# LM 256 - Exercices corrigés

## Feuille 1

**Exercice 1.** 1. À cause du $x^2$ au dénominateur, la fonction considérée est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (on pourrait la *prolonger par continuité en 0*, c'est-à dire lui donner une valeur en 0 de sorte que la fonction obtenue soit *continue* en 0, mais ce n'est pas demandé). Ensuite, notre fonction est continue en $x_0 = \frac{\pi}{3}$ car quotient de fonctions continues en ce point, avec dénominateur non nul ; par définition de la continuité, la limite de notre fonction en $x_0$ est donc égale à sa valeur en ce point, soit $\frac{9}{\pi^2}$.

2. Ici encore, comme le dénominateur est nul en 0, on doit exclure ce point du domaine de définition de la fonction envisagée ; de plus, ce dénominateur s'annule encore sur tous les multiples de $\pi$ et n'est pas défini (« devient infini ») en chaque $\frac{(2k+1)\pi}{2}$. Au final, en enlevant tous ces points posant problème, on obtient pour domaine de définition $\mathbb{R}\backslash\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, la droite réelle dont on a exclus tous les multiples entiers de $\frac{\pi}{2}$ (on pourrait ici aussi prolonger la fonction par continuité en tous ces points). Pour la limite en 0 (qui n'appartient pas au domaine de définition mais vers lequel on peut tendre en restant dans ce domaine), on a une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ » ; il faut donc raffiner l'analyse pour conclure ; On va utiliser les développements limités usuels (à connaître !), en particulier $(1 - \cos x) \sim \frac{x^2}{2}$, $\sin x \sim x$ et $\tan x \sim x$ lorsque $x \to 0$. La relation $\sim$ (plus précisément $\sim_{x\to 0}$) étant compatible avec la multiplication et le passage au quotient, il vient

$$\frac{(1-\cos x)\sin x}{x\tan^2 x} \sim \frac{\frac{1}{2}x^2 \cdot x}{x \cdot x^2} = \frac{1}{2} \text{ lorsque } x \to 0, \;\; x \neq 0,$$

soit : la limite recherchée (existe et) vaut $\frac{1}{2}$.

3. On n'a pas ici de problème d'annulation du dénominateur car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq -1$ donc $2 + \cos x \geq 1 > 0$. Attention toutefois aux racines, dont l'argument (ce qu'il y a dessous) doit être positif ; on en déduit que le domaine de définition de la fonction étudiée, disons $f$, est $\mathbb{R}^+$. Passons à la limite en $+\infty$ ; elle peut sembler délicate, puisque le numérateur est de la forme indéterminée « $+\infty - \infty$ », tandis que le dénominateur oscille indéfiniment entre 1 et 3. Voyons comment traiter le numérateur ; pour tout $x \geq 0$, on a

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = x + 1 - x = 1,$$

soit $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ (on a bien $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\neq 0$), ce qui tend clairement vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$. Au final, pour tout $x\geq 0$, $f(x)=\frac{1}{(2+\cos x)(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$, ce qui est positif et $\leq \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$. Cette dernière quantité tendant vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$, le théorème d'encadrement (ou « des gendarmes ») nous dit que $f$ tend vers 0 en $+\infty$.

4. On commence par exclure 0 du domaine de définition de la fonction considérée (que l'on appelle $f$) à cause du dénominateur. On regarde les racines ; l'argument de la racine cubique est un trinôme du second degré, dont le discriminant vaut $-31<0$, qui est donc de signe constant, et donc toujours positif. L'argument de la racine carrée, que l'on écrit $x(x+4)$, est positif si $x\leq -4$ ou $x\geq 0$ (et strictement négatif sinon). On en déduit que le domaine de définition de $f$ est $]-\infty,-4]\cup]0,+\infty[$. Pour la limite en 0, on remarque que $\sqrt[3]{x^2+x+8}$ (défini sur $\mathbb{R}$) tend vers 2 en 0, soit $\sqrt[3]{x^2+x+8}-2$ tend vers 0, ce qui semble nous empêcher de conclure quant à la limite de $\frac{\sqrt[3]{x^2+x+8}-2}{x}$ en 0. Or comme $x^2+x+8$ ne s'annule pas sur un voisinage de 0, $x\mapsto \sqrt[3]{x^2+x+8}$ est $C^1$ et donc la limite susmentionnée existe et n'est autre que sa dérivée en 0, qui est une quantité finie (que l'on peut calculer, exercice). En outre, pour $x>0$, $\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x}=\sqrt{1+\frac{4}{x}}$, ce qui tend vers $+\infty$. En additionnant ces deux limites (quantité finie$+\infty$), on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ x\neq 0}} f(x)=+\infty$.

**Exercice 2.** La fonction $f$ (remarquons rapidement qu'elle est bien définie), qui sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ est le quotient d'une fonction — elle-même composée de fonctions continues — par une fonction continue ne s'annulant pas, est continue à gauche et à droite de 0. Il s'agit donc de voir ce qui se passe en 0. À droite, on sait que sin est dérivable en 0, de dérivée $\cos 0=1$, ce qui signifie que $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$, ce que l'on note aussi $\sin y\sim_0 y$. En outre, on a que $\sqrt{x}$ tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 0, et donc $\sin\sqrt{x}\sim_{0^+}\sqrt{x}$ (« on pose $y=\sqrt{x}$ »), ce qui signifie précisément que $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1=f(0)$, soit : $f$ est continue à droite en 0. De la même manière, $f$ est continue à gauche en 0, et est donc continue sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 3.** 1. On procède par encadrement. Pour tout $x$, $-1\leq\cos x\leq 1$, donc $-3\leq -2+\cos x\leq -1$ (ce qui nous dit au passage que $-2+\cos x$ ne s'annule pas, et donc que $f$ est bien définie), et en passant à l'inverse, puis en multipliant par $x^2$ qui est positif, il vient : $-x^2\leq\frac{x^2}{-2+\cos x}\leq -\frac{x^2}{3}$. Les membres de droite et de gauche tendant vers $-\infty$, celui du milieu aussi (il aurait suffit de n'avoir que la majoration, mais qui peut le plus peut le moins). La fonction exp tendant vers 0 en $-\infty$, on en déduit par composition des limites que $f$ tend vers 0 en $+\infty$.

