# LM 256 - TD n°7 et TDA n°2

21 octobre 2011

*Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°2.*

Exercice 6. 1. Il suffit d'appliquer la définition du gradient et de se souvenir que la règle pour la dérivée partielle d'un produit est la même que pour la dérivation à une variable (règle de Leibniz) :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} fg = \begin{pmatrix} \frac{\partial(fg)}{\partial x} \\ \frac{\partial(fg)}{\partial y} \\ \frac{\partial(fg)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} g + f\frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} g + f\frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} g + f\frac{\partial g}{\partial z} \end{pmatrix} = \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\right) g + f\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} g\right).$$

On peut donc retenir que pour l'opérateur gradient, on a aussi une règle de Leibniz, car on fait agir l'opérateur sur un produit en sommant d'une part ce qu'on obtient en ne le faisant agir que sur l'un des facteurs $\left((\overrightarrow{\mathrm{grad}} f) g\right)$ et d'autre part en ne le faisant agir que sur l'autre facteur $\left(f(\overrightarrow{\mathrm{grad}} g)\right)$.

2. Ici aussi il suffit d'appliquer la définition pour parvenir rapidement au résultat :

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(f\vec{u}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} fu_1 \\ fu_2 \\ fu_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial(fu_1)}{\partial x} + \frac{\partial(fu_2)}{\partial y} + \frac{\partial(fu_3)}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}u_3\right) + f\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right), \end{aligned}$$

et l'on reconnaît dans le premier terme le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f \cdot \vec{u}$, tandis que le second terme vaut clairement $f\,\mathrm{div}(\vec{u})$.

3. C'est le plus difficile. Pour commencer, on calcule $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$.

Ensuite, on applique la définition de la divergence pour voir que :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{u}\wedge\vec{v}) =& \frac{\partial(u_2v_3-u_3v_2)}{\partial x} + \text{(termes obtenus par permutations } 1\to 2\to 3\to 1\\
& \text{et } x\to y\to z\to x)\\
=& \frac{\partial u_2}{\partial x}v_3 + u_2\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_3}{\partial x}v_2 - u_3\frac{\partial v_2}{\partial x}\\
& + \frac{\partial u_3}{\partial y}v_1 + u_3\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}v_3 - u_1\frac{\partial v_3}{\partial y}\\
& + \frac{\partial u_1}{\partial z}v_2 + u_1\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial z}v_1 - u_2\frac{\partial v_1}{\partial z}\\
=& u_1\left(\frac{\partial v_2}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial y}\right) + u_2\left(\frac{\partial v_3}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial z}\right) + u_3\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial x}\right)\\
& - v_1\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}-\frac{\partial u_3}{\partial y}\right) - v_2\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial z}\right) - v_3\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}-\frac{\partial u_2}{\partial x}\right),
\end{aligned}$$

ce qui n'est rien d'autre que la différence $\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{u}\cdot\vec{v} - \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{v}\cdot\vec{u}\right)$.

4. Celui-ci est plus facile, et fait partie de votre DM.

Exercice 7. La fonction $r$, qui indique la distance d'un point à l'origine, est définie et continue dans le plan ou l'espace tout entiers (selon que l'on travaille en dimension 2 ou 3), mais dérivable (et en réalité $C^\infty$) en dehors de l'origine seulement. Ceci provient du fait que $r=\sqrt{r^2}$, avec certes $r^2=x^2+y^2+z^2$ (ou $r^2=x^2+y^2$ en dimension 2), lisse y compris autour de l'origine, mais s'annulant en ce point ; il en résulte la singularité évoquée, $\sqrt{\ }$ n'étant pas dérivable en 0.

Cela dit, passons à l'exercice proprement dit. On le fait en dimension 3, les résultats étant analogues en dimension 2. Commençons par le cas de $r^2$ ; on a

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r^2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial x}\\ \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial y}\\ \frac{\partial(x^2+y^2+z^2)}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix} = 2\vec{r}.$$

D'après l'exercice 6, en dehors de l'origine, on a $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r^2) = 2r\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r)$, d'où $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r) = \frac{\vec{r}}{r}$. De même (ou plutôt par dérivation des fonctions composées, voir exercice 13), toujours sur $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\Big(\ln r\Big) = \frac{1}{r}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r) = \frac{\vec{r}}{r^2}$ et pour tout $k\in\mathbb{R}$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r^k) = kr^{k-1}\overrightarrow{\mathrm{grad}}(r) = kr^{k-2}\vec{r}$ (ce qui est encore valable en 0 si $k\geq 2$), et en particulier $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\Big(\frac{1}{r}\Big) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Exercice 12. 1. C'est de la dérivation de fonction composées ; sur $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ $\Big(r$ n'étant pas différentiable en $(0,0,0)\Big)$, on a : $\frac{\partial(\varphi\circ r)}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{d\varphi}{dr}\circ r = \frac{x}{r}\cdot\varphi'\circ r$

