 1)$ et B un projecteur de rang 1.

Si $b_1 + b_5 = 0$, on a avec les notations de **II-3**

$$P_{B+\lambda A} = -X^3 + (a + \lambda)X^2 + bX + c$$

et le discriminant s'écrit

$$-27c^2 - 18c(a + \lambda)b + (a + \lambda)^2 b^2 - 4(a + \lambda)^3 c + 4b^3.$$

Si on avait $b = c = 0$, on aurait $P_{B-aA} = -X^3$ et comme $B - aA$ est diagonalisable, cela conduirait à $B = aA$, ce qui est impossible.

On en déduit que le discriminant est un polynôme non constant en λ et donc s'annule sur \mathbf{C} .

On achève alors comme ci-dessus, ce qui établit cette étape.

4-c (b) \Rightarrow (a). — Introduisons l'espace $\mathcal{F} = \text{Vect}(I_3, A, B)$. Ce qui précède montre qu'il suffit de traiter le cas où \mathcal{F} est de dimension 3. Par conjugaison, on peut se ramener au cas où $A = \text{Diag}(0, 0, 1)$ et B est un projecteur de rang 1. Il suffit alors d'établir que A et B commutent.

Voici une méthode possible. On peut écrire

$$B = \begin{pmatrix} ux & vx & wx \\ uy & vy & wy \\ uz & vz & wz \end{pmatrix}$$

avec $\text{tr}B = ux + vy + wz = 1$. On a $P_B = -X^2(X - 1)$ et alors d'après **II-3-a**

$$P_{B+\lambda A} = -X^3 + (\lambda + 1)X^2 + \lambda(wz - 1)X.$$

Si on avait $wz = 1$, on aurait $P_{B-A} = -X^3$ et comme la matrice $B - A$ est diagonalisable, cela conduirait à $A = B$ ce qui est exclu. On a donc $wz \neq 1$.

On note par **II-3-b** que le discriminant s'écrit

$$(1 + \lambda)^2((wz - 1)\lambda)^2 + 4((wz - 1)\lambda)^3 = (wz - 1)^2 \lambda^2 (\lambda^2 + 2(2wz - 1)\lambda + 1).$$

qui admet au moins une racine complexe non nul λ_2 . La matrice $B + \lambda_2 A$ admet donc une valeur propre double d'où l'existence de $\mu \in \mathbf{C}$ tel que

$$B + \lambda_2 A - \mu I_3 = \begin{pmatrix} ux - \mu & vx & wx \\ uy & vy - \mu & wy \\ uz & vz & wz + \lambda_2 - \mu \end{pmatrix}$$

soit de rang 1. Alors tous les déterminants d'ordre deux de cette matrice sont nuls.

En particulier

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} uy & vy - \mu \\ uz & vz \end{vmatrix} &= \mu uz = 0 \\ \begin{vmatrix} ux - \mu & wx \\ uy & wy \end{vmatrix} &= -\mu wy = 0 \\ \begin{vmatrix} vx & wx \\ vy - \mu & wy \end{vmatrix} &= \mu wx = 0 \\ \begin{vmatrix} ux - \mu & vx \\ uz & vz \end{vmatrix} &= -\mu vz = 0 \end{aligned}$$

Supposons que μ soit nul. Alors la matrice $B + \lambda_2 A$ serait de rang 1.

Le complexe λ_2 étant non nul, il vient, en exprimant que chaque déterminant extrait d'ordre deux contenant le coefficient $wz + \lambda_2$ est nul,

$$ux = vx = uy = vy = 0.$$

Mais alors, on aurait $wz = 1$, ce qui est absurde.

Donc $\mu \neq 0$, ce qui fournit $uz = wy = wx = vz = 0$ et on vérifie que A et B commutent.

Partie III : Le cas général dans C

III-A : Bases holomorphes

1 Existence de ρ et de m . — Remarquons que chaque mineur de $M(z)$ est une fonction holomorphe de z sur Ω_0 . Le principe des zéros isolés permet de voir que ces fonctions sont ou bien identiquement nulles, ou bien ne s'annulent pas sur un voisinage épointé de l'origine.

Si elles sont toutes nulles, le résultat est clair. Sinon introduisons $\rho > 0$ tel que sur $\{z \in \Omega_0 ; 0 < |z| < \rho\}$, les mineurs non identiquement nuls ne s'annulent pas. Sur cet ensemble, les matrices $M(z)$ ont un rang constant égale à l'ordre maximum des mineurs non nuls.

Il existe donc un entier naturel m tel que :

$$(\forall z \in \Omega_0), \quad (0 < |z| < \rho) \implies (\dim V(z) = m).$$

2 Existence de $(\psi_i)_{1 \leq i \leq m}$. — On va choisir $r = \rho$.

D'après la définition de r , sur l'ensemble $D_r \setminus \{0\}$, la matrice $M(z)$ est de rang $p = n - m$ et l'un des mineurs d'ordre p de $M(z)$ ne s'annule pas. (le cas $p = 0$ est aisé)

Nous supposons que c'est le mineur principal d'ordre p , pour simplifier les notations.