2. On réécrit $g(x)=x\sqrt{\frac{1}{x^2}(1+x^2)}=\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{1+x^2}$ pour $x\neq 0$. Or, $\sqrt{x^2}=|x|$, et $x/|x|=\text{signe}(x)$, soit $g(x)=\text{signe}(x)\sqrt{1+x^2}$ pour $x$ non nul. La racine tendant vers 1 lorsque $x$ tend vers 0, $g$ tend vers 1 en $0^+$, et vers $-1$ en $0^-$, et n'a donc pas de limite en 0.

**Exercice 4.** Une fonction est prolongeable par continuité en un point *ssi* elle admet une limite finie en ce point (et on définit la fonction prolongée en lui attribuant la valeur de cette limite au point en question). À première vue, $f$ n'admet pas de limite en 0 (elle « oscille » indéfiniment), tandis $g$ semble en avoir une. Autrement dit, on veut *démontrer* (jusqu'ici, on n'a donné que de vagues impressions) que $f$ n'a pas de limite en 0, tandis que $g$ en a une, ce qui permettra de conclure : $f$ n'est pas prolongeable par continuité en 0, $g$ si. Pour $f$, on procède par l'absurde, et on utilise la définition de la limite ; supposons qu'elle admette une limite finie $\ell$ en 0. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ; par définition, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ dès que $|x| = |x - 0| \leq \delta$, $x \neq 0$. On peut prendre $k \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $\frac{1}{2k\pi} \in ]0, \delta[$, et donc $|f(\frac{1}{2k\pi}) - \ell| \leq \varepsilon = \frac{1}{2}$. Or $f(\frac{1}{2k\pi}) = \cos(2k\pi) = 1$, donc $\ell \geq \frac{1}{2}$. De même on peut prendre $k' \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $\frac{1}{(2k'+1)\pi} \in ]0, \delta[$, et donc $|f(\frac{1}{(2k'+1)\pi}) - \ell| \leq \frac{1}{2}$, ce qui donne $\ell \leq -\frac{1}{2}$ puisque $f(\frac{1}{(2k'+1)\pi}) = -1$, ce qui est absurde ; $f$ n'a donc pas de limite en 0 (on pouvait donner un traitement similaire et sans doute plus succinct avec le *théorème de caractérisation séquentielle de la continuité*).

Pour $g$, on procède par encadrement. Puisqu'un sinus est toujours $\leq 1$ en valeur absolue, on a pour $|g(x)| \leq |x|$ pour tout $x \neq 0$. On conclut par le théorème d'encadrement que $g$ admet une limite en 0, et celle-ci vaut 0. On peut donc prolonger $g$ par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$.

**Exercice 5.** *Je propose de remplacer « $e^{1/x} - 2$ » par « $e^{1/x} - 1$ » dans la formule définissant $f$ sur $\mathbb{R}^*$, pour éviter des problèmes inintéressants au dénominateur.* On remarque que $f$ et $g$ sont bien définies, car $e^{1/x} \neq 1$, et le $e^{1/x^2+x^2} > 1 \geq -\cos(1/x)$ pour tout $x \neq 0$. Cela dit, lorsque $x$ tend vers 0 par valeurs négatives ($x \to 0^-$), $e^{1/x}$ tend vers 0, donc $f(x)$ tend vers $-2 \neq 0 = f(0)$ ; $f$ n'est pas continue (à gauche) en 0. Toutefois lorsque $x$ tend vers 0 par valeurs positives, $e^{1/x}$ tend vers $+\infty$, donc $f(x)$ tend vers 0, et $f$ est continue à droite en 0.

Quant à $g$, on a que $e^{1/x^2+x^2}$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers 0 (indépendamment de son signe). Le dénominateur de $g$ tend donc vers $+\infty$ lorsque $x$ tends vers 0, puisque $\cos(1/x)$ est minoré (par -1). Le numérateur de $g$ étant majoré (par 1) en valeur absolue, $g(x)$ tend donc vers 0 par encadrement lorsque $x$ tend vers 0.

**Exercice 6.** 1. Pour voir que $f$ et $g$ (qui sont bien définies) sont dérivables (donc en particulier continues) sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$, il suffit de voir que l'on a sur le premier intervalle les écritures $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{1+x}$, et sur le second $f(x) = -x$ et $g(x) = \frac{x}{1-x}$. Les théorèmes classiques nous donnent alors le résultat sur chacun de ces intervalles, dont on remarque qu'ils sont disjoints, ce qui nous permet de dire que $f$ et $g$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

2. On va voir que $f$, qui est continue en 0 ($|x| \to 0 = |0|$ lorsque $x \to 0$), n'est pas dérivable en 0. En effet, pour $x \neq 0$, on a en 0 le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|-0}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \text{signe}(x)$, quantité qui vaut 1 si $x > 0$, et $-1$ si $x < 0$. Ainsi, la limite en 0 à droite du taux d'accroissement existe et vaut 1, tandis que l'on obtient $-1$ à gauche ; ce taux d'accroissement n'a donc pas de limite en 0, ce qui signifie précisément que $f$ n'est pas dérivable en 0.

