LM 256 - TD n°8

28 octobre 2011

Les numéros des exercices sont ceux de la feuille n°2.

Exercice 20 (fin). 1. Rappel : on avait trouvé $I_1 = I_2 = 0$. Pour $k = 3$ à présent, on va directement de O à C ; on va donc paramétrer ce segment $[O, C]$ par ${}^t\big(x(t), y(t)\big) = (t, t) = t \cdot {}^t(1, 1)$, $t \in [0, 1]$. Le long de ce segment, on a donc $dx = dy = dt$, d'où :

$$I_3 = \int_{t=0}^{t=1} \Big((t^2 - t)dt - 2(t^2 - t)dt\Big) = -\int_0^1 (t^2 - t)\ dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{1}{6}.$$

2. Le résultat n'est manifestement pas indépendant du chemin suivi ; ceci nous dit que ω (la forme que l'on intègre) n'est pas exacte, *i.e.* qu'elle ne s'écrit pas df avec f une fonction de x et y. Puisque exactitude ($\omega = df$) implique fermeture ($d\omega = 0$) [1], on aurait pu le voir directement en calculant $d\omega$, qui vaut $(2y-1)dy \wedge dx - 2(2x-1)dx \wedge dy = (1 - 4x - 2y)dx \wedge dy \neq 0$.

Exercice 21. Cet exercice se décompose en deux temps. D'abord, il s'agit de calculer la paramétrisation du chemin dont le vecteur vitesse nous est donné ; ensuite, une fois calculée la paramétrisation, on calcule l'intégrale grâce à la formule de définition (selon laquelle on a bien besoin de la paramétrisation, et pas seulement de la donnée du vecteur vitesse).

Soit donc $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ la paramétrisation recherchée, dont on suppose qu'elle est dérivable — mais c'est sous-entendu par l'énoncé, puisque le vecteur vitesse existe. Alors son vecteur vitesse au temps t est $\big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$, d'où, en comparant avec $\vec{v}(t)$ tel qu'il est donné dans l'énoncé, le système d'équations différentielles ordinaires pour $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \\ z'(t) = 1, \end{cases}$$

1. et sur un domaine sans trou comme ici le plan, ces notions sont équivalentes ; c'est le très fondamental *lemme de Poincaré*

qui s'intègre en $\big(x(t), y(t), z(t)\big) = (\cos t + c_1, \sin t + c_2, t + c_3)$, où les $c_j \in \mathbb{R}$. Puisqu'en particulier, on va vers les z croissants en suivant ce chemin avec cette paramétrisation, on part nécessairement de A pour aller vers B (comme $z_A = 0 < 2\pi = z_B$), ce qui nous donne $(1 + c_1, c_2, c_3) = \big(x(0), y(0), z(0)\big) = A = (1, 0, 2\pi)$, d'où $c_j = 0$ pour $j = 1, 2, 3$. En vérifiant que l'on récupère bien (les coordonnées de) B en $t = 2\pi$, on conclut que l'on a bien obtenu la paramétrisation recherchée.

Passons au calcul de l'intégrale proprement dit. Une bonne idée est de calculer rapidement au brouillon la différentielle de la 1-forme dont on doit calculer l'intégrale avant de se lancer dans des considérations compliquées ; si en effet la forme est fermée, et pour peu que l'on travaille sur un domaine simplement connexe, l'intégrale ne dépend que des bornes, et l'on peut soit calculer une primitive f de la 1-forme (et alors l'intégrale est la différence de f prise sur les bornes) — auquel cas on est ramené à un système d'EDP identiques à celui que l'on a lorsque l'on calcule un potentiel à partir d'un champ de vecteurs à rotationnel nul —, soit calculer l'intégrale sur un chemin plus simple, typiquement le segment joignant les extrémités du chemin d'origine. Cela dit, notre 1-forme n'est pas ici fermée, et la formule (de définition) donne pour I

$$\int_0^{2\pi} (-4\sin^2 t\cos t + 3\sin^2 t\cos t + 5t)\, dt = \left[-\frac{1}{3}\sin^3 t + \frac{5}{2}t^2\right]_0^{2\pi} = 10\pi^2.$$

Exercice 22. Commençons par paramétrer les différents arcs C^1 de la courbe $ABCDA$. Pour le premier morceau, disons Γ_1, qui est un arc du cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 1, et dont le rayon fait avec l'axe des abcisses un angle allant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, on prend naturellement la paramétrisation $x(t) = 1 + \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ce qui donne $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$ pour tout t.

