2h, documents et calculatrices interdits. Le soin apporté à la rédaction sera un élément important de la notation.

Question de cours. Enoncer le théorème de Fubini d'intégration d'une fonction définie sur un rectangle dans $\mathbf{R}^2$. Préciser les hypothèses sur la fonction. On ne demande pas de le démontrer.

Exercice I.

1. Trouver f tel que $V = \nabla f$ pour

$$\mathbf{V} = \left(\frac{2x\tan y}{(1+x^2)^2}, -\frac{1+\tan^2 y}{(1+x^2)}, 0\right).$$

2. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\Gamma V \cdot d\mathbf{r}$ le long de l'arc de l'hélice $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $z = \theta$, qui va du point $\theta = 0$ au point $\theta = \pi/2$.

Exercice II.

1. Trouver une parametrisation de la courbe $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ en supposant que $y = tx$.

2. Calculer $\int_\Gamma xdy - ydx$, où Γ est la boucle délimitée par la courbe $x^3+y^3-3xy = 0$ orientée dans le sens direct.

3. Calculer l'aire à l'interieur de la boucle.

Exercice III. On considère l'ensemble défini par

$$D = \{\ (x,y) \mid |y| \leq |x|,\ x^2 + y^2 \leq 4\ \}$$

1. Tracer un dessin de D.

2. Calculer

$$\iint_K (x^2+y^2)dxdy.$$

2. Soit l'ensemble

$$V = \{\ (x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ 0 \leq z \leq (x^2+y^2)\ \}.$$

Tracer un dessin de V et calculer son volume.

Exercice IV. Soit D le domaine de $\mathbf{R}^3$ limité par la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

avec $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

1.Soit S le bord de D. Faire un dessin de S et de D.

2. Calculer le volume de D.

Notons S le bord de D orienté suivant le vecteur normal extérieur. Notons S_1 la partie de S contenue dans la surface $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $S_2 = S \setminus S_1$ (le complementaire de S_1 dans S). Soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs de composantes $(P, Q, R) = (x^3, y^3, z^3)$.

3. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S_1.

4. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S_2.

5. Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S en utilisant la formule d'Ostrogradsky.

6. Calculer l'aire de S_1 et de S_2.

7. Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe C, bord de S_1, orientée dans le sens trigonométrique par rapport a l'orientation de S_1 (dont le vecteur normal est vers l'extérieur).

Exercice V. Soit D le tetraèdre définit par les sommets

$$(0,0,0), (1,-1,0), (1,1,0), (0,0,1).$$

1. Déssiner le domaine D.

2. Calculer l'intégrale

$$\iint_S yz\, dy \wedge dz + xz\, dz \wedge dx + xz\, dx \wedge dy$$

sur la surface S définie comme bord de D. On considère la surface orientée avec la normale vers l'exterieur de la surface.

LM 256 - Examen 2$^{\text{ème}}$ session 2010-2011 - Corrigé

Question de cours : voir poly, théorème 4.2.1, avec $\varphi_0(y) = a$, $\varphi_1(y) = b$, $a \leq b \in \mathbb{R}$.

Exercice I :

1- Si f est telle que $V = \nabla f$, alors $\frac{\partial f}{\partial z} = V_3 \equiv 0$; autrement dit, f ne dépend pas de z.

Cherchons f comme fonction de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, disons C^1 ;

$$V = \nabla f \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x \tan y}{(1+x^2)^2} & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1+\tan^2 y}{(1+x^2)} & (2) \end{cases}$$

(1) nous dit que f s'écrit $f(x,y) = -\frac{\tan y}{1+x^2} + g(y)$ avec g C^1 ; en redérivant cette relation par rapport à y et en comparant à (2), il vient $g'(y) = 0$, soit $g(y) = c \in \mathbb{R}$.

Finalement, $V = \nabla f \iff f(x,y) = \frac{-\tan y}{1+x^2} + c$.

Pour rendre ceci parfaitement rigoureux, il faut remarquer qu'ainsi écrite, f n'est définie que sur les bandes $D_k := \mathbb{R} \times \left]\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right[\times \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ (à cause de $\tan$), de même que V. Ces bandes étant disjointes, on n'a pas de conditions de recollement, et on peut prendre un c différent sur chacune d'elles. En résumé, $\boxed{\nabla f = V \iff \forall k \in \mathbb{Z}, \exists c_k \in \mathbb{R}, f|_{D_k} = -\frac{\tan y}{1+x^2} + c_k}$.