Ensuite, même si les théorèmes généraux ne nous permettent pas de conclure que $g$ est dérivable en 0, on va voir que tel est pourtant le cas. Déjà, on sait que $g$ est continue en 0, car c'est le quotient de deux fonctions continues dont le numérateur ne s'annule pas (on a toujours $1+|x| \geq 1 > 0$). On calcule le taux d'accroissement de $g$ en 0, qui vaut pour $x$ non nul

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{\frac{x}{1+|x|}-0}{x} = \frac{1}{1+|x|},$$

ce qui tend bien vers une limite, 1 en l'occurrence, lorsque $x$ tend vers 0, d'où le résultat.

**Exercice 7.** 1. Rappelons l'énoncé précis : supposons que $v \circ u$ ait un sens, par exemple $u : I \to J$ et $v : J \to K$ avec $I$, $J$ et $K$ des intervalles de $\mathbb{R}$, et si $u$ est dérivable en $x_0 \in I$ et $v$ est dérivable en $u(x_0)$, alors $v \circ u$ est dérivable en $x_0$, de dérivée $u'(x_0) \cdot v'\big(u(x_0)\big)$.

2. Soient $u$ et $v$ deux fonctions, réciproques l'une de l'autre, soit $u : I \to J$ et $v : J \to I$, $I$ et $J$ intervalles de $\mathbb{R}$ pour faire simple, et $v \circ u = \mathrm{id}_I$, $u \circ v = \mathrm{id}_J$. Si alors $u$ est dérivable en $x_0 \in I$, avec $u'(x_0) \neq 0$, alors $v$ est dérivable en $u(x_0)$, et $v'\big(u(x_0)\big) = \frac{1}{u'(x_0)}$.

3. On se souvient que la fonction arctan est la réciproque de la fonction tan réduite à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, qui a toujours une dérivée non nulle, puisque $\tan' = 1+\tan^2 \geq 1 > 0$. Soit $y \in \mathbb{R}$. On pose $x = \arctan y \in ]-\pi/2, \pi/2[$, soit $y = \tan x$. D'après l'énoncé ci-dessus, arctan est dérivable en $y$, et

$$\arctan'(y) = \arctan'\big(\tan(x)\big) = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

On procède de même pour les dérivées de arcsin, réciproque de sin restreinte à $[-\pi/2, \pi/2]$, et de arccos, réciproque de cos restreinte à $[0, \pi]$. On obtient que arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1, 1[$ (alors qu'elles sont définies sur $[-1, 1]$, attention), et que pour tout $y$ dans cet intervalle,

$$\arcsin' y = -\arccos' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

4. Il s'agit de faire les calculs en utilisant le théorème de dérivation de fonctions composées, et les résultats du 3. ; on obtient :

- (a) $f$ est dérivable sur $]-1, 1[$, de dérivée arcsin ; par le théorème de la limite de la dérivée ($f$ est continue sur $[-1, 1]$), elle est même dérivable en $-1$ et en 1, de dérivées respectives $\arcsin -1 = -\pi/2$, et $\arcsin(1) = \pi/2$ ;
- (b) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^2}$ ;
- (c) $f$ est dérivable sur $]-1, 1[$, et tous calculs faits sa dérivée est donnée sur cet intervalle par : $x \mapsto \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$ ;
- (d) $f$ est dérivable sur $\left]-1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1\right[$, de dérivée donée sur cet intervalle par :

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-2x}}\,;$$

– (e) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.

**Exercice 8.** Il s'agit dans cet exercice de faire des compositions de développements limités, technique sur laquelle je suis revenu lors du dernier TD, et qui se réduit à un exercice de calcul polynomial assez banal une fois que l'on en a saisi les règles ; voici les résultats qu'il fallait obtenir :

a) Remarquons qu'il suffit ici d'écrire les $DL_3(0)$ de $\log(1+x)$ avant de le mettre au carré pour obtenir $\log(1+x)^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o_0(x^4)$.

b) En composant les $DL_3(0)$ du sinus et de l'exponentielle, on avait : $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^3)$ (attention, ici le coefficient de $x^3$ dans le développement limité est nul).

c) Ce développement est plus délicat, car *a priori* il ne correspond à rien de connu ; or, si l'on écrit au dénominateur le $DL_4(0)$ de $\exp -1$ (c'est-à-dire celui de exp auquel on retranche le 1 initial), on a, pour $x \neq 0$ petit :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x}{x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + o_0(x^4)} = \frac{x}{x(1 + x/2 + x^2/6 + x^3/24 + o_0(x^3))} \\ &= \frac{1}{1 + x/2 + x^2/6 + x^3/24 + o_0(x^3)} \end{aligned}$$

et l'on voit au passage que $h$ se prolonge en 0 par $h(0) = 1$ (et l'on a commencé avec un $DL_4$, car on perd une puissance au cours de la simplification). Puisque $x/2 + x^2/6 + x^3/24 + o_0(x^3)$ tend vers 0 avec $x$, on a quelque chose de la forme « $\frac{1}{1+k}$ avec $k$ tendant vers 0 », donc en composant les développements, on obtient : $h(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o_0(x^3)$ (et là encore le coefficient du terme d'ordre 3 est nul).

d) On procède comme pour le précédent développement (à ceci près que l'on développe à l'ordre 5 au numérateur et au dénominateur, puis on simplifie par $-x^2/2$) pour obtenir $j(x) = 1 + \frac{5}{12}x^2 + o_0(x^3)$ ; on remarque que les termes d'ordre impair sont nuls, ce qui est le cas lorsque l'on fait le $DL$ d'une fonction paire.

e) Cette fois on écrit $x = 1+h$, et alors $\sqrt{x} = \sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o_0(h^3)$, ce qui s'écrit en fonction de $x$ : $\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3)$.

f) On écrit $l(x) = \frac{1}{1-(x^2+x^3)}$ et l'on compose avec le $DL_3(0)$ de $\frac{1}{1+h}$ pour obtenir $l(x) = 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + o_0(x^7)$.