Pour le second morceau, que nous appelons Γ_2, qui est un segment allant du point $(1, 1)$ au point $(-1, -1)$ (sous-entendu, *dans ce sens*), on prend simplement la paramétrisation $x(t) = y(t) = t$, pour t *allant de* 1 *à* -1 (l'intégrale à calculer sur ce chemin s'écrira donc $\int_1^{-1}$), et $x'(t) = y'(t) = 1$ — ce qui revient au même que de pendre $x(t) = y(t) = -t$, t allant de -1 à 1, car alors le signe $-$ se retrouve dans x' et y', ce qui change bien $\int_{-1}^{1}$ en $\int_1^{-1}$.

Le troisième morceau, Γ_3, est similaire au premier avec un angle allant de $\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, d'où la paramétrisation $\tilde{x}(u) = -1 + \cos u$, $\tilde{y}(u) = \sin u$, u allant de $\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, ce qui revient à prendre $x(t) = -1 - \cos t$, $y(t) = -\sin t$, t allant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, en effectuant le changement de paramètre $t = \pi - u$, d'où un vecteur vitesse de composantes $x'(t) = \sin t$ et $y'(t) = -\cos t$.

Finalement, la quatrième morceau Γ_4 qui est le segment joignant $(-1, 1)$ à $(1, -1)$ peut être paramétré par $x(t) = t$, $y(t) = -t$, $t \in [-1, 1]$, de sorte que $x'(t) = 1$, $y'(t) = -1$ sur ce segment.

En résumé, si ω désigne la 1-forme $(x^2+y^2)dx+2x^2ydy$ et Γ la courbe $ABCDA$ décrite comme indiqué, on a à calculer la quantité

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \omega &= \sum_{j=1}^{4} \int_{\Gamma_j} \omega \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big[\Big((1+\cos t)^2 + \sin^2 t\Big)(-\sin t) + 2(1+\cos t)^2 \sin t \cos t\Big]\, dt \\
&\quad + \int_1^{-1} \Big[(t^2+t^2)(-1) + 2t^2 \cdot t(-1)\Big] dt \\
&\quad + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big[\Big((-1-\cos t)^2 + (-\sin t)^2\Big)(\sin t) + 2(-1-\cos t)^2(-\sin t)(-\cos t)\Big]\, dt \\
&\quad + \int_{-1}^{1} \Big[\Big(t^2+(-t)^2\Big)\cdot 1 + 2t^2(-t)(-1)\Big]\, dt.
\end{aligned}$$

Cependant, le calcul est plus simple qu'il n'y paraît, car dans la première et la troisième intégrales, on intègre des fonctions impaires sur un segment symétrique par rapport à 0, et ces intégrales sont donc nulles. En outre, on peut s'affranchir du terme en t^3 des seconde et quatrième intégrales pour la même raison, et il reste donc finalement $2\left(\int_1^{-1} + \int_{-1}^{1}\right)(t^2\ dt)$, qui est nul. L'intégrale curviligne demandée est donc nulle.

Exercice 23. 1. Ici aussi il s'agit d'abord de trouver une paramétrisation, mais cette fois en ne connaissant que la trajectoire et son sens de parcours. Décomposons cette trajectoire Γ en Γ_1, qui correspond à l'arc de cercle, et Γ_2, qui correspond à l'arc de parabole. Puisque Γ_1 est un arc du cercle de centre O et de rayon 2 parcouru dans le sens trigonométrique, il peut être paramétré par $(2\cos t, 2\sin t)$, $t \in [-\alpha, \alpha]$, avec α l'arccosinus de la demi-abscisse du point d'intersection M du cercle et de la parabole considérés et d'ordonnée positive (et α est donc aussi l'arcsinus de la moitié de cette ordonnée). De même, l'arc de parabole de la parabole d'équation $y^2 = 3x$, Γ_2, parcouru aussi en sens trigonométrique, peut être en tant que tel paramétré par $\left(\frac{1}{3}t^2, -t\right)$, avec $t \in [-\beta, \beta]$, où β est l'ordonné de M — et $\alpha = \arcsin(\beta/2)$.

Il reste à calculer ce β ; or M est par définition un point d'intersection des courbes d'équation $x^2+y^2 = 4$ et $y^2 = 3x$, alors $x_M = \frac{\beta^2}{3}$, puis $\left(\frac{\beta^2}{3}\right)^2 + \beta^2 = 4$, *i.e.* $\beta^4 + 9\beta^2 - 36 = 0$. En considérant β^2 comme l'inconnue cette équation a pour discriminant $225 = 15^2$, et a donc pour racines $\frac{1}{2}(-9 \pm 15) = -12$ ou 3. Comme $\beta^2 \geq 0$, seul $\beta^2 = 3$ convient, et donc puisque β est aussi ≥ 0, $\beta = \sqrt{3}$, et $\alpha = \arcsin\left(\sqrt{3}/2\right) = \frac{\pi}{3}$. Finalement, on a donc en notant ω la 1-forme sous l'intégrale définissant I, en remarquant en particulier que le long de Γ_1, $x^2+y^2=4$:

$$\begin{aligned}I &= \int_{\Gamma_1}\omega + \int_{\Gamma_2}\omega\\ &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4(2\cos t - 2\sin t)\,dt + \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\left(\frac{t^2}{3}\right)^2 + t^2\right)\left(\frac{2t}{3}-1\right)dt.\end{aligned}$$