On a alors sur $D_r \setminus \{0\}$, $(\forall \phi \in \mathbf{C}^n)$,

$$\begin{aligned} (\phi \in V(z)) &\iff \begin{cases} m_{11}(z)\phi_1 + \dots + m_{1n}(z)\phi_n = 0 \\ \vdots \\ m_{p1}(z)\phi_1 + \dots + m_{pn}(z)\phi_n = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} m_{11}(z)\phi_1 + \dots + m_{1p}(z)\phi_p = -(m_{1(p+1)}(z)\phi_{p+1} + \dots + m_{1n}(z)\phi_n) \\ \vdots \\ m_{p1}(z)\phi_1 + \dots + m_{pp}(z)\phi_p = -(m_{p(p+1)}(z)\phi_{p+1} + \dots + m_{pn}(z)\phi_n). \end{cases} \end{aligned}$$

Posons sur D_r ,

$$U(z) = (m_{ij}(z))_{1 \leq i, j \leq p} \quad \text{et} \quad S(z) = (m_{ij}(z))_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket (p+1), n \rrbracket}.$$

La matrice $U(z)$ est inversible sur $D_r \setminus \{0\}$ donc on a : $(\forall \phi \in \mathbf{C}^n)$,

$$(\phi \in V(z)) \iff \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = -(U(z))^{-1} S(z) \begin{pmatrix} \phi_{p+1} \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}.$$

Posons sur $D_r \setminus \{0\}$,

$$-(U(z))^{-1} S(z) = W(z) = (w_{ij}(z))_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket}.$$

La fonction W est méromorphe sur D_r et admet 0 pour seul pôle éventuel, ceci en vertu des règles de calcul d'inversion de matrices.

En posant sur $D_r \setminus \{0\}$, la matrice par blocs

$$H(z) = \begin{pmatrix} W(z) \\ I_m \end{pmatrix} \in M_{nm}(\mathbf{C}),$$

il vient

$$V(z) = \left\{ H(z) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}; (v_1, \dots, v_m) \in \mathbf{C}^m \right\} = \text{Vect}(\tilde{\psi}_1(z), \dots, \tilde{\psi}_m(z)),$$

où $\tilde{\psi}_j(z)$ désigne le j -ième vecteur colonne de $H(z)$, $1 \leq j \leq m$.

Pour $z \in D_r \setminus \{0\}$, la famille $(\tilde{\psi}_j(z))_{1 \leq j \leq m}$ constitue une famille génératrice de $V(z)$ qui est de dimension m ; c'est donc une base de $V(z)$.

En outre ces fonctions sont méromorphes, non nulles sur D_r , avec 0 comme seul pôle éventuel.

Si on pose r_j l'ordre du pôle (resp. zéro) 0 dans $\tilde{\psi}_j$, la famille de fonctions $(\psi_j(z))_{1 \leq j \leq m}$ définie par $\psi_j(z) = z^{r_j} \tilde{\psi}_j(z)$ (resp. $z^{-r_j} \tilde{\psi}_j(z)$), pour $1 \leq j \leq m$, se prolonge holomorphiquement en 0 et vérifie les propriétés requises.

3-a $V(0)$ est un espace vectoriel. — On garde les notations précédentes.

Nous allons établir que

$$V(0) = \text{Vect}(\psi_1(0), \dots, \psi_m(0)).$$

Considérons $a = a_1 \psi_1(0) + \dots + a_m \psi_m(0)$; ce vecteur est limite de la suite de terme général

$$a_1 \psi_1(1/k) + \dots + a_m \psi_m(1/k) \in V(1/k), \quad \text{pour } k \text{ assez grand,}$$

ce qui fournit $\text{Vect}(\psi_1(0), \dots, \psi_m(0)) \subset V(0)$.

Pour l'inclusion inverse, considérons $\Psi_{m+1}, \dots, \Psi_n$ des vecteurs de \mathbf{C}^n tels que

$$(\psi_1(0), \dots, \psi_m(0), \Psi_{m+1}, \dots, \Psi_n)$$

forme une base de \mathbf{C}^n et notons $\Lambda(z)$ la matrice de $M_n(\mathbf{C})$ dont les vecteurs colonnes sont

$$(\psi_1(z), \dots, \psi_m(z), \Psi_{m+1}, \dots, \Psi_n), \quad \text{pour } z \in D_r.$$

La fonction $z \mapsto \det(\Lambda(z))$ est holomorphe sur D_r et ne s'annule pas sur un voisinage de l'origine.

Il existe alors $0 < r' < r$ tel que $\Lambda(z)$ soit inversible sur $D_{r'}$.