(*cf.* exercice 7 de la feuille pour le calcul de $\frac{\partial r}{\partial x}$). De même, $\frac{\partial(\varphi \circ r)}{\partial y} = \frac{y}{r} \cdot \varphi' \circ r$ et $\frac{\partial(\varphi \circ r)}{\partial z} = \frac{z}{r} \cdot \varphi' \circ r$, soit :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\varphi \circ r) = \frac{\varphi' \circ r}{r}\vec{r},$$

ce qui se prolonge en $(0,0,0)$ *ssi* $\varphi'(0) = 0$. Pour le laplacien (qui est la somme des dérivées partielles d'ordre deux non mixtes en coordonnées cartésiennes), on a en dehors de l'origine :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(\varphi \circ r)}{\partial x^2} =& \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\varphi \circ r)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r} \cdot \varphi' \circ r\right) \\ =& \frac{\partial(x/r)}{\partial x}\varphi' \circ r + \frac{x}{r}\frac{\partial(\varphi' \circ r)}{\partial x} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}\varphi' \circ r + \frac{x}{r} \cdot \frac{x}{r} \cdot \varphi'' \circ r \\ =& \frac{r^2 - x^2}{r^3}\varphi' \circ r + \frac{x^2}{r^2} \cdot \varphi'' \circ r,\end{aligned}$$

et de même $\frac{\partial^2(\varphi \circ r)}{\partial y^2} = \frac{r^2-y^2}{r^3}\varphi' \circ r + \frac{y^2}{r^2} \cdot \varphi'' \circ r$ et $\frac{\partial^2(\varphi \circ r)}{\partial z^2} = \frac{r^2-z^2}{r^3}\varphi' \circ r + \frac{z^2}{r^2} \cdot \varphi'' \circ r$. En sommant ces trois termes il vient hors de $(0,0,0)$

$$\Delta(\varphi \circ r) = \frac{2}{r}\varphi' \circ r + \varphi'' \circ r = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right),$$

ce qui si $\varphi'(0) = 0$ et si $\varphi''$ est continue en 0 se prolonge en $(0,0,0)$ par $3\varphi''(0)$.
2. À me rendre en DM également.

Exercice 14. 1. Pour que $w$ soit exacte sur $\mathbb{R}^3$ (coquille dans l'énoncé), il faut et il suffit qu'elle soit fermée (remarque 2.6.6), c'est-à-dire que $dw = 0$, puisque $\mathbb{R}^3$ est sans trou. Or

$$\begin{aligned}dw =& \frac{\partial(yz + x^2y^3)}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial(yz + x^2y^3)}{\partial z}dz \wedge dx + \frac{\partial(xz + x^3y^2)}{\partial x}dx \wedge dy \\ &+ \frac{\partial(xz + x^3y^2)}{\partial z}dz \wedge dy + \frac{\partial \phi}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy \wedge dz \\ =& 0dx \wedge dy + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - y\right)dx \wedge dz + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - x\right)dy \wedge dz.\end{aligned}$$

Ainsi, $w$ est exacte *ssi* $\frac{\partial \phi}{\partial x} = y$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y} = x$, ce qui équivaut clairement à $\phi(x,y) = xy + c$ sur $\mathbb{R}^2$ avec $c \in \mathbb{R}$.

2. Soit $f$ une primitive de $w$, c'est-à-dire une fonction (lisse) de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ telle

que $df = w$, soit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = yz + x^2y^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz + x^3y^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \phi(x,y) = xy + c. \end{cases}$$

La dernière de ces équations nous donne $f(x,y,z) = xyz + cz + g(x,y)$ sur $\mathbb{R}^3$, avec $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lisse. En réinjectant dans la première il vient $yz + \frac{\partial g}{\partial x} = x^2y^3$, donc $g(x,y) = \frac{1}{3}x^3y^3 + h(y)$ avec $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lisse. En réinjectant dans l'équation restante, on voit que $h$ est constante ; on note $k \in \mathbb{R}$ sa valeur. En conclusion, les primitives $f$ de $w$ sont de la forme $f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3y^3 + xyz + cz + k$ sur $\mathbb{R}^3$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 15. 1. L'équation d'un cône de révolution d'axe $Oz$ est $\{z = \alpha r\}$, où $\alpha$ est un constante réelle (paramétrant l'angle que fait le cône avec le plan $Oxy$ ; c'est la tangente de cet angle), et $r = \sqrt{x^2+y^2}$ est la distance à l'axe $Oz$. Or ici, pour un point de $\mathcal{C}$ de paramètre $t$, on a $r(t) = \sqrt{e^{4t}\cos^2 t + e^{4t}\sin^2 t} = \sqrt{e^{4t}} = e^{2t} = \alpha z(t)$, avec $\alpha = \frac{1}{k}$. La courbe $\mathcal{C}$ est donc tracée sur le cône de révolution d'équation $\{z = \frac{r}{k}\}$ (et même sur la partie supérieure de ce cône, puisque, pour tout $t$, $z(t) > 0$).

