LM 256 - TD n°3

23 septembre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°1.

Exercice 13. 1. La ligne de niveau c de f est l'ensemble des solutions (x, y) de l'équation $f(x, y) = c$. Dans le cas présent, ce sont donc les droites d'équation $3x + 2y = c$, ou $y = \frac{-3x+c}{2}$, soit $y = \frac{-3x+1}{2}$, $y = \frac{-3}{2}x + 1$ ou $y = \frac{-3}{2}x$ selon que $c = 1$, 2 ou 0.

2. Ici, la ligne de niveau -1 est l'ensemble vide, puisque pour toute valeur de (x, y), $y^2 = f(x, y) = -1$ est impossible. La ligne de niveau 0 est l'axe des abscisses, puisque $y^2 = 0$ équivaut à $y = 0$. La ligne de niveau 1 est la réunion des droites horizontales d'équation $y = 1$ et $y = -1$, car $y^2 = 1$ *ssi* $y = \pm 1$; de même, la ligne de niveau 4 est la réunion des droites horizontales d'équation $y = 2$ et $y = -2$ (ne pas oublier les racines négatives !).

3. Remarquons tout d'abord que le domaine de définition de f est $\{(x, y) |\, y > -x\}$, soit la partie du plan située strictement au-dessus de la seconde bissectrice. Cela dit, pour (x, y) dans ce domaine, $f(x, y) = 0$ équivaut à $x + y = 1$, soit $y = 1 - x$; la ligne de niveau 0 de f est donc la droite d'équation $y = 1 - x$. De même, la ligne de niveau 1 de f est la droite d'équation $y = e - x$

Exercice 14. 1. Le domaine de définition de f est $\{(x, y) |\, y > x^2\}$, soit la région strictement au-dessus de la parabole d'équation $y = x^2$. La ligne I^0 de niveau 0 de f est la parabole d'équation $y = x^2 + 1$, à laquelle appartient m_0.

Pour donner l'équation de la tangente à I^0 en $m_0 = (-1, 2)$, on peut procéder directement en calculant les dérivées partielles de f en m_0, puisque f est clairement différentiable sur son domaine de définition. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) = \frac{-2(-1)}{2-(-1^2)} = 2$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) = \frac{1}{2-(-1^2)} = 1$, d'où l'équation $2x + 1y = 2x_{m_0} + y_{m_0} = 0$, soit $y = -2x$ (le 2 vient de $\frac{\partial f}{\partial x}(m_0)$, le 1 de $\frac{\partial f}{\partial y}(m_0)$).

On peut aussi parvenir à ce résultat de manière moins intrinsèque en remarquant comme je l'ai fait en Td que I^0 est le graphe de la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ qui est dérivable, et calculer sa tangente au point d'abscisse -1 selon la méthode usuelle pour les fonctions à une variable.

2. L'équation $f(x,y) = 6$ se réécrit $2xy - 3x + y - 3 = 0$, et il ne semble pas y avoir de factorisation du polynôme en jeu. On calcule les dérivées partielles de f (qui est différentiable sur le plan, c'est un polynôme) en $m_0 = (1,2)$; on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) = 2\cdot 2 - 3 = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(m_0) = 2\cdot 1 + 1 = 3$. Puisqu'elles ne sont pas toutes deux nulles (mieux : aucune n'est nulle), I^6 admet bien une tangente en m_0, d'équation $x + 3y = x_{m_0} + 3y_{m_0} = 7$, soit $x + 3y - 7 = 0$.

3. La fonction f est différentiable sur tout $\mathbb{R}^2$; on le voit mieux en écrivant $f(x,y) = e^{xy\ln 2}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. L'équation $f(x,y) = 4$ équivaut à $xy = 2$ (pour s'en convaincre, écrire $4 = e^{\ln 4} = e^{2\ln 2}$ et utiliser que l'exponentielle est strictement croissante et $\ln 2 \neq 0$) ; la ligne de niveau I^4 est donc l'hyperbole d'équation $xy = 2$. Pour la tangente en m_0, on calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) = 2 \cdot \ln 2 e^{1\cdot 2\cdot \ln 2} = 8\ln 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(m_0) = 1 \cdot \ln 2 e^{1\cdot 2\cdot \ln 2} = 4\ln 2$, d'où l'équation de la tangente : $8(\ln 2)x + 4(\ln 2)y = 8(\ln 2)x_{m_0} + 4(\ln 2)y_{m_0}$, soit après simplification $y + 2x - 4 = 0$.