Exercice I. Calculer le volume de la boule B de centre 0 et de rayon R dans $\mathbf{R}^3$. On demande ici les détails de calcul.

On utilise des coordonnées sphériques.

$$x = r\sin\phi\cos\theta$$

$$y = r\sin\phi\cos\theta$$

$$z = r\cos\phi$$

Le determinat Jacobien peut être calculé facilement et sera

$$r^2\sin\phi.$$

Le volume de la sphère devient

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\sin\phi d\phi d\theta dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Exercice II.

1. Trouver f tel que $\mathbf{V} = \nabla f$ pour

$$\mathbf{V} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

On doit avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

De la première equation on obtient

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c(y)$$

ou $c(y)$ est une fonction de y. De la seconde equation on obtient alors que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + c'(y).$$

On peut alors prendre $c(y) = 0$.

2. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{M}$ le long du segment qui va du point $(1,0)$ au point $(0,4)$.

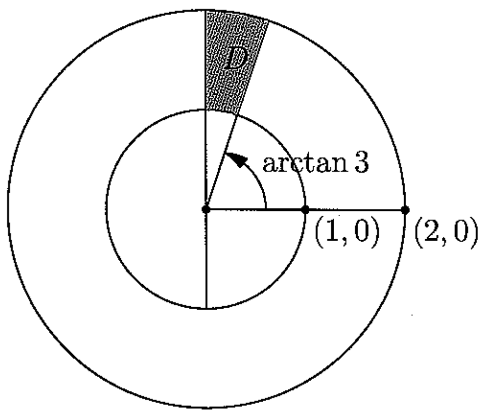
On a

$$\int_\Gamma \mathbf{V} \cdot d\mathbf{M} = f(0,4) - f(1,0) = \log 16 - \log 1 = \log 16$$

Exercice III. On considère l'ensemble défini par

$$D = \{ \ (x,y) \mid \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 3x \ \}$$

1. Tracer un dessin de D.



2. Calculer

$$\iint_D \frac{1}{y^2}\, dxdy.$$

L'intégrale sur le domaine D est donnée, en coordonnées polaires $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, par

$$\int_1^2 \int_{\arctan 3}^{\pi/2} \frac{1}{(r\sin\theta)^2}\, r d\theta dr$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{r}\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)_{\arctan 3}^{\pi/2} dr = \int_1^2 \frac{1}{r}\frac{1}{\tan(\arctan 3)}\, dr = \int_1^2 \frac{1}{r}\frac{1}{3}\, dr = \frac{1}{3}\log 2$$

2. Calculer le volume de l'ensemble

$$V = \left\{ \ (x,y,z) \mid (x,y) \in D, \ 0 \leq z \leq \frac{1}{y^2} \ \right\}.$$

L'intégrale sur le domaine V est donnée, par Fubini, par la formule

$$\iint_D \int_0^{\frac{1}{y^2}} dz dx dy = \iint_D \frac{1}{y^2}\, dxdy = \frac{1}{3}\log 2.$$

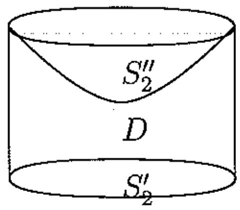
Exercice IV. Soit D le domaine de $\mathbf{R}^3$ limité par le cylindre d'équation

$$x^2 + y^2 = 1$$

le plan $z = 0$ et la surface $z = x^2 + y^2 + 1$.

1. Soit S le bord de D. Faire un dessin de S et de D.

$S_2 = S_2' \cup S_2''$



S_1

2. Calculer le volume de D.

Comme, pour chaque (x, y) dans le disque de rayon 1, $0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1$, il est utile d'utiliser des coordonnées cylindrinques. Alors $0 \leq z \leq r^2 + 1$ et le volume s'écrit

$$\iiint_D dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2+1} dz\, r\, drd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 1) r\, drd\theta = 2\pi \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\right)_0^1 = \frac{3\pi}{2}.$$

Notons S le bord de D orienté suivant le vecteur normal extérieur. Notons S_1 la partie de S contenue dans le cylindre. et $S_2 = S \setminus S_1$ (le complementaire de S_1 dans S). Soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs de composantes $(P, Q, R) = (x, y, z^2)$.

3. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S_1.

La surface S_1 est un cylindre de hauteur 2 sur un cercle de rayon 1. Le vecteur normal à la surface S_1 est $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y, 0)$. Le flux est alors

$$\iint_{S_1} \overrightarrow{V} . \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_{S_1} \sqrt{x^2 + y^2}\, d\sigma = \iint_{S_1} d\sigma = \int_0^2 \int_0^{2\pi} d\sigma = 4\pi.$$

4. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S en utilisant la formule d'Ostrogradsky.