Introduisons ξ un élément de $V(0)$. Il existe donc une suite $(z_k)_{k \in \mathbf{N}}$ à valeurs dans $D_{r'} \setminus \{0\}$, de limite nulle et une suite de terme général

$$\xi_k = \xi_{1k} \psi_1(z_k) + \dots + \xi_{mk} \psi_m(z_k) \in V(z_k)$$

de limite ξ . Remarquons que les suites $(\xi_{1k})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (\xi_{mk})_{k \in \mathbb{N}}$ sont convergentes.

En effet, $(\Lambda(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices inversibles qui converge vers la matrice inversible $\Lambda(0)$.

On a donc

$$\xi_k = \Lambda(z_k) \begin{pmatrix} \xi_{1k} \\ \vdots \\ \xi_{mk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \xi_{1k} \\ \vdots \\ \xi_{mk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\Lambda(z_k))^{-1} \xi_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (\Lambda(0))^{-1} \xi.$$

Si l'on pose $v_j = \lim_{k \rightarrow +\infty} \xi_{jk}$, pour $1 \leq j \leq m$, il vient

$$\xi_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} v_1 \psi_1(0) + \dots + v_m \psi_m(0) = \xi,$$

ce qui assure que $\xi \in \text{Vect}(\psi_1(0), \dots, \psi_m(0))$. Il en résulte que $V(0)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbf{C}^n qui est bien de dimension m , d'où le résultat dans ce cas.

3-b Cas général. — Considérons ϕ_1, \dots, ϕ_m des fonctions holomorphes sur D_r , à valeurs dans \mathbf{C}^n , telles que pour tout $z \in D_r \setminus \{0\}$, les vecteurs $\phi_1(z), \dots, \phi_m(z)$ engendrent $V(z)$ et $\phi_1(0), \dots, \phi_m(0)$ soient non nuls. Nous allons construire ψ_1, \dots, ψ_m par récurrence.

Le vecteur $\phi_1(0)$ est non nul donc on peut poser $\psi_1 = \phi_1$. Supposons que pour $k < m$, les fonctions ψ_1, \dots, ψ_k soient construites telles que $(\psi_1(0), \dots, \psi_k(0))$ soit libre et

$$V(z) = \text{Vect}(\psi_1(z), \dots, \psi_k(z), \phi_{k+1}(z), \dots, \phi_m(z)), \quad \forall z \in D_r \setminus \{0\}.$$

Considérons pour $z \in D_r$, la matrice $A(z)$ de $M_{n(k+1)}(\mathbf{C})$ dont les colonnes sont respectivement

$$\psi_1(z), \dots, \psi_k(z), \phi_{k+1}(z).$$

La matrice $A(z)$ est de rang $k+1$, pour z dans $D_r \setminus \{0\}$.

Donc l'un de ses mineurs d'ordre $k+1$ ne s'annule pas sur un voisinage épointé de l'origine $D_{r''} \setminus \{0\}$ où $0 < r'' < r$. Nous supposons que c'est le mineur obtenu avec les $k+1$ premières lignes pour simplifier les notations et le noterons $\varphi(z)$, pour $z \in D_{r''}$.

On a donc sur $D_{r''}$,

$$\varphi(z) = \det(\hat{\psi}_1(z), \dots, \hat{\psi}_k(z), \hat{\phi}_{k+1}(z))$$

où

$$\hat{\psi}_1(z), \dots, \hat{\psi}_k(z), \hat{\phi}_{k+1}(z)$$

désignent les colonnes constituées des $k+1$ premières lignes de $\psi_1(z), \dots, \psi_k(z), \phi_{k+1}(z)$.

Si $(\psi_1(0), \dots, \psi_k(0), \phi_{k+1}(0))$ est libre, alors on peut prendre $\psi_{k+1} = \phi_{k+1}$.

Sinon supposons

$$\phi_{k+1}(0) = \lambda_1 \psi_1(0) + \dots + \lambda_k \psi_k(0).$$

Alors 0 est un zéro de φ et comme la fonction φ est holomorphe, non nulle sur $D_{r''}$, ce point a un ordre fini $s \geq 1$. La fonction définie sur $D_r \setminus \{0\}$ par

$$\Psi : z \mapsto \frac{1}{z} (\phi_{k+1}(z) - \lambda_1 \psi_1(z) - \dots - \lambda_k \psi_k(z))$$

est holomorphe et se prolonge de manière holomorphe à l'origine.

En outre, on a pour tout $z \in D_r \setminus \{0\}$,

$$\text{Vect}(\psi_1(z), \dots, \psi_k(z), \phi_{k+1}(z)) = \text{Vect}(\psi_1(z), \dots, \psi_k(z), \Psi(z)).$$

Par ailleurs, avec des notations évidentes, on a sur $D_{r''}$

$$\varphi(z) = \det(\hat{\psi}_1(z), \dots, \hat{\psi}_k(z), z\hat{\Psi}(z)) = z \underbrace{\det(\hat{\psi}_1(z), \dots, \hat{\psi}_k(z), \hat{\Psi}(z))}_{\theta(z)}$$

où θ est une fonction holomorphe sur $D_{r''}$.