**Exercice 9.** *On se permettra dans cet exercice un peu technique l'abus consistant à identifier une fonction et la formule la définissant, qui peut se justifier en disant que $x$ n'est pas une variable, mais la fonction $t \mapsto t$. Pour un rappel sur l'intégration des fractions rationnelles, voir en fin de corrigé.*

1. La décomposition en éléments simples (on procède rapidement par identification) de la première fonction s'écrit

$$\frac{1}{5}\Big(\frac{-4}{x+1} + \frac{4x+1}{x^2+4}\Big) \quad ;$$

cette fonction admet donc $\frac{-4}{5}\log|x+1| + \frac{2}{5}\log(x^2+4) + \frac{1}{10}\arctan(x/2) + k_\pm$ pour primitives sur $I_- = ]-\infty, -1[$ et $I_+ = ]-1, +\infty[$, $k_\pm$ étant une constante fixée sur $I_\pm$.

Pour la seconde fonction, on remarque qu'elle est de la forme $\frac{1}{2}u'\sqrt{u} = \frac{1}{2}u'u^{\frac{1}{2}}$, avec $u = x^2+1$. Une primitive bien connue de $v'v^\alpha$ étant $\frac{1}{\alpha+1}v^{\alpha+1}$ pour toute $v$ strictement positive et $C^1$ et tout $\alpha \neq -1$, on en déduit que les primitives recherchées sont les $\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Pour la troisième fonction, il faut juste faire attention aux singularités (elle devient infinie en les multiples impairs de $\frac{\pi}{4}$), et on va donc calculer des primitives séparément sur chaque $I_k := \left]\frac{(2k-1)\pi}{4}, \frac{(2k+1)\pi}{4}\right[$, $k \in \mathbb{Z}$. Fixons $k$ ; sur $I_k$ notre fonction s'écrit $\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$, soit encore $-\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$, si l'on pose $u = \cos(2x)$, et admet donc pour primitives les $-\frac{1}{2}\ln|\cos(2x)| + c_k$, la constante $c_k$ pouvant être modifiée arbitrairement selon $k$.

2. La première fonction peut intimider, mais on remarque que le dénominateur a pour discriminant $-73 < 0$, et donc la décomposition en éléments simples est déjà faite, et le dénominateur est toujours $> 0$. De plus, le numérateur n'est autre que la dérivée du dénominateur ; on a juste à calculer les primitives d'une fonction du type $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$, qui sont les $\ln u$+constante. Les primitives demandées sont donc les $\ln\left(3x^2-7x+11\right)+k$, $k \in \mathbb{R}$.

La seconde fonction s'écrit $-\frac{1}{2}\frac{u'}{u^2}$ si l'on pose $u = 1+\cos(2x)$, ce qui est $\geq 0$, mais s'annule précisément en les multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$. Comme ci-dessus, on donne donc les primitives sur chaque $I_k := \left]\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right[$, $k \in \mathbb{Z}$, qui s'écrivent $\frac{1}{2(1+\cos(2x))} + c_k$, $c_k \in \mathbb{R}$.

Pour la troisième fonction, qui a un sens sur $\left]-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right[$, on écrit $\frac{1}{\sqrt{16-9x^2}} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{3x}{4})^2}}$, et l'on se souvient que $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ admet $\arcsin y$ pour primitive sur $]-1,1[$. Ainsi, les primitives demandées sont les $\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x}{4}\right) + k$, $k \in \mathbb{R}$, sur $\left]-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right[$, que l'on peut prolonger continûment aux extrémités.

3. Contrairement aux apparences, la réduction en éléments simples de la première fonction reste à effectuer, pour la raison que $x^4+16$ n'est pas irréductible ; en effet, on a $x^4+16 = \left(x+2e^{i\pi/4}\right)\left(x+2e^{3i\pi/4}\right)\left(x+2e^{-i\pi/4}\right)\left(x+2e^{-3i\pi/4}\right)$, soit en regroupant les termes conjugués, $x^4+16 = \left(x^2+2\sqrt{2}x+4\right)\left(x^2-2\sqrt{2}x+4\right)$. Les deux trinômes apparaissant sont cette fois irréductibles, ayant pour discriminant $-8$. Après identification, la réduction en éléments simples de notre fonction donne

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x^2+2\sqrt{2}x+4} - \frac{1}{x^2-2\sqrt{2}x+4}\right)$$

Oublions provisoirement le coefficient $\frac{1}{4\sqrt{2}}$, et écrivons $\frac{1}{x^2+2\sqrt{2}x+4} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+(1+x/\sqrt{2})^2}$, dont une primitive est donnée par $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(1+x/\sqrt{2}\right)$. En procédant de même pour le second morceau, on parvient aux primitives recherchées, qui sont les $\frac{1}{8}\left(\arctan\left(1+x/\sqrt{2}\right) - \arctan\left(x/\sqrt{2}-1\right)\right) + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Pour la deuxième fonction (qui est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ tout entier), on commence par un peu de trigonométrie ; on utilise en particulier la formule $\sin(2x) =$

$2\sin x \cos x$. Ainsi, en posant $u = 1+\cos^2 x > 0$, on voit que notre fonction s'écrit $-\frac{u'}{\sqrt{u}}$, dont une primitive est $-\ln(u)$. Les primitives demandées sont donc les $-\ln\left(1+\cos^2 x\right)+k$, $k \in \mathbb{R}$.

Enfin, la troisième fonction (définie sur $]e^{-1}, +\infty[$) s'écrit $u'\sqrt{u} = u'u^{1/2}$, en posant $u = 1+\ln x$. Ses primitives sont donc les $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}+k$, $k \in \mathbb{R}$.

4. Pour la première fonction, une « intégration par parties formelle » donne

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = (x-1)e^x.$$

Les primitives de $xe^x$ sont donc les $(x-1)e^x + k$, $k \in \mathbb{R}$.