2- Le chemin Γ considéré est dans la bande D_0, puisque pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$, $|\sin\theta| \leq 1 < \frac{\pi}{2}$.

On a donc $\int_\Gamma V . dr = f(B) - f(A)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, \pi/2)$

$$= -\frac{\tan 1}{1+0^2} + \cancel{c_0} - \left(-\frac{\tan 0}{1+1^2} + \cancel{c_0}\right)$$

$$\boxed{\int_\Gamma V . dr = -\tan 1.}$$

Exercice II.

1- On cherche une paramétrisation de la courbe (d'équation) $x^3+y^3-3xy=0$, que l'on appelle C, sous la forme $(x(t), y(t))$, $t\in\mathbb{R}$, avec $y(t)=t\,x(t)$.

On doit donc avoir :

$$x(t)^3+t^3\,x(t)^3 = 3t\,x(t)^2$$

soit $(1+t^3)\,x(t)^3 = 3t\,x(t)^2$

Pour $t\neq -1$ $\begin{cases} x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$ convient donc,

au sens où $\forall t\neq -1$, $(x(t), y(t)) \in \mathcal{C}$.

Réciproquement, si $M=(x,y)\in\mathcal{C}$, alors $x^3 = y(3x-y^2)$

$x=0 \Rightarrow y=0$ ou $(3x-y^2)=0$, et comme

$(x=0$ et $3x-y^2=0) \Rightarrow y=0$, $x=0\Rightarrow y=0$, et par symétrie $x=0 \Leftrightarrow y=0$.

Supposons $M\neq(0,0)$, et posons $u=y/x$ $(\neq 0)$.

Alors $(1+u^3)x^3 = 3u\,x^2$, soit $\underset{\neq 0}{3u} = \underset{\neq 0}{(1+u^3)x}$

donc $x=\dfrac{3u}{1+u^3}=x(u)$, et $y=ux=y(u)$.

D'autre part, si $M=(0,0)$, $M=(x(0), y(0))$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \begin{cases} x(t) = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y(t) = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} t\neq -1 \text{ est bien une paramétrisation de } \mathcal{C} \text{ toute entière}}$$

2- Pour préciser l'allure de C, procédons à une rapide analyse de la paramétrisation.

Remarquons déjà que pour $t\neq -1$,

$x(t)+y(t) = 3\dfrac{t+t^2}{1+t^3} = 3\dfrac{\cancel{(1+t)}t}{\cancel{(1+t)}(1-t+t^2)}$, et $1-t+t^2 = \left(1-\frac{t}{2}\right)^2+\frac{3t^2}{4}>0$.

donc $x(t)+y(t)$ est du signe de t, soit :

- si $t<0$, $y(t) < -x(t)$: $\mathcal{C}$ est sous $\Delta' := \{y=-x\}$
- si $t>0$, $y(t) > -x(t)$: $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ'

Par ailleurs, puisque l'on peut échanger x et y dans l'équation de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à $\Delta = \{x=y\}$.

Cette symétrie correspond à $t \mapsto -\frac{1}{t}$ $(t \neq 0, -1)$ dans la paramétrisation, qui échange $]-\infty,-1[$ avec $]-1,0[$ et $]0,1]$ avec $[1,+\infty[$.

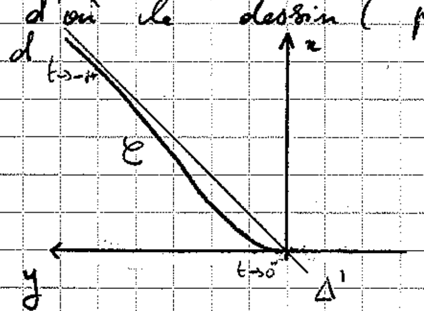
Il suffit donc d'effectuer l'étude sur $]-1,0[$, et $]0,1]$.