Si $(\psi_1(0), \dots, \psi_k(0), \Psi(0))$ est libre, on peut prendre $\psi_{k+1} = \Psi$.

Dans le cas contraire on recommence avec Ψ .

À la j -ième étape de ce type, on met en évidence une fonction ϱ , holomorphe sur $D_{r''}$ telle que

$$\varphi(z) = z^j \varrho(z).$$

En particulier on a $j \leq s$; il existe donc une étape où la fonction Ψ obtenue est telle que

$$(\psi_1(0), \dots, \psi_k(0), \Psi(0)) \text{ est linéairement indépendant.}$$

On choisit alors $\psi_{k+1} = \Psi$, ce qui montre le résultat au rang $k+1$ et achève la démonstration.

La question précédente permet de déduire que $V(0)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbf{C}^n de dimension m .

4-a Holomorphie de Π . — Ceci est une conséquence du théorème d'analyticité des intégrales dépendant d'un paramètre.

4-b $\Pi(\lambda_0)$ est un projecteur. — Soit Q la matrice de passage de la base canonique à une base de réduction de $N(\lambda_0)$, obtenue en réunissant successivement une base de $E_{\mu_0}(N(\lambda_0))$ puis des autres sous-espaces propres. On a donc

$$N(\lambda_0) = Q \text{Diag}(\underbrace{\mu_0, \dots, \mu_0}_{r \text{ fois}}, \mu_1, \dots, \mu_s) Q^{-1}$$

où l'entier $r \geq 1$ désigne la multiplicité de la valeur propre μ_0 et μ_1, \dots, μ_s les autres valeurs propres de $N(\lambda_0)$, qui par hypothèse ne sont pas entourés par Γ .

Pour tout $\mu \in \Gamma$, on peut écrire

$$R(\lambda_0, \mu) = Q \text{Diag}(\underbrace{1/(\mu_0 - \mu), \dots, 1/(\mu_0 - \mu)}_{r \text{ fois}}, 1/(\mu_1 - \mu), \dots, 1/(\mu_s - \mu)) Q^{-1}$$

Les hypothèses fournissent

$$-\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\mu}{\mu_0 - \mu} = 1 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\mu}{\mu_i - \mu} = 0, \quad 1 \leq i \leq s$$

et donc

$$\Pi(\lambda_0) = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} R(\lambda_0, \mu) d\mu = Q \text{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, 0, \dots, 0) Q^{-1},$$

qui est bien la projection annoncée.

5 $\Pi(\lambda)$ est somme de projecteurs. — Cela s'obtient par un calcul analogue ou tout simplement en utilisant le théorème de Cauchy.

Partie III-B : Courbes spectrales

1 Expression de $d(x_0)$. — Notons $\mu_0, \mu'_0, \dots, \mu_0^{(s)}$ les racines distinctes de P_{λ_0} et introduisons les points de \mathcal{C}

$$x_0 = (\lambda_0, \mu_0), x'_0 = (\lambda_0, \mu'_0), \dots, x_0^{(s)} = (\lambda_0, \mu_0^{(s)}).$$

Considérons $d, d', \dots, d^{(s)}$ l'ordre de multiplicité des racines $\mu_0, \mu'_0, \dots, \mu_0^{(s)}$ de P_{λ_0} , de telle manière à avoir sur \mathbf{C}

$$P_{\lambda_0}(\mu) = (\mu_0 - \mu)^d \times (\mu'_0 - \mu)^{d'} \times \dots \times (\mu_0^{(s)} - \mu)^{d^{(s)}}.$$

Appliquons les propriétés admises au voisinage des points $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(s)}$.

Fixons $k \in \llbracket 0, s \rrbracket$ et λ assez proche de λ_0 . Considérons $(F_\alpha^{(k)}(\mathbb{D}))_{1 \leq \alpha \leq l^{(k)}}$ la famille de branches locales de \mathcal{C} au voisinage de $x_0^{(k)}$ puis $e_\alpha^{(k)}$ et $d_\alpha^{(k)}$ les ramifications et les multiplicités associées, pour $\alpha \in \llbracket 1, l^{(k)} \rrbracket$. D'après les hypothèses, il existe $e_\alpha^{(k)}$ points sur la branche $F_\alpha^{(k)}(\mathbb{D})$.