2. L'angle que fait une tangente à $\mathcal{C}$ en un point $M$ avec le plan horizontal $Oxy$ est aussi l'angle que fait le vecteur vitesse de la trajectoire en $M$ avec le plan horizontal passant par $M$, puisque ce vecteur est le vecteur directeur de la tangente en question. Or si $t$ est le paramètre de $M$, cet angle a pour tangente (c'est de la trigonométrie) le rapport de sa coordonnées verticale $z'(t)$ par la longueur de sa composante horizontale $\vec{r}(t) = {}^t\big(x'(t), y'(t)\big)$, qui vaut donc $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. À présent $z'(t) = 2ke^{2t}$, et $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{e^{4t}(2\cos t - \sin t)^2 + e^{4t}(2\sin t + \cos t)^2} = \sqrt{5e^{4t}} = \sqrt{5}e^{2t} = \frac{\sqrt{5}}{2k}z'(t)$. La tangente de l'angle considéré est donc constante égale à $\frac{\sqrt{5}}{2k}$, donc cet angle est constant (puisqu'il est défini dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et que tan est strictement croissante sur cet intervalle, si l'on pose $\tan\frac{\pm\pi}{2} = \pm\infty$).

Exercice 20. 1. Pour $k = 1$, puisque l'on a affaire à une ligne brisée, on va d'abord intégrer $\omega := (y^2 - y)dx - 2(x^2 - x)dy$ sur le segment $[O,A]$ (où $dy$ est nulle), puis sur le segment $[A,C]$ (où $dx = 0$). Ainsi, $I_1 = \int_{[O,A]}\omega + \int_{[A,C]}\omega = \int_{[O,A]}(y^2 - y)dx - 2\int_{[A,C]}(x^2 - x)dy$. Or sur $[O,A]$, $y = 0$ donc le premier terme de cette somme est nul ; et sur $[A,C]$, $x = 1$ donc le deuxième terme de cette somme est nul également. Finalement, l'intégrale $I_1$ de $\omega$ le long de $OAC$ est nulle.

Pour $k = 2$, c'est la même chose sauf que l'on passe par $B$, en remarquant que sur $[O,B]$, $dx$ est nulle, tandis que sur $[B,C]$, $dy$ est nulle. D'où : $I_1 = \int_{[O,B]}\omega +$

$\int_{[B,C]} \omega = -2\int_{[O,B]}(x^2-x)dy + \int_{[B,C]}(y^2-y)dx$. Or sur $[O,B]$, $x=0$, et sur $[B,C]$, $y=1$, donc les deux termes de cette somme sont nuls. L'intégrale $I_2$ de $\omega$ le long de $OBC$ est encore nulle.

Pour $k=3$ enfin, on va directement de $O$ à $C$ ; on va donc paramétrer ce segment $[O,C]$ par ${}^t\big(x(t),y(t)\big) = {}^t(t,t) = t\cdot{}^t(1,1)$, $t\in[0,1]$. Le long de ce segment, on a donc $dx=dy=dt$, d'où :

$$I_3 = \int_{t=0}^{t=1} \Big((t^2-t)dt - 2(t^2-t)dt\Big) = -\int_0^1 (t^2-t)\ dt = \left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{6}.$$

2. Le résultat n'est manifestement pas indépendant du chemin suivi ; ceci nous dit que $\omega$ n'est pas exacte, *i.e.* qu'elle ne s'écrit pas $df$ avec $f$ une fonction de $x$ et $y$. Puisque exactitude ($\omega = df$) implique fermeture ($d\omega = 0$) [1], on aurait pu le voir directement en calculant $d\omega$, qui vaut $(2y-1)dy\wedge dx - 2(2x-1)dx\wedge dy = (1-4x-2y)dx\wedge dy \neq 0$.

1. et sur un domaine simplement connexe comme ici le plan, ces notions sont équivalentes ; c'est le très fondamental *lemme de Poincaré*