On applique cette méthode à la deuxième et à la troisième fonctions (cette dernière n'étant définie que sur $\mathbb{R}^{+*}$) :

$$\int x \sin x \, dx = -x\cos x - \int (-\cos x) dx = -x\cos x + \sin x$$

et

$$\int \ln x \, dx = x\ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x,$$

et les primitives recherchées sont respectivement les $-x\cos x + \sin x + k$ et $x\ln x - x + k'$, $k$, $k' \in \mathbb{R}$ (et on peut se permettre de connaître les dernières par cœur).

On peut encore procéder ainsi pour la quatrième fonction (définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, voire sur $\mathbb{R}^+$ si $n \geq 1$ et que l'on prolonge par continuité en 0), mais on peut aussi employer une méthode plus directe. Celle-ci consiste à « deviner » une primitive approchée, puis à la corriger pour obtenir une vraie primitive. Sur cet exemple, on essaie, $x^{n+1}\ln x$, dont la dérivée vaut $(n+1)x^n \ln x + x^n$. Or $x^n$ est la dérivée de $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, et donc $x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ a pour dérivée $(n+1)x^n \ln x$. On en déduit que les primitives voulues sont les $\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Pour la cinquième fonction, on commence par calculer une primitive de $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, ce qui donne $v = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$. On écrit ensuite

$$\int x\cos^2 x \, dx = xv - \int v = \frac{x^2}{2} + \frac{x\sin(2x)}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{\cos(2x)}{8} = \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin(2x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{8}.$$

Il ne reste qu'à ajouter une constante pour avoir toutes les primitives voulues.

Pour la dernière fonction, on essaie $x\ln(x^2+1)$ ; cette fonction a pour dérivée $\ln(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}$. Il s'agit de corriger le dernier terme, qui peut encore s'écrire $2-\frac{2}{x^2+1}$. On obtient donc facilement que les primitives demandées sont les $x\ln(x^2+1)+2(x-\arctan x)+k$, $k \in \mathbb{R}$.

5. Pour trouver les primitives de $\sin^3 x$, on remarque que $\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x - \sin x \cos^2 x$. Les primitives sont donc facilement les $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + k$, $k \in \mathbb{R}$.

On raisonne de même pour $\tan^3 x$, en faisant attention aux singularités aux multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$. Sur un intervalle $I_k = \left]\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right[$, $k \in \mathbb{Z}$, on écrit

$$\tan^3 x = \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} - \frac{\sin x}{\cos x}.$$

En intégrant terme à terme, il vient que les primitives de la fonction considérée sur $I_k$ sont les $\frac{1}{2\cos^2 x} + \ln|\cos x| + c_k$, $c_k \in \mathbb{R}$, et ce pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Passons à la dernière fonction, définie sur $]-2,0[\cup]0,2[$. Toujours suivant la méthode de l'intégration par parties formelles, on a

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \int \frac{2x}{x\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \int \frac{1}{\sqrt{1-(x/2)^2}}\,dx.$$

Les primitives recherchées sont donc les $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \arcsin x + c_\pm$, $c_\pm \in \mathbb{R}$ selon que l'on se place sur $]-2,0[$ $(c_-)$ ou sur $]0,2[$ $(c_+)$.

*Un rappel sur l'intégration d'une fraction rationnelle* : si l'on a $F(X) = \frac{A(X)}{Q(X)}$, avec $\deg A \geq \deg Q$, on effectue la division euclidienne de $A$ par $Q$ $(A = EQ+P)$ et $F = E + \frac{P}{Q}$, avec $\deg P < \deg Q$. Maintenant, $Q$ se décompose en $a\prod_{i=1}^n (X-a_i)^{p_i} \prod_{k=1}^m (X^2+b_kX+c_k)^{q_k}$, avec les $a_i$ deux à deux distincts, et les $\Delta_k = {b_k}^2/4 - c_k < 0$. Le théorème de décomposition en éléments simples nous dit alors que l'on peut écrire :

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \frac{\alpha_{ij}}{a(X-a_i)^j} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{q_k} \frac{\beta_{kl}X + \gamma_{kl}}{a(X^2+b_kX+c_k)^l}.$$

Ensuite, on intègre terme à terme la somme obtenue :

- les $\frac{\alpha_{i1}}{x-a_i}$ s'intègrent en $\alpha_{i1}\log(|x-a_i|)$ à gauche et à droite strictement de $a_i$, tandis que les $\frac{\alpha_{ij}}{(X-a_i)^j}$ pour $j \geq 2$ s'intègrent en $\frac{-\alpha_{ij}}{(j-1)(X-a_i)^{j-1}}$ ;
- pour les $\frac{\beta_{kl}X+\gamma_{kl}}{(X^2+b_kX+c_k)^l}$, on écrit d'abord $\frac{\beta_{kl}X+\gamma_{kl}}{(X^2+b_kX+c_k)^l} = \beta_{kl}\frac{X+b_k/2}{(X^2+b_kX+c_k)^l} + (\gamma_{kl} - \beta_{kl}b_k/2)\frac{1}{(X^2+b_kX+c_k)^l}$ ;
- ensuite, les $\frac{x+b_k/2}{x^2+b_kx+c_k}$ s'intègrent en $\frac{1}{2}\log(x^2+b_kx+c_k)$, tandis que pour $l \geq 2$, les $\frac{x+b_k/2}{(x^2+b_kx+c_k)^l}$ s'intègrent en $-\frac{X+b_k/2}{2(l-1)(X^2+b_kX+c_k)^{l-1}}$ ;
- d'autre part, les $\frac{1}{x^2+b_kx+c_k} = \frac{1}{(x+b_k/2)^2+c_k-{b_k}^2/4} = \frac{-1/\Delta_k}{(x/\delta_k+b_k/(2\delta_k))^2+1}$ si l'on note $\delta_k$ une racine carrée de $-\Delta_k$ s'intègrent en $\arctan(x/\delta_k + b_k/(2\delta_k))/\delta_k$ ;
- enfin, pour les $\frac{1}{(x^2+b_kx+c_k)^l} = \frac{(-1/\Delta_k)^l}{((x/\delta_k+b_k/(2\delta_k))^2+1)^l}$ pour $l \geq 2$, on utilise des intégrations par parties successives et on se ramène au cas $l = 1$. Par exemple,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{(1+x^2)dx}{(1+x^2)^2} - \int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2}\int x\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx \\ &= \arctan - \frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{-1}{1+x^2} - \int\frac{-dx}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\arctan + \frac{x}{2(1+x^2)}\end{aligned}$$