Nous les noterons

$$(\lambda, \mu_{1,\alpha,\lambda}^{(k)}, \dots, (\lambda, \mu_{e_\alpha^{(k)},\alpha,\lambda}^{(k)}).$$

On peut alors écrire, pour λ assez proche de λ_0

$$P_\lambda = \prod_{k=0}^s Q_{\lambda,k} \quad \text{où} \quad Q_{\lambda,k}(\mu) = \prod_{\alpha=1}^{l^{(k)}} \prod_{i=1}^{e_\alpha^{(k)}} (\mu_{i,\alpha,\lambda}^{(k)} - \mu)^{d_\alpha^{(k)}}.$$

Chaque branche locale étant paramétrée par une fonction continue, on peut faire tendre λ vers λ_0 , le long de chaque branche, ce qui donne $\mu_{i,\alpha,\lambda}^{(k)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} \mu_0^{(k)}$ et par suite

$$P_\lambda(\mu) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} \prod_{k=0}^s (\mu_0^{(k)} - \mu)^{\sum_{\alpha=1}^{l^{(k)}} e_\alpha^{(k)} d_\alpha^{(k)}}.$$

On en déduit alors en particulier, la relation

$$d(x_0) = d = \sum_{\alpha=1}^l e_\alpha d_\alpha.$$

2 $e_\alpha = 1$. — Gardons les notations du début de cette partie.

La matrice $A + \lambda B$ étant diagonalisable, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on peut écrire

$$(\forall z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}), \dim V_\alpha(z) = d_\alpha \quad \text{et} \quad \dim E_{\mu_0}(A + \lambda_0 B) = d(x_0).$$

Par ailleurs, la relation

$$E_{\mu_0}(A + \lambda_0 B) = \sum_{\alpha=1}^l V_\alpha(0)$$

fournit

$$\dim E_{\mu_0}(A + \lambda_0 B) \leq \sum_{\alpha=1}^l \dim V_\alpha(0).$$

Mais d'après ce qui a été obtenu en **III-A-3**, on a

$$(\forall \alpha \in \llbracket 1, l \rrbracket), \dim V_\alpha(0) = d_\alpha.$$

Il en résulte alors

$$d(x_0) \leq \sum_{\alpha=1}^l d_\alpha$$

et par application de **III-B-1**

$$\sum_{\alpha=1}^l e_\alpha d_\alpha \leq \sum_{\alpha=1}^l d_\alpha.$$

Comme $e_\alpha \geq 1$, il vient $e_\alpha = 1$, pour tout $\alpha \in \llbracket 1, l \rrbracket$.

3-a Construction des μ_i . — Considérons un point $x_0 = (\lambda_0, \mu_0)$ de \mathcal{C} et $F_\alpha(\mathbb{D})$ une branche locale en ce

point. D'après ce qui précède, on a $e_\alpha = 1$.

On en déduit que $f'_\alpha(0) \neq 0$ et que l'on peut appliquer à l'origine le théorème d'inversion locale.

Il existe alors un voisinage ω de l'origine dans \mathbb{D} et Ω un voisinage de λ_0 tel que $z \mapsto f_\alpha(z)$ constitue un C^∞ -difféomorphisme de ω sur Ω . Notons f_α^{-1} la réciproque de cette fonction sur Ω .

Cette fonction est holomorphe et l'on peut définir $\Theta = g_\alpha \circ f_\alpha^{-1}$, qui est holomorphe sur Ω .

Le graphe de Θ est contenu sur la branche $F_\alpha(\mathbb{D}) \subset \mathcal{C}$. Montrons que l'on peut prolonger Θ en une fonction entière dont le graphe est contenu dans \mathcal{C} .

La fonction Θ est développable en série entière au voisinage de λ_0 . Raisonnons par l'absurde.

Supposons que le rayon de convergence de cette série entière soit un réel $\rho > 0$.

Elle définit une fonction holomorphe φ sur $D(\lambda_0, \rho)$, le disque ouvert de convergence.

La fonction φ coïncide avec Θ sur un voisinage de λ_0 . On a donc $P_\lambda(\varphi(\lambda)) = 0$ sur un voisinage de λ_0 . La fonction

$$\lambda \mapsto P_\lambda(\varphi(\lambda)) = \det(A + \lambda B - \varphi(\lambda)I_n)$$

étant holomorphe sur $D(\lambda_0, \rho)$, nulle sur un voisinage de λ_0 , elle est donc nulle sur $D(\lambda_0, \rho)$, ce qui assure que le graphe de φ est contenu dans \mathcal{C} .

Considérons λ_1 un point du cercle de convergence $\partial D(\lambda_0, \rho)$.

Pour λ suffisamment proche de λ_1 , le graphe de φ se trouve contenu sur l'une des branches locales au voisinage d'un point de \mathcal{C} dont la première projection est λ_1 ; notons x_1 ce point et $G_\beta(\mathbb{D})$ cette branche locale.

Il existe de même une fonction Θ_1 , holomorphe sur un voisinage Ω_1 de λ_1 dont le graphe est contenu sur la branche $G_\beta(\mathbb{D})$. La ramification le long de $G_\beta(\mathbb{D})$ étant égale à 1, les fonctions φ et Θ_1 coïncident autour de λ_1 dans $D(\lambda_0, \rho) \cap \Omega_1$.