La première intégrale donne $[8(\sin t + \cos t)]_{-\pi/3}^{\pi/3} = 8$, et la seconde, en enlevant les termes de degrés impairs dont la contribution est nulle (les deux bornes sont opposées), *i.e.* en enlevant le terme $\frac{2t}{3}$, donne $\left[-\frac{t^5}{45}-\frac{t^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = -\frac{12}{5}\sqrt{3}$. Au final, $I = 8 - \frac{12}{5}\sqrt{3} \approx 3,84$.

2. On va utiliser le théorème 3.7.1 pour calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine (borné) délimité par Γ ; puisque, quasiment par définition, Γ (indépendamment de son sens de parcours) est la frontière du domaine qu'elle délimite, et comme elle est parcourue dans le sens trigonométrique, on a le choix pour $\mathcal{A}$ entre $\int_\Gamma xdy$, $-\int_\Gamma ydx$, et donc aussi n'importe quelle moyenne pondérée de ces deux intégrales, en particulier $\frac{1}{2}\int_\Gamma(xdy - ydx)$. On va utiliser la première, qui donne :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{\Gamma_1} xdy + \int_{\Gamma_2} xdy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4\cos^2 t\ dt - \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{3}t^2\ dt\\ &= [2t+\sin(2t)]_{-\pi/3}^{\pi/3} - \left[\frac{1}{9}t^3\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi+\sqrt{3}}{3}\\ &\approx 4,77.\end{aligned}$$

Exercice 25. On calcule le travail W de $\overrightarrow{F}$ le long de $\mathcal{E}$ en fonction de a et b. Avec la paramétrisation donnée, on a $\overrightarrow{dM} = (-a\sin t, b\cos t, 0)dt$ et $\overrightarrow{F} = \left(2a\cos t - b\sin t, 4b\sin t, b\sin t + a^2\cos^2 t\right)$ au point de paramètre t. Ainsi en un tel point $\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dM} = \left((4b^2-2a^2)\sin t\cos t + ab\sin^2 t\right)$. Comme $\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt = 0$ et $\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt = \pi$, il vient $W = ab\pi$, d'où $a=4$ et $b=8$ (a et b sont des puissances de 2 car 32 en est une, et la seule puissance de 2 entre 3 et $\sqrt{32}\approx 5.66$ est 4).

Exercice 28. 1. On va utiliser le théorème de Stokes après avoir démontré que $\omega := \frac{(1+y)dx+xdy}{x^2y^2+2x^2y+x^2+1}$ est exacte ; déjà, remarquons que le dénominateur de ω peut s'écrire $x^2(y+1)^2+1 \geq 1 > 0$, et donc que ω est bien définie sur le plan tout entier qui n'a pas de trou. Pour voir que ω est exacte, il est donc nécessaire et suffisant —*lemme de Poincaré*, théorème 2.6.3, p. 30 du poly— de démontrer qu'elle est fermée. Or si $a(x,y) = \frac{1+y}{x^2(y+1)^2+1}$ et $b(x,y) = \frac{x}{x^2(y+1)^2+1}$, alors $\omega = adx + bdy$, et

$$\begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial y} &= \frac{1 \cdot \Big(x^2(y+1)^2+1\Big) - (1+y) \cdot 2x^2(1+y)}{\Big(x^2(y+1)^2+1\Big)^2} \\ &= \frac{1 \cdot \Big(x^2(y+1)^2+1\Big) - x \cdot 2x(1+y)^2}{\Big(x^2(y+1)^2+1\Big)^2} \\ &= \frac{\partial b}{\partial x},\end{aligned}$$

i.e. ω est fermée, donc exacte, et s'écrit df pour une fonction (lisse) f. Si alors Γ est un chemin reliant deux points A et B fixes, alors $\partial\Gamma$ est l'union de A (compté négativement) et B (compté positivement), donc d'après Stokes, $\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma df = \int_{\partial\Gamma} f = f(B) - f(A)$, ce qui ne dépend pas de Γ.

2. Il suffit (!) de trouver pour répondre à cette question une fonction f convenable. Or une telle f va vérifier les relations aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} = a(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = b(x,y)$; la première donne $f(x,y) = \arctan\Big((1+y)x\Big) + g(y)$, g lisse, ce qui dérivé par rapport à y donne grâce à la deuxième relation $g'(y) = 0$, soit : $g = C \in \mathbb{R}$. On peut donc prendre simplement $f(x,y) = \arctan\Big((1+y)x\Big)$, et alors $I = f(B) - f(A) = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$.