Par la formule d'Ostrogradsky

$$\iint_S \overrightarrow{V} . \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} \overrightarrow{V}\, dxdydz$$

$$= \iiint_D (2+2z)\,dxdydz = \iint_\Delta \int_0^{x^2+y^2+1} 2(1+z)\,dz\,dxdy$$

ou $\Delta = \{(x,y),\ 0 \le x^2+y^2 \le 1\}$ est le disque de rayon 1 centré à l'origine. On obtien que le flux est

$$\iint_\Delta \left((1+z)^2\right)_0^{x^2+y^2+1} dxdy = \iint_\Delta ((2+x^2+y^2)^2-1)\,dxdy$$

qui en coordonées polaires est

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 ((2+r^2)^2-1)r\,drd\theta = 2\pi\int_0^1 (3r+4r^3+r^5)\,dr = 2\pi(\frac{3}{2}+1+\frac{1}{6}) = \frac{16\pi}{3}.$$

5. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S_2.

Le flux est

$$\iint_{S_2} \overrightarrow{V}.\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S \overrightarrow{V}.\mathbf{n}\,d\sigma - \iint_{S_1} \overrightarrow{V}.\mathbf{n}\,d\sigma = \frac{16\pi}{3} - 4\pi = \frac{4\pi}{3}.$$

6. Calculer l'aire de S_1 et de S_2.

Comme S_1 est un cylindre de rayon 1 et hauteur 2 on a $Aire(S_1) = 4\pi$.

On observe que S_2 est l'union d'un disque de rayon 1 S_2' en dessous de D, et d'une surface $S"_2$ au dessus de D. Pour calculer $Aire(S"_2) = \iint_{S"_2} d\sigma$, on utilise la formule

$$\iint_{S"_2} d\sigma = \iint_\Delta \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dxdy = \iint_\Delta \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy.$$

On obtient en coordonnées polaires

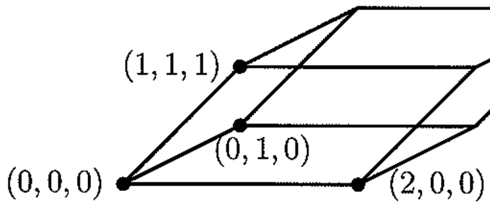
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4r^2+1}\,rdrd\theta = 2\pi\left(\frac{(4r^2+1)^{3/2}}{12}\right)_0^1 = 2\pi\left(\frac{5^{3/2}-1}{12}\right).$$

On conclut que

$$Aire(S_2) = Aire(S_2') + Aire(S"_2) = \pi + 4\pi = 5\pi.$$

7. Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long des courbes qui sont les bords de S_1, orientées dans le sens trigonométrique par rapport a l'orientation de S_1 (dont le vecteur normal est vers l'extérieur).

Le champ est orthogonal aux courbes. On obtient alors que la circulation est nulle.



Exercice V. Soit D le parallélépipède définit par les vecteurs

$$(2,0,0),(0,1,0),(1,1,1).$$

1. Déssiner le domaine D.
2. Calculer l'intégrale

$$\iint_S x^2\,dy\wedge dz + xz\,dz\wedge dx + xz\,dx\wedge dy$$

sur la surface S définie comme bord de D. On considère la surface orientée avec la normale vers l'exterieur de la surface.

On utilise le théorème de Stokes (formule de Ostrogradsky).

$$\iint_S x^2\,dy\wedge dz + xz\,dz\wedge dx + xz\,dx\wedge dy = \iiint_D 2x\,dx\wedge dy\wedge dz + x\,dx\wedge dy\wedge dz = \iiint_D 3x\,dxdydz$$

On parametrise le parallélépipède par le paramètres $0 \leq a \leq 1$, $0 \leq b \leq 1$ et $0 \leq c \leq 1$:

$$(a,b,c) \to a(2,0,0) + b(0,1,0) + c(1,1,1) = (2a+c, b+c, c).$$

Le determinant Jacobien de cette transformation est

$$\det((2,0,0),(0,1,0),(1,1,1)) = 2.$$

On obtient alors

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 3(2a+c)\,2dadbdc = 6\int_0^1\int_0^1 (2a+c)\,dcda = 6\int_0^1 \left(2ac + \frac{c^2}{2}\right)_0^1 da$$

$$= 6\int_0^1 \left(2a + \frac{1}{2}\right) da = 9.$$