La fonction Θ_1 permet donc de prolonger de manière holomorphe la fonction φ sur un disque ouvert centré en λ_1 .

On peut alors recouvrir le cercle $\partial D(\lambda_0, \rho)$ par un nombre fini de voisinage sur lequel φ admet un prolongement holomorphe. On voit alors qu'il existe $\rho' > \rho$ tel que sur $D(\lambda_0, \rho')$, le disque ouvert de centre λ_0 et de rayon ρ' , la fonction φ admet un prolongement holomorphe.

Ceci contredit la définition de ρ , d'où l'absurdité.

On en déduit que φ est entière et constitue un prolongement de Θ qui, comme on l'a vu précédemment, a son graphe contenu dans \mathcal{C} .

On peut donc poser $\mu_1 = \varphi$ et avec les notations de **III-B-1**, en raisonnant sur chaque branche locale de chacun des points de \mathcal{C}

$$x_0 = (\lambda_0, \mu_0), x'_0 = (\lambda_0, \mu'_0), \dots, x_0^{(s)} = (\lambda_0, \mu_0^{(s)}),$$

on mettrait en évidence n fonctions entières μ_1, \dots, μ_n dont la réunion des graphes est égale à \mathcal{C} , d'où le résultat.

3-b μ_i est affine. — Fixons un entier k dans $[[1, n]]$. Choisissons sur $M_n(\mathbf{C})$ une norme N , subordonnée à une norme de \mathbf{C}^n . On a alors, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$

$$|\mu_k(\lambda)| \leq N(A + \lambda B) \leq N(A) + |\lambda|N(B).$$

La fonction μ_k est donc affine, d'après le théorème de Liouville, d'où le résultat.

4-a Détermination de ρ et Λ . — Les valeurs propres de $A + \lambda B - \mu I_n$ sont, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$

$$\mu_i(\lambda) - \mu = a_i + \lambda b_i - \mu, \quad 1 \leq i \leq n.$$

On veut établir l'existence de $\rho > 0$ et de $\Lambda > 0$ tel que : $(\forall r > 0), (\forall \lambda \in \mathbf{C})$

$$(0 < r < \rho) \text{ et } (|\lambda| > \Lambda) \implies (\forall \theta \in [0, 2\pi]), (\forall (i, j) \in [[1, n]]^2), a_i + \lambda b_i - (a_j + \lambda b_j + r e^{i\theta}) \neq 0.$$

Fixons (i, j) dans $[[1, n]]^2$. Une petite discussion élémentaire permet de mettre en évidence l'existence de $\rho_{ij} > 0$ et de $\Lambda_{ij} > 0$ tels que : $(\forall r > 0), (\forall \lambda \in \mathbf{C})$

$$(0 < r < \rho_{ij}) \text{ et } (|\lambda| > \Lambda_{ij}) \implies (\forall \theta \in [0, 2\pi]), a_i + \lambda b_i - (a_j + \lambda b_j + r e^{i\theta}) \neq 0.$$

On obtient le résultat souhaité pour le choix de

$$\rho = \min_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \rho_{ij} \quad \text{et} \quad \Lambda = \max_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \Lambda_{ij}.$$

4-b Holomorphie de $\Pi_{j,r}$. — Ceci est une conséquence du théorème d'analyticité des intégrales dépendant d'un paramètre.

4-c $\Pi_{j,r}$ admet une limite en $+\infty$. — Fixons j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la définition de ρ , le complexe $\mu_j(\lambda)$ est la seule valeur propre de $A + \lambda B$ entourée par $\Gamma_j(\lambda, r)$, pour tout $\lambda \in U_\Lambda$.

On en déduit que $\Pi_{j,r}(\lambda)$ est le projecteur spectral sur $E_{\mu_j(\lambda)}(A + \lambda B)$.

De la relation $A + \lambda B = \lambda(B + \lambda^{-1}A)$, on déduit que : $(\forall \lambda \in U_\Lambda)$,

$$E_{\mu_j(\lambda)}(A + \lambda B) = E_{\lambda^{-1}\mu_j(\lambda)}(B + \lambda^{-1}A) = E_{(b_j + \lambda^{-1}a_j)}(B + \lambda^{-1}A)$$

et par suite que $\Pi_{j,r}(\lambda)$ est le projecteur spectral sur $E_{(b_j + \lambda^{-1}a_j)}(B + \lambda^{-1}A)$.