(et il est toujours bon si l'on a le temps de vérifier que l'on ne s'est pas trompé en redérivant ce qu'on obtient).

**Exercice 10.** 1. La première intégrale s'obtient facilement par le calcul $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Pour la seconde, on utilise la *formule de linéarisation* $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ valable pour tout $x$ réel. Il vient alors $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$.

2. Procédons au changement de variable indiqué. On écrit $dt = \frac{1}{2}(1+\tan^2(x/2)) = \frac{1}{2}(1+t^2)dx$ (formellement), soit $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. Les bornes deviennent respectivement 0 et 1 ; $\cos x$ devient $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ (exercice : trouver pourquoi). L'intégrale à calculer devient

$$\int_0^1 \frac{1}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2dt}{5+t^2},$$

soit $\left[\frac{2}{\sqrt{5}} \arctan(x/\sqrt{5})\right]_0^1 = \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$.

**Exercice 11.** *Un rapide dessin du domaine dont on doit calculer l'aire est en général un bonne idée, ne serait-ce que pour se rattacher à un objet « concret ». Par ailleurs, les notions de longueur, d'aire, de volume, etc. n'étant pas parfaitement définies sans la théorie de la mesure, on comprendra que la rigueur absolue cède la place à une certaine intuition dans ce type d'exercices.*

1. On peut décrire le domaine considéré comme ceci : c'est le quadrilatère borné délimité par la droite horizontale (d'équation) $y = 0$, la droite verticale $x = 0$ et les droites obliques (et parallèles) $y = 1 - x$ et $y = 2 - x$. En comptant sur une figure les demi-carrés unité, on voit que l'aire recherchée, disons $\mathcal{A}_1$, vaut $\frac{3}{2}$ ; voyons comment la calculer rigoureusement. Cette aire est la différence entre celle du grand triangle situé entre le segment horizontal $0 \leq x \leq 2$ et la droite $y = x - 2$, et le petit triangle situé entre le segment horizontal $0 \leq x \leq 1$ et la droite $y = x - 1$. Par définition de l'aire d'un domaine situé entre le graphe d'une fonction et l'axe des abscisses, on a :

$$\mathcal{A}_1 = \int_0^2 (2-x)dx - \int_0^1 (1-x)dx = \left[-\frac{1}{2}(2-x)^2\right]_0^2 - \left[-\frac{1}{2}(1-x)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(0+4-0-1) = \frac{3}{2},$$

comme on l'avait deviné.

2. Ici, il est clair que le domaine étudié est la partie du plan situé au-dessus du segment horizontal $1 \leq x \leq 2$ et délimité entre les graphes de $x \mapsto x$ et $y \mapsto \operatorname{sh} x$. Par suite, si l'on note son aire $\mathcal{A}_2$, on a :

$$\mathcal{A}_2 = \int_1^2 (\operatorname{sh} x - x)dx = \left[\operatorname{ch} x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \operatorname{ch} 2 - \operatorname{ch} 1 - \frac{3}{2} \approx 0,719.$$

3. De même, l'aire $\mathcal{A}_3$ du graphe considéré vaut

$$\mathcal{A}_3 = \int_0^\pi (\sin^2 x - \sin x)dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + \cos x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} + 2 \approx 3,571.$$

(voir l'exercice 10 pour le calcul d'un primitive de $\sin^2 x$ par linéarisation).

4. *Il y a une coquille dans l'énoncé ; il faut remplacer $x$ par $\theta$.* On utilise ici les coordonnées polaires ; le domaine envisagé est donc le demi-disque unité (centré en l'origine et de rayon 1) situé à gauche de l'axe des abscisses ; son aire $\mathcal{A}_4$ vaut donc $\frac{\pi}{2}$. Vérifions-le par le calcul ; en coordonnées cartésiennes, notre domaine est situé à la verticale du segment $-1 \le x \le 0$, entre les graphes des fonctions $x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$ et $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ (en effet, comme $r^2 = x^2+y^2$, $r \le 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 \le 1 \Leftrightarrow |y| \le \sqrt{1-x^2}$). Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4 &= \int_{-1}^{0} (\sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2}))dx = 2\int_{-1}^{0} \sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= 2\int_{-\pi/2}^{0} \cos t \cdot \cos t\,dt \text{ en posant } x = \sin t \text{ et en notant que } \cos t \ge 0 \text{ sur } \Big[-\frac{\pi}{2}, 0\Big] \\ &= \int_{-\pi/2}^{0} (1+\cos(2t))dt \text{ (linéarisation du } \cos^2) \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

**Exercice 12.** 1. Un logarithme ne prenant que des arguments strictement positifs, $f$ n'est définie que sur le domaine $\{(x,y)|\, x^2+y^2 > 1\}$. En coordonnées polaires, $x^2+y^2 > 1 \Leftrightarrow r^2 > 1 \Leftrightarrow r > 1$ ; le domaine mis en évidence est donc l'extérieur (strict) du cercle unité.