Sur $]-1,0[$: . en 0^-, $x(t) \sim 3t$, $y(t) \sim 3t^2 \sim \frac{1}{3}x(t)^2$

. en -1^+ : $x(t) \sim \frac{-3}{(1+t)(1-(-1)+(-1)^2)} = \frac{-3}{1+t} \to -\infty$

$$y(t) \sim \frac{3}{1+t} \sim -x(t)$$

d'où le dessin (par ailleurs, $x(t)<0$, $y(t)>0$) :



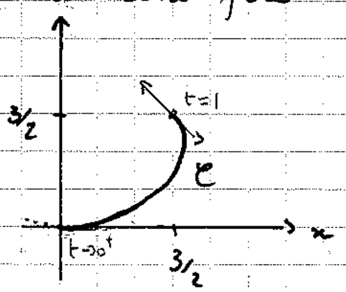
Sur $]0,1]$: . en 0^+, on a encore $x(t) \sim 3t$, $y(t) \sim \frac{1}{3}x(t)^2$

. en 1, $x'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{3t}{1+t^3}\right)\Big|_{t=1} = \frac{3(1+t^3) - 3t \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}\Big|_{t=1} = \frac{3}{4} \neq 0$

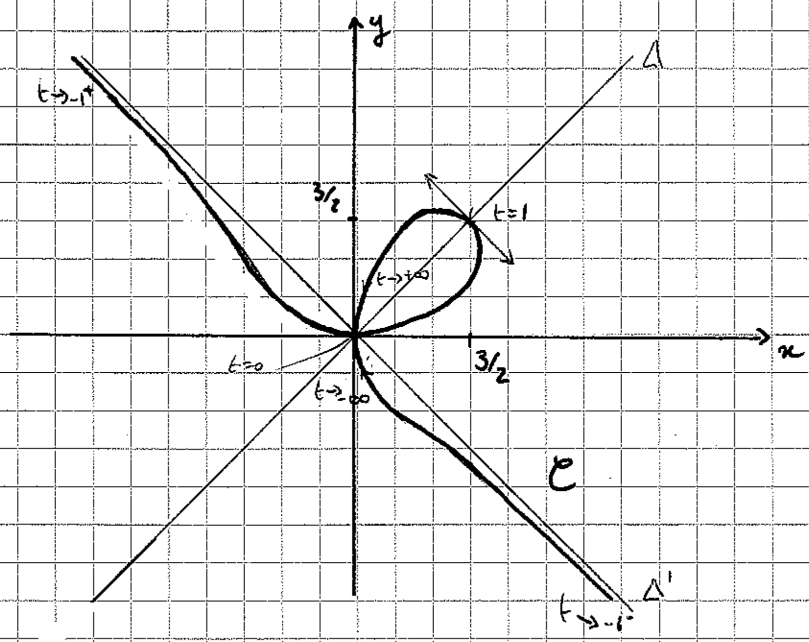
donc $\mathcal{C}$ est lisse en $(x(1), y(1)) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

et par symétrie par rapport à Δ a une tangente parallèle à Δ'.

On a cette fois $x(t), y(t) > 0$, d'où le dessin :



En utilisant les symétries, on a donc le dessin complet de $\mathcal{C}$:



(Il est facile de voir qu'avec la paramétrisation choisie, $\mathcal{C}$ n'a pas de point double, car

- si $(x(t), y(t)) \neq (0,0)$ et $(x(t'), y(t')) = (\underset{\neq 0}{x(t)}, \underset{\neq 0}{y(t)})$ d'après 1),
  alors $t = \dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{y(t')}{x(t')} = t'$.
- si $(x(t), y(t)) = (0,0)$, $t=0$ par définition de $x(t), y(t)$).

La boucle Γ de l'énoncé est donc la partie de $\mathcal{C}$ parcourue quand $t \in [0, +\infty[$, dans le sens direct si t va de 0 à $+\infty$.