Il s'agit de montrer que $\Pi_{j,r}(1/s)$, le projecteur spectral sur $E_{(b_j + sa_j)}(B + sA)$, admet une limite lorsque s tend vers 0. Posons

$$\mathcal{C}' = \{(s, t) \in \mathbb{C}^2 ; P_{B+sA}(t) = \det(B + sA - tI_n) = 0\}.$$

Comme B est diagonalisable, l'ensemble \mathcal{C}' a des propriétés analogues à \mathcal{C} ; ce qui précède montre que \mathcal{C}' est la réunion des graphes des applications affines

$$t_i(s) = b_i + sa_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

On a donc

$$P_B(t) = \prod_{i=1}^n (b_i - t) = (t_0 - t)^d \times (t'_0 - t)^{d'} \times \dots \times (t_0^{(k)} - t)^{d^{(k)}}$$

où $\{t_0, t'_0, \dots, t_0^{(k)}\}$ constitue l'ensemble des racines de P_B , de multiplicité respective $d, d', \dots, d^{(k)}$.

Plaçons nous au voisinage de $y_0 = (0, t_0)$ dans \mathcal{C}' . Considérons $(G_\alpha(\mathbb{D}))_{1 \leq \alpha \leq l}$ la famille de branches locales en y_0 dont les multiplicités respectives sont $(d_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq l}$.

Il existe $i_\alpha \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que la branche $G_\alpha(\mathbb{D})$ soit paramétrée autour de l'origine par $(s, t_{i_\alpha}(s))$, pour tout $1 \leq \alpha \leq l$. Introduisons alors pour $s \neq 0$ suffisamment proche de l'origine $W_\alpha(s)$, le noyau de $B + sA - t_{i_\alpha}(s)I_n$ et les sous-espaces vectoriels $W_\alpha(0)$ associés comme en **III-A-3**, pour tout $1 \leq \alpha \leq l$.

Sur un voisinage épointé de 0, les sous-espaces vectoriels $(W_\alpha(s))_{1 \leq \alpha \leq l}$ sont en somme directe.

Par ailleurs, la matrice B étant diagonalisable, on peut écrire

$$E_{t_0}(B) = \sum_{\alpha=1}^l W_\alpha(0).$$

Pour $s \neq 0$ assez proche de 0, on a $d(s, t_{i_\alpha}(s)) = d_\alpha$ et comme $B + sA$ est diagonalisable, il vient

$$\dim W_\alpha(s) = d_\alpha,$$

d'où par **III-A-3**

$$\dim W_\alpha(0) = d_\alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq l.$$

Les questions **III-B-1** et **III-B-2** fournissent

$$d(y_0) = \sum_{\alpha=1}^l d_\alpha = \sum_{\alpha=1}^l \dim W_\alpha(0).$$

La matrice B étant diagonalisable, on en déduit

$$\dim E_{t_0}(B) = \sum_{\alpha=1}^l \dim W_\alpha(0)$$

ce qui assure plus précisément la somme directe

$$E_{t_0}(B) = \bigoplus_{1 \leq \alpha \leq l} W_\alpha(0).$$

On a vu dans **III-A-3-b**, qu'il existe d_α fonctions $\psi_{\alpha 1}, \psi_{\alpha 2}, \dots, \psi_{\alpha d_\alpha}$, holomorphes sur un voisinage de 0 telles que

$$\Psi_\alpha(s) = (\psi_{\alpha 1}(s), \psi_{\alpha 2}(s), \dots, \psi_{\alpha d_\alpha}(s))$$

constitue une base de $W_\alpha(s)$, $1 \leq \alpha \leq l$.

Sur un voisinage épointé de l'origine, la famille $\mathcal{B}_0(s) = \prod_{1 \leq \alpha \leq l} \Psi_\alpha(s)$ constitue une base de $\bigoplus_{1 \leq \alpha \leq l} W_\alpha(s)$, où

chaque $W_\alpha(s)$ constitue un sous-espace propre de $B + sA$, pour $1 \leq \alpha \leq l$.

En outre \mathcal{B}_0 est holomorphe sur un voisinage de 0 avec $\mathcal{B}_0(0)$ qui constitue une base de $E_{t_0}(B)$.

En travaillant de manière analogue au voisinage des points $y'_0 = (0, t'_0), \dots, y_0^{(k)} = (0, t_0^{(k)})$ dans \mathcal{C}' , on met en évidence des fonctions $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$, holomorphes au voisinage de l'origine.

La matrice $B + sA$ est diagonalisable, pour tout $s \in \mathbf{C}$; on a alors sur un voisinage de l'origine

$$\mathcal{B}(s) = \prod_{i=0}^k \mathcal{B}_i(s)$$

qui forme une base de vecteurs propres de $B + sA$ dans \mathbf{C}^n et est une fonction holomorphe de s .

Notons $Q(s)$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}(s)$, pour s suffisamment proche de 0.

Alors $s \mapsto Q(s)$ est holomorphe sur un voisinage de 0, à valeurs dans $GL_n(\mathbf{C})$. En outre, sur un voisinage épointé de l'origine, la matrice

$$D(s) = Q^{-1}(s) \Pi_{j,r}(1/s) Q(s)$$

est diagonale, avec des coefficients diagonaux contenus dans $\{0, 1\}$. Comme D est continue sur un voisinage épointé de l'origine, elle prend une valeur constante Δ_j .

