LM 256 - TD n°11

25 novembre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°3.

Exercice 6. Rappel de la formule de changement de variables (en deux dimensions) : soit $\varphi : A \to D$ un C^1-difféomorphisme, *i.e.* une bijection C^1 dont la réciproque est C^1 (à un sous-ensemble d'aire nulle près). Notons, pour $(u,v) \in A$, $\varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$. Soit

$$\mathrm{Jac}_\varphi := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Alors Jac_φ ne s'annule pas (sauf éventuellement sur le sous-ensemble de A d'aire nulle évoqué ci-dessus), et l'on a la *formule de changement de variables* pour toute fonction f continue sur D :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_A f \circ \varphi(u,v) |\,\mathrm{Jac}_\varphi|dudv,$$

ou dans l'autre sens :

$$\iint_D g(u,v)dudv = \iint_A g \circ \varphi^{-1}(x,y) |\,\mathrm{Jac}_\varphi|^{-1}dxdy,$$

pour toute fonction g continue sur A.

On peut aussi remarquer que $\mathrm{Jac}_\varphi^{-1} = \mathrm{Jac}_{\varphi^{-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$. Le formalisme est le même en dimension ≥ 3. Cette précision faite, passons aux calculs demandés.

a) Puisque φ est linéaire, c'est un difféomorphisme *ssi* c'est un isomorphisme linéaire, ce qui est immédiat, puisque l'on peut écrire $u = x - y$, $v = 2x + y$. La matrice jacobienne du changement de variable φ, $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$, qui n'est autre que la matrice de φ comme morphisme linéaire, vaut $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, et son déterminant vaut $\frac{1}{3}$ en valeur absolue. Par ailleurs, en remplaçant x et y dans les équations des droites délimitant D par leurs expressions en u, v (c'est-à-dire en utilisant le « langage des variables u et v »), on trouve que A est délimité par les droites d'équation $\frac{1}{3}(v-2u)=\frac{1}{3}(u+v)-2$, soit $u=2$, $\frac{1}{3}(v-2u)=\frac{1}{3}(u+v)$, soit $u=0$, $\frac{1}{3}(v-2u)=-\frac{2}{3}(u+v)$, soit $v=0$, et $\frac{1}{3}(v-2u)3-\frac{2}{3}(u+v)$, soit $v=3$. L'utilité du changement de variables réside donc ici dans la simplicité de cette description. Finalement, $\int_D(3x+y)dxdy=\int_A\frac{1}{3}(u-4v)\cdot\frac{1}{3}dudv=\frac{1}{9}\int_0^2du\int_0^3(u-4v)dv=\frac{1}{9}\int_0^2[uv-2v^2]_0^3du=\frac{1}{9}\int_0^2(3u-18)du=\frac{1}{9}\left[\frac{3}{2}u^2-18u\right]_0^2=-\frac{10}{3}$.

b) Je vous laisse le faire en DM.

c) Pour voir que l'on a bien une bijection d'un domaine A dans D, on inverse d'abord les formules (disons de $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{+*}$ dans lui-même) ; elles donnent $u=xy$, $v=y$, et (u,v) dans un domaine A délimité par les courbes d'équation $u=v^2$, $u=3v^2$, $u=1$ et $u=3$ avec u et v positifs. Remarquons que sur un tel domaine, on a toujours $v\geq\sqrt{u/3}\geq 1/\sqrt{3}$, il n'y a aucun problème dans la définition de $\frac{u}{v}$. Finalement, on a une bijection $(u,v)\mapsto(\frac{u}{v},v)$ de A dans D qui est clairement C^1, dont la réciproque $(x,y)\mapsto(xy,y)$ est elle aussi C^1, de D dans A. Reste le calcul du jacobien, et $\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{1}{v}$. Il vient donc : $\iint_D xydxdy=\iint_A u\cdot\frac{1}{v}dudv=\int_1^3 udu\int_{\sqrt{u/3}}^{\sqrt{u}}\frac{1}{v}dv=\int_1^3 u\,[\ln v]_{\sqrt{u/3}}^{\sqrt{u}}du=\frac{1}{2}\ln 3\int_1^3\frac{1}{3}u\,du=\frac{1}{2}\ln 3\left[\frac{1}{2}u^2\right]_1^3=2\ln 3$.

Exercice 7. Il n'y a pas besoin de changement de variables pour voir que la première intégrale est nulle, par antisymétrie par rapport à l'axe Oy. On peut néanmoins le voir concrètement en faisant le changement de variables sur le disque consistant à prendre l'opposée de la première coordonnée et à ne pas changer la seconde.

La seconde intégrale, on fait le changement de variables

$$\begin{aligned}\varphi:[0,3]\times\left[0,\tfrac{\pi}{4}\right]&\longrightarrow D\\ (r,\theta)\qquad&\longmapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)\end{aligned}$$

(coordonnées polaires). Le jacobien vaut r (à retenir, mais faites le calcul au moins une fois), et l'intégrale se calcule donc comme suit (avec Fubini, que nous ne mentionnerons plus dans la suite) :

$$\iint_D ydxdy=\iint_{[0,3]\times[0,\pi/4]}r\sin\theta rdrd\theta=\Big(\int_0^3 r^2dr\Big)\Big(\int_0^{\pi/4}\sin\theta d\theta\Big)=9\Big(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

La troisième intégrale est à faire en DM.

On passe encore en polaires pour la quatrième intégrale. On va cette fois prendre r entre 2 et 4, et θ dans tout l'intervalle $[0,frm{-}e\pi]$. Le jacobien du changement de variables vaut encore r, et x^2+y^2 devient r^2. Ainsi,

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_{[2,4]\times[0,2\pi]} \frac{rdrd\theta}{r} = \Big(\int_2^4 dr\Big)\Big(\int_0^{2\pi} d\theta\Big) = 12\pi.$$

Les cinquième et huitième intégrales sont à faire en DM.

Pour la sixième, le x^2+y^2 au dénominateur nous incite à passer en polaires. On va prendre $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ pour rester entre l'axe des abscisses et la première bissectrice. Toutefois, il faut faire un peu attention pour le choix de r, qui va dépendre de θ. En effet, on doit avoir $x \leq 2$, soit $r\cos\theta \leq 2$ pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (et donc $\cos\theta \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$), soit encore $r \in \left[0, \frac{2}{\cos\theta}\right]$.

On obtient donc après changement de variables (on admettra que le x^2+y^2 au dénominateur, rendant singulier l'intégrande en l'origine, ne pose en fait pas de problèmes) :

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin\theta\,d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} \frac{r^2}{r^2} rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin\theta\,d\theta = 2-\sqrt{2}.$$

Pour la septième intégrale enfin, on a envie de passer en polaires, mais ceci risque de poser problème si $a \neq b$ (on n'obtient pas les simplifications habituelles). On fait donc le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \varphi : [1,4]\times[0,2\pi] &\longrightarrow D \\ (r,\theta) &\longmapsto (ar\cos\theta, br\sin\theta) \end{aligned}$$

dont le jacobien vaut abr. Notons aussi l'égalité $\frac{(ar\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(br\sin\theta)^2}{b^2} = r^2$.

Ainsi, l'intégrale à calculer vaut (en admettant que l'on n'a pas de problème sur la petite ellipse) :

$$\iint_{[1,4]\times[0,2\pi]} \frac{abrdrd\theta}{\sqrt{r^2-1}} = 2\pi ab\Big[\frac{1}{2}\Big(r^2-1\Big)^{1/2}\Big]_1^4 = \pi\Big(\sqrt{3}-1\Big)ab.$$