Ainsi, $\displaystyle\int_\Gamma (x\,dy - y\,dx) = \int_0^{+\infty} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{3t(-3t^4+6t) - 3t^2(-6t^3+3)}{(1+t^3)^3}\,dt$$

car $\forall t \in [0, +\infty[$, $y'(t) = \dfrac{-3t^4+6t}{(1+t^3)^2}$ et $x'(t) = \dfrac{-6t^3+3}{(1+t^3)^2}$

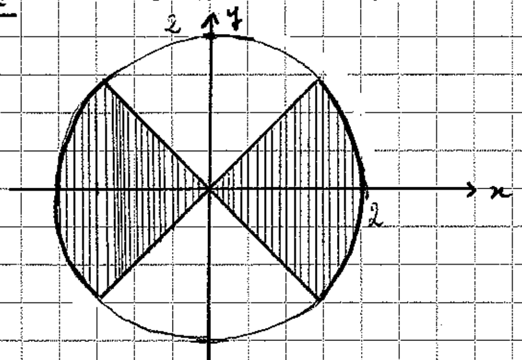
$$= \int_0^{+\infty} \frac{9(t^5+t^2)}{(1+t^3)^3}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{9t^2}{(1+t^3)^2}\,dt = \left[\frac{-3}{1+t^3}\right]_0^{+\infty}$$

$$\boxed{\int_\Gamma (x\,dy - y\,dx) = 3.}$$

3. D'après le paragraphe 4.7 du poly, cette aire vaut $\frac{1}{2}\int_\Gamma (x\,dy - y\,dx)$, soit $3/2$.

Exercice III. 1- Dessin de D (attention aux valeurs absolues) :



2- On utilise les coordonnées polaires, après avoir ~~dit~~ que par symétrie $x \leftrightarrow -x$, $y \leftrightarrow -y$ de D, l'intégrale vaut

$$4 \iint_{D \cap \{x \geq 0, y \geq 0\}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

Or, $\iint_{D \cap \{x \leq 0, y \leq 0\}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{[0,2]\times[0,\pi/4]} r^2 . r\,dr\,d\theta$

$$= \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^2 r^3\,dr \quad \text{par Fubini}$$

$$= \left(\int_0^{\pi/4} d\theta\right)\left(\int_0^2 r^3\,dr\right)$$

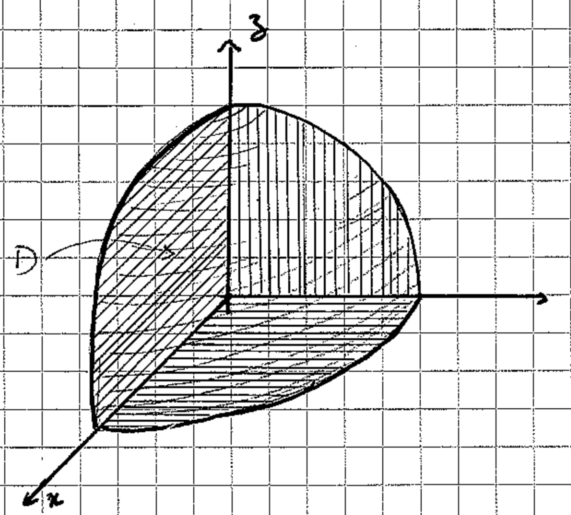
$$= \frac{\pi}{4} . 4 = \pi$$

L'intégrale demandée vaut donc $\underline{4\pi}$.

3- V est le domaine de l'espace situé entre D (vu dans le plan horizontal $\{z=0\}$) et le paraboloïde d'équation $z = x^2+y^2$; je vous laisse imaginer la représentation graphique.

Pour le volume de V, on a vu que selon cette description il faut $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, soit $\underline{4\pi}$ d'après 2.

Exercice IV. 1- D est l'intersection de la boule unité et de l'octant $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Son bord est composé du huitième de sphère $\{x^2+y^2+z^2=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, ainsi que des quarts de disque $\{z=0, x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ et les deux autres obtenus par permutation $x \to y \to z \to x$.



$$\left.\begin{array}{l} \{x=0,\ y^2+z^2\leq 1,\ y\geq 0,\ z\geq 0\} \\ \{z=0,\ x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\} \\ \{y=0,\ z^2+x^2\leq 1,\ z\geq 0,\ x\geq 0\} \\ \{x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x^2+y^2+z^2=1\}. \end{array}\right\} S$$

2. D est un huitième de la boule unité ; son <u>volume</u> vaut donc $\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\pi = \boxed{\frac{\pi}{6}}$.

3. On paramètre S_1 par $\begin{cases} x(\theta,\varphi) = \cos\theta\cos\varphi \\ y(\theta,\varphi) = \cos\theta\sin\varphi \\ z(\theta,\varphi) = \sin\theta \end{cases}$ $(\theta,\varphi)\in[0,\pi/2]^2$

de sorte (avec les notations de la feuille "Flux...") que $\begin{cases} X_\theta = (-\sin\theta\cos\varphi,\ -\sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta) \\ X_\varphi = (-\cos\theta\sin\varphi,\ \cos\theta\cos\varphi,\ 0) \end{cases}$

et $V = (\cos^3\theta\cos^3\varphi,\ \cos^3\theta\sin^3\varphi,\ \sin^3\theta)$.

donc $[X_\theta, X_\varphi, V] = \begin{vmatrix} -\sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi & 0 \\ \cos^3\theta\cos^3\varphi & \cos^3\theta\sin^3\varphi & \sin^3\theta \end{vmatrix}$

$$= \cos\theta \underbrace{\begin{vmatrix} -\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \cos^3\theta\cos^3\varphi & \cos^3\theta\sin^3\varphi \end{vmatrix}}_{= -\cos^4\theta(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)} + \sin^3\theta \underbrace{\begin{vmatrix} -\sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ -\cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{vmatrix}}_{= -\sin\theta\cos\theta}$$

$$\boxed{= -\cos^5\theta(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi) - \cos\theta\sin^4\theta}$$

Ainsi, puisque $X_\theta \wedge X_\varphi$ est orienté vers l'intérieur, le flux F_1 de V à travers S_1 orienté vers l'extérieur vaut : $F_1 = \iint_{[0,\pi/2]^2} \left(\cos^5\theta(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi) + \cos\theta\sin^4\theta\right) d\varphi\, d\theta$

$$= \left(\int_0^{\pi/2}\cos^5\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)\,d\varphi\right) + \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^4\theta\, d\theta.$$

A présent, on note que pour $k\geq 0$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{k+2}\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos^k\theta \underbrace{\cos^2\theta}_{(1-\sin^2\theta)} d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos^k\theta\, d\theta + \int_0^{\pi/2}\cos^k\theta\sin\theta\, d(\sin\theta)$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{k+2}\theta \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^k\theta \, d\theta + \frac{1}{k+1}\underbrace{\left[\cos^{k+1}\theta \sin\theta\right]_0^{\pi/2}}_{=0} - \frac{1}{k+1}\int_0^{\pi/2} \cos^{k+2}\theta \, d\theta .$$

soit : $\boxed{\int_0^{\pi/2} \cos^{k+2}\theta \, d\theta = \frac{k+1}{k+2}\int_0^{\pi/2} \cos^k\theta \, d\theta}$

Ainsi : $\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \, d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{3\pi}{16}$ (et ceci reste vrai en remplaçant θ par φ !!)

. $\int_0^{\pi/2} \cos^5\theta \, d\theta = \frac{4}{5}\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \, d\theta$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta = \frac{8}{15}\left[+\sin\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{8}{15}$$

et $\int_0^{\pi/2} \sin^4\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi \, d\varphi$ en faisant $\varphi \to \frac{\pi}{2} - \varphi$.

$$= \frac{3\pi}{16}$$

Finalement, $F_1 = \frac{8}{15} \times \cancel{2} \times \frac{3\pi}{\cancel{16}} + \frac{\pi}{2}\underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \, d(-\cos\theta)}_{\left[-\frac{1}{5}\cos^5\theta\right]_0^{\pi/2} = 1/5}$.

$$= \frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$$

$\boxed{F_1 = \frac{3\pi}{10}}$.

4. Calculons le flux de V à travers $S_{2,x} = \{x=0,\ y,z \geq 0,\ y^2+z^2 \leq 1\}$.
La composante de V normale à $S_{2,x}$, soit V_n, est nulle le long de $S_{2,x}$. On en déduit que le flux de V à travers $S_{2,x}$ est nul.
Par symétrie, le flux de V à travers les deux autres composantes de S_2 est encore nul, et donc <u>le flux F_2 de V à travers S_2 est nul</u>.

5. D'après Ostrogradsky, le flux F de V à travers S vaut :

$$F = \iiint_D \operatorname{div}(V)\, dx\, dy\, dz = \iiint_D 3(x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$= 3\int_{[0,1]\times[0,\pi/2]^2} r^2 \cdot r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi \quad \text{(coordonnées sphériques)}$$

$$= 3\underbrace{\left(\int_0^1 r^4\, dr\right)}_{=1/5}\underbrace{\left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta\right)}_{=1}\underbrace{\left(\int_0^{\pi/2} d\varphi\right)}_{=\pi/2}$$

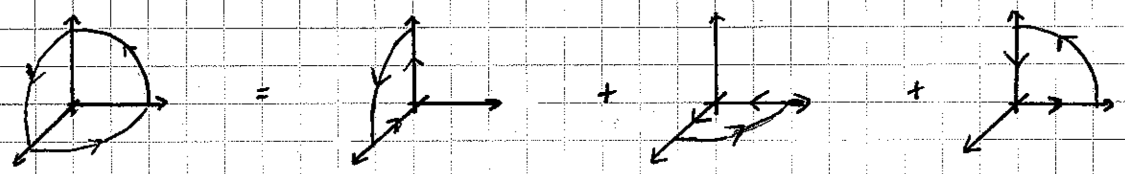
$\boxed{F = \frac{3\pi}{10}}$, et on retrouve bien $F = F_1 + F_2$.

D'ailleurs, rien ne nous empêchait de faire d'abord les questions 4. et 5., qui sont assez faciles, pour en déduire la réponse à la question 3.

6. S_1 est un huitième de la sphère unité ; son aire vaut donc $\frac{1}{8} \times 4\pi = \frac{\pi}{2}$

S_2 est l'union disjointe (à des courbes, de dimension 1 donc d'aire nulle, près) de 3 quarts de disque unité ; son aire est donc $\frac{3}{4} \times \pi = \frac{3\pi}{4}$

7. Remarquons que cette circulation est égale à la somme des circulations sur le bord de chacune des "faces" $S_{2,x}$, $S_{2,y}$, $S_{2,z}$ ($S_{2,y} = S_2 \cap \{y=0\}$, $S_{2,z} = S_2 \cap \{z=0\}$), selon le schéma :



(noter que sur les arêtes droites, les circulations se compensent deux à deux).

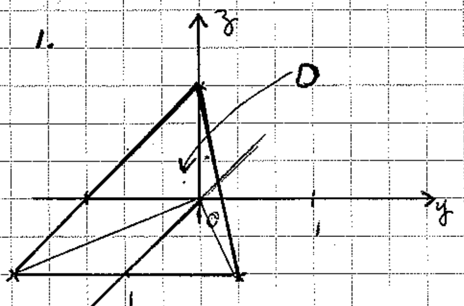
D'après Stokes-Ampère, on a par exemple

$$\oint_{\partial S_{2,x}} V \cdot d\vec{\Pi} = \int_{S_{2,x}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(V) \cdot d\vec{\sigma}_{S_{2,x}}$$

Or $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(V) \equiv \vec{0}$, d'où $\oint_{\partial S_{2,x}} V \cdot d\vec{\Pi} = 0 = \int_{\partial S_{2,y}} V \cdot d\vec{\Pi} = \int_{\partial S_{2,z}} V \cdot d\vec{\Pi}$

par symétrie, et ainsi $\boxed{\oint_{\partial S_2} V \cdot d\vec{\Pi} = 0}$.

Exercice V. 1.



2. Soit α la 2-forme $yz\, dy \wedge dz + xz\, dz \wedge dx + xz\, dx \wedge dy$

Par Stokes, $\iint_S \alpha = \pm \iiint_D d\alpha$

Or (cf corrigé précédent) $d\alpha = x\, dx \wedge dy \wedge dz$,

donc $\iiint_D d\alpha = \iiint_D x\, dx\, dy\, dz$.

Par symétrie par rapport a plan $\{x=0\}$ de D (qui change x en $-x$), $\iiint_D d\alpha = 0$, donc $\boxed{\iint_S \alpha = 0}$.