On a donc sur un voisinage épointé de l'origine,

$$\Pi_{j,r}(1/s) = Q(s) \Delta_j Q^{-1}(s),$$

fonction qui admet clairement un prolongement holomorphe en 0, ce qui constitue le résultat.

5 (b) \Rightarrow (a) dans MT(n, C). — Fixons j dans $[[1, n]]$; introduisons la fonction $\Pi_{j,r}$ précédente.

Nous allons établir que pour $r > 0$ assez petit, la fonction $\Pi_{j,r}$ se prolonge en une fonction entière.

On a $\mu_i : \lambda \mapsto a_i + \lambda b_i$, pour $i \in [[1, n]]$. Il est alors aisé de constater que les seuls points où l'on a un éventuel problème sont les complexes λ où le cercle $\Gamma_j(\lambda, r)$ rencontre une valeur propre de $A + \lambda B$.

Notons $Y(r)$ l'ensemble de ces complexes. On a précisément : ($\forall \lambda \in \mathbf{C}$),

$$\begin{aligned} (\lambda \in Y(r)) &\iff ((\exists i \in [[1, n]]), |\mu_i(\lambda) - \mu_j(\lambda)| = r) \\ &\iff ((\exists i \in [[1, n]]), |(a_i - a_j) + \lambda(b_i - b_j)| = r). \end{aligned}$$

Si $b_i = b_j$, pour tout $i \in [[1, n]]$, on a alors en prenant $r > 0$ assez petit, $\Pi_{j,r}$ entière.

Sinon pour $i \in [[1, n]]$ tel que $b_i \neq b_j$,

$$|(a_i - a_j) + \lambda(b_i - b_j)| = r \iff \left| \lambda - \frac{a_j - a_i}{b_i - b_j} \right| = \frac{r}{|b_i - b_j|}.$$

On voit alors dans ce dernier cas, pour $r > 0$ assez petit, que $Y(r)$ est une réunion de cercles $\gamma_1(r), \dots, \gamma_k(r)$ dont les centres ne dépendent pas de r et les rayons sont respectivement

$$\frac{r}{|b_{i_1} - b_j|}, \dots, \frac{r}{|b_{i_k} - b_j|},$$

où

$$\{i_1, \dots, i_k\} = \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket ; b_i \neq b_j\}.$$

Fixons un tel réel r ; considérons λ_0 un complexe de $Y(r)$, distinct des centres des cercles de $Y(r)$.

On peut alors trouver $0 < r' < r$ tel que λ_0 soit intérieur à la composante connexe non bornée de $Y(r')$.

Notons Ω et Ω' l'intérieur des composantes connexes non bornées respectives de $Y(r)$ et $Y(r')$.

On a bien sur $\Omega \subset \Omega'$; en outre $\Pi_{j,r}$ est holomorphe sur Ω et $\Pi_{j,r'}$ est holomorphe sur Ω' .

Comme pour λ complexe de module assez grand, $\Pi_{j,r}(\lambda)$ et $\Pi_{j,r'}(\lambda)$ représentent le projecteur spectral sur $E_{\mu_j(\lambda)}(A + \lambda B)$, les fonctions $\Pi_{j,r}$ et $\Pi_{j,r'}$ coïncident à l'infini. On en déduit que ces fonctions coïncident sur Ω . Ainsi $\Pi_{j,r'}$ constitue un prolongement holomorphe en λ_0 de la fonction $\Pi_{j,r}$.

Enfin, en chacun des centres des cercles de $Y(r)$, on prolonge $\Pi_{j,r}$ holomorphiquement, de la même manière que l'on a prolongé

$$s \mapsto \Pi_{j,r}(1/s)$$

en 0 dans la question précédente.

La fonction $\Pi_{j,r}$ peut être prolongée en une fonction entière qui admet une limite quand $|\lambda|$ tend vers l'infini. Elle est donc constante.

Ainsi ce résultat vaut pour chaque $\Pi_{j,r}$, $1 \leq j \leq n$, en prenant $r > 0$ assez petit ; considérons alors λ et λ' deux complexes distincts de module suffisamment grand.

On sait que les ensembles

$$\{\Pi_{j,r}(\lambda) ; 1 \leq j \leq n\} \quad \text{et} \quad \{\Pi_{j,r}(\lambda') ; 1 \leq j \leq n\}$$

décrivent respectivement l'ensemble de tous les projecteurs spectraux de $A + \lambda B$ et de $A + \lambda' B$.

Les fonctions $\Pi_{j,r}$, $1 \leq j \leq n$, étant constantes, on en déduit que les matrices $A + \lambda B$ et $A + \lambda' B$ ont les mêmes sous-espaces propres.

Il en résulte que ces matrices commutent et par suite que A et B commutent.