LM 256 - TD n°1

9 septembre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°1.

Exercice 1. 1. À cause du x^2 au dénominateur, la fonction considérée est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (on pourrait la *prolonger par continuité en 0*, c'est-à dire lui donner une valeur en 0 de sorte que la fonction obtenue soit *continue* en 0, mais ce n'est pas demandé). Ensuite, notre fonction est continue en $x_0 = \frac{\pi}{3}$ car quotient de fonctions continues en ce point, avec dénominateur non nul ; par définition de la continuité, la limite de notre fonction en x_0 est donc égale à sa valeur en ce point, soit $\frac{9}{\pi^2}$.

2. Ici encore, comme le dénominateur est nul en 0, on doit exclure ce point du domaine de définition de la fonction envisagée ; de plus, ce dénominateur s'annule encore sur tous les multiples de π et n'est pas défini (« devient infini ») en chaque $\frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Au final, en enlevant tous ces points posant problème, on obtient pour domaine de définition $\mathbb{R}\backslash\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, la droite réelle dont on a exclu tous les multiples entiers de $\frac{\pi}{2}$ (on pourrait ici aussi prolonger la fonction par continuité en tous ces points). Pour la limite en 0 (qui n'appartient pas au domaine de définition mais vers lequel on peut tendre en restant dans ce domaine), on a une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ » ; il faut donc raffiner l'analyse pour conclure. On va utiliser les développements limités usuels (à connaître !), en particulier $(1-\cos x) \sim \frac{x^2}{2}$, $\sin x \sim x$ et $\tan x \sim x$ lorsque $x \to 0$ (je vous engage à vous entraîner à l'utilisation des $\sim$, o et autres O, qui comme l'illustre cet exemple permettent une analyse efficace). La relation $\sim$ (plus précisément $\sim_{x\to 0}$) étant compatible avec la multiplication et le passage au quotient, il vient

$$\frac{(1-\cos x)\sin x}{x\tan^2 x} \sim \frac{\frac{1}{2}x^2 \cdot x}{x \cdot x^2} = \frac{1}{2} \text{ lorsque } x \to 0, \quad x \neq 0,$$

soit : la limite recherchée (existe et) vaut $\frac{1}{2}$.

3. On n'a pas ici de problème d'annulation du dénominateur car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq -1$ donc $2 + \cos x \geq 1 > 0$. Attention toutefois aux racines carrées, dont l'argument (ce qu'il y a dessous) doit être positif ; on en déduit que le domaine de définition de la fonction étudiée, disons f, est $\mathbb{R}^+$. Passons à la limite en $+\infty$; elle peut sembler délicate, puisque le numérateur est de la forme indéterminée « $+\infty - \infty$ »,

tandis que le dénominateur oscille indéfiniment entre 1 et 3. Voyons comment traiter le numérateur ; pour tout $x \geq 0$, on a

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = x + 1 - x = 1,$$

soit $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ (on a bien $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \neq 0$), ce qui tend clairement vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Au final, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \frac{1}{(2+\cos x)(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$, ce qui est positif et $\leq \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$. Cette dernière quantité tendant vers 0 quand x tend vers $+\infty$, le théorème d'encadrement (ou « des gendarmes ») nous dit que f tend vers 0 en $+\infty$.

4. On commence par exclure 0 du domaine de définition de la fonction considérée (que l'on appelle f) à cause du dénominateur. On regarde les racines ; l'argument de la racine cubique est un trinôme du second degré, dont le discriminant vaut $-31 < 0$, qui est donc de signe constant, et donc toujours positif. L'argument de la racine carrée, que l'on écrit $x(x+4)$, est positif si $x \leq -4$ ou $x \geq 0$ (et strictement négatif sinon). On en déduit que le domaine de définition de f est $]-\infty, -4] \cup]0, +\infty[$. Pour la limite en 0, on remarque que $\sqrt[3]{x^2+x+8}$ (défini sur $\mathbb{R}$) tend vers 2 en 0, soit $\sqrt[3]{x^2+x+8} - 2$ tend vers 0, ce qui semble nous empêcher de conclure quant à la limite de $\frac{\sqrt[3]{x^2+x+8}-2}{x}$ en 0. Or comme x^2+x+8 ne s'annule pas sur un voisinage de 0, $x \mapsto \sqrt[3]{x^2+x+8}$ est C^1 et donc la limite susmentionnée existe et n'est autre que sa dérivée en 0, qui est une quantité finie (que l'on peut calculer, exercice). En outre, pour $x > 0$, $\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x} = \sqrt{1 + \frac{4}{x}}$, ce qui tend vers $+\infty$. En additionnant ces deux limites (quantité finie$+\infty$), on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0, \\ x \neq 0}} f(x) = +\infty$.

Exercice 2. La fonction f (remarquons rapidement qu'elle est bien définie), qui sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ est le quotient d'une fonction — elle-même composée de fonctions continues — par une fonction continue ne s'annulant pas, est continue à gauche et à droite de 0. Il s'agit donc de voir ce qui se passe en 0. À droite, on sait que sin est dérivable en 0, de dérivée $\cos 0 = 1$, ce qui signifie que $\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, ce que l'on note aussi $\sin y \sim_0 y$. En outre, on a que $\sqrt{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et donc $\sin\sqrt{x} \sim_{0^+} \sqrt{x}$ (« on pose $y = \sqrt{x}$ »), ce qui signifie précisément que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 = f(0)$, soit : f est continue à droite en 0. De la même manière, f est continue à gauche en 0, et est donc continue sur $\mathbb{R}$.