2. De même, $f$ n'est ici définie que sur le domaine $\{(x,y)|\, y > x^2\}$, qui correspond à la partie du plan située strictement au-dessus de la parabole d'équation $y = x^2$.

3. Une racine carrée n'est définie que des quantités positives. Par conséquent, $f$ est définie sur $\{(x,y)|\, xy \le 1\}$. On peut décrire ce domaine comme l'union disjointe :

$$\{(x,y)|\, x > 0 \text{ et } y \le 1/x\} \sqcup \{(x,y)|\, x < 0 \text{ et } y \ge 1/x\} \sqcup \{(0,y)\}.$$

La première composante est la région strictement à droite ($x > 0$) de l'axe des ordonnées située strictement sous la branche d'hyperbole d'équation $\{y = \frac{1}{x}\}$, la deuxième, la région strictement à gauche ($x < 0$) de l'axe des ordonnées située strictement au dessus de la branche d'hyperbole d'équation $\{y = \frac{1}{x}\}$, et la troisième est l'axe des ordonnées. Au final, le domaine considéré est la partie du plan situé strictement entre les deux branches de l'hyperbole d'équation $\{y = \frac{1}{x},\, x \ne 0\}$.

4. À cause de la racine carrée, $f$ est définie là où le produit $(x+y+1)(x+y-1)$ est positif, c'est-à-dire là où $(x+y+1)$ et $(x+y-1)$ ont même signe, au sens large, soit :

- $x+y+1 > 0$ et $x+y-1 \ge 0$ ;
- $x+y+1 = 0$ ;
- $x+y+1 < 0$ et $x+y-1 \le 0$.

Or si $x+y-1 \ge 0$, *i.e.* $y \ge 1-x$, donc $x+y+1 \ge 2$ et $x+y+1 > 0$ est automatique. En raisonnant à l'identique sur la troisième condition, on voit que le domaine de définition de est $\{(x,y)|\, x+y-1 \ge 0 \text{ ou } x+y+1 \le 0\}$, c'est-à-dire la région du plan située au-dessus de la droite d'équation $y = 1-x$, union celle située sous la droite d'équation $y = -1-x$.

5. Il s'agit de voir où le polynôme en $x$, $y$ au dénominateur s'annule. Le plus simple est de poser $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $(r,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$, et d'écrire $x^2 + xy + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta) = r^2\big(1 + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\big)$. La parenthèse $\big(1 + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\big)$ étant toujours $\geq \frac{1}{2}$, $x^2 + xy + y^2$ ne s'annule que si $r = 0$, soit $x = y = 0$. Ainsi, $f$ est définie sur le plan privé de l'origine.

**Exercice 13.** 1. La ligne de niveau $c$ de $f$ est l'ensemble des solutions $(x, y)$ de l'équation $f(x, y) = c$. Dans le cas présent, ce sont donc les droites d'équation $3x + 2y = c$, ou $y = \frac{-3x+c}{2}$, soit $y = \frac{-3x+1}{2}$, $y = \frac{-3}{2}x + 1$ ou $y = \frac{-3}{2}x$ selon que $x = 1$, 2 ou 0.

2. Ici, la ligne de niveau -1 est l'ensemble vide, puisque pour toute valeur de $(x, y)$, $y^2 = f(x, y) = -1$ est impossible. La ligne de niveau 0 est l'axe des abscisses, puisque $y^2 = 0$ équivaut à $y = 0$. La ligne de niveau 1 est la réunion des droites horizontales d'équation $y = 1$ et $y = -1$, car $y^2 = 1$ *ssi* $y = \pm 1$ ; de même, la ligne de niveau 4 est la réunion des droites horizontales d'équation $y = 2$ et $y = -2$.

3. Remarquons tout d'abord que le domaine de définition de $f$ est $\{(x, y) | \, y > -x\}$, soit la partie du plan située strictement au-dessus de la seconde bissectrice. Cela dit, pour $(x, y)$ dans ce domaine, $f(x, y) = 0$ équivaut à $x + y = 1$, soit $y = 1 - x$ ; la ligne de niveau 0 de $f$ est donc la droite d'équation $y = 1 - x$. De même, la ligne de niveau 1 de $f$ est la droite d'équation $y = e - x$

**Exercice 14.** 1. Le domaine de définition de $f$ est $\{(x, y) | \, y > x^2\}$, soit la région strictement au-dessus de la parabole d'équation $y = x^2$. La ligne $I^0$ de niveau 0 de $f$ est la parabole d'équation $y = x^2 + 1$, à laquelle appartient $m_0$. Pour donner l'équation de la tangente à $I^0$ en $m_0 = (-1, 2)$, on peut procéder directement en calculant les dérivées partielles de $f$ en $m_0$, puisque $f$ est clairement différentiable sur son domaine de définition. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) = \frac{-2(-1)}{2-(-1^2)} = 2$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) = \frac{1}{2-(-1^2)} = 1$, d'où l'équation $2x + y = 2x_{m_0} + y_{m_0} = 0$, soit $y = 2x$. On peut aussi parvenir à ce résultat en remarquant que $I^0$ est le graphe de la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ qui est dérivable, et calculer sa tangente au point d'abscisse $-1$ selon la méthode usuelle pour les fonctions à une variable.

2. L'équation $f(x, y) = 6$ se réécrit $2xy - 3x + y - 3 = 0$, et il ne semble pas y avoir de factorisation du polynôme en jeu. On calcule les dérivées partielles de $f$ (qui est différentiable sur le plan, c'est un polynôme) en $m_0 = (1, 2)$ ; on obtient $\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(m_0) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Puisqu'elles ne sont pas toutes deux nulles (mieux : aucune n'est nulle), $I^6$ admet bien une tangente en $m_0$, d'équation $x + 3y = x_{m_0} + 3y_{m_0} = 7$, soit $x + 3y - 7 = 0$.

3. La fonction $f$ est différentiable sur tout $\mathbb{R}^2$ ; on le voit mieux en écrivant $f(x, y) = e^{xy \ln 2}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. L'équation $f(x, y) = 4$ équivaut à $xy = 2$ (pour s'en convaincre, écrire $4 = e^{\ln 4} = e^{2 \ln 2}$ et utiliser que l'exponentielle est strictement croissante et $\ln 2 \neq 0$) ; la ligne de niveau $I^4$ est donc l'hyperbole d'équation $xy = 2$. Pour la tangente en $m_0$, on calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) = 2 \cdot \ln 2 e^{1 \cdot 2 \cdot \ln 2} = 8 \ln 2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(m_0) = 1 \cdot \ln 2 e^{1 \cdot 2 \cdot \ln 2} = 4 \ln 2$, d'où l'équation de la tangente : $8(\ln 2)x + 4(\ln 2)y = 8(\ln 2)x_{m_0} + 4(\ln 2)y_{m_0}$, soit après simplification $y + 2x - 4 = 0$.

**Exercice 15.** *En général, cet exercice n'est pas sans soulever quelques doutes. Il est pourtant représentatif de ce genre de problèmes.*

1. Pour commencer, $f$ est sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ un quotient de deux polynômes en $x$, $y$, avec un dénominateur ne s'annulant jamais ; elle est donc continue en tant que quotient à dénominateur qui ne s'annule pas de fonctions continues. Étudions la situation en $(0,0)$ ; vu comme la question est posée, on se doute qu'il va falloir montrer que $f$ *n'est pas* continue en $(0,0)$, et pour ce faire trouver un « chemin » tel que si l'on s'approche de $(0,0)$ en suivant ce chemin, les valeurs que va prendre $f$ (restreinte à ce chemin) ne tendent pas vers la valeur voulue, soit $f(0,0)$, qui vaut 0.

Or, au vu de la formule qui définit $f$, les variables $x$ et $y$ jouent un rôle symétrique ; on peut donc regarder ce qui se passe lorsque l'on fait $x = y$, c'est-à-dire quand on regarde $f$ restreinte à la droite $y = x$ privée de l'origine, ou encore ce que vaut $f(x,x)$ pour $x \neq 0$. Or, pour de tels $x$, $f(x,x) = 1/2$, ce qui tend vers $1/2 \neq 0 = f(0,0)$ quand $(x,x)$ tend vers $(0,0)$, *i.e.* quand $x$ tend vers 0. On a donc trouvé une manière de se rapprocher arbitrairement près de $(0,0)$ sans que les valeurs prises par $f$ ne tendent vers $f(0,0)$ : $f$ n'est donc pas continue en $(0,0)$.

2. Commençons par le calcul sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, puisque $f$ y est sans problème dérivable (quotient de fonctions dérivables à dénominateur $> 0$) ; après calcul, pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, et en permutant $x$ et $y$ (rôle symétrique), $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. Regardons maintenant ce qui se passe en $(0,0)$ ; $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'est autre, si elle existe, que la dérivée en $x = 0$ de la fonction $f(\cdot,0) : x \mapsto f(x,0)$. Or pour $x \neq 0$, $f(x,0) = 0$, ce qui est vrai pour $x = 0$, et donc puisque $f(\cdot,0)$ est constante, elle est dérivable (en 0), de dérivée 0. D'où : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe, et vaut 0. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

**Exercice 16.** 1. La fonction $f$ est sans problème définie en dehors de l'axe des abscisses $y = 0$. Montrons qu'elle admet une limite en $(0,0)$ ; il s'agit donc de montrer que dès que l'on est assez près de l'origine, de quelque manière que ce soit, on $f$ prend une valeur proche de la limite escomptée. On utilise pour cela la majoration : pour tout $h$, on a $|1 - \cos h| \leq h^2$. Si l'on remplace $h$ par $xy$ et que l'on divise par $y^2$, on a pour tout $(x,y)$ hors de l'axe des abscisses

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^2y^2}{2y^2} = \frac{x^2}{2},$$

ce qui tend 0 vers lorsque $(x,y) \to (0,0)$, puisque en particulier $x$ tend vers 0. Ainsi, $f$ a pour limite 0 en $(0,0)$.

2. La fonction $f$ est définie en dehors de l'axe des ordonnées $x = 0$. On va voir qu'elle n'a pas de limite en l'origine, en s'approchant de ce point de deux manières différentes pour obtenir deux hypothétiques limites différentes. Si l'on suit la première bissectrice, on a, pour tout $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{x^2+x^2}{x} = \frac{1}{2}x$ ce qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 0. Si l'on suit l'arc de parabole $y = \sqrt{x}$, $x > 0$, on a pour tout $x$ strictement positif $f(x,\sqrt{x}) = \frac{x^2+x}{x} = x + 1$, ce qui tend vers 1 lorsque $x$ tend vers 0. Ainsi, en se rapprochant de $(0,0)$, selon que l'on suive la première bissectrice ou l'arc de parabole ci-dessus, $f$ tend vers 0 ou 1, et ne saurait donc avoir de limite en $(0,0)$.

3. La fonction est définie en dehors de l'origine. On utilise la majoration $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ (à retenir !) valable pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a donc, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| \leq \frac{|x|(x^2+y^2)}{2(x^2+y^2)} = \frac{|x|}{2}$, ce qui tend vers 0 lorsque $x$ tend vers 0, donc en particulier lorsque $(x,y)$ tend vers l'origine, On a prouvé que $f$ a pour limite 0 en l'origine.

4. La fonction est définie lorsque le dénominateur de la fraction en argument du sinus est non-nulle, c'est-à-dire lorsque $x$ et $y$ sont non-nuls ; le domaine de définition de $f$ est donc $(\mathbb{R}^*)^2 = \{(x,y) | \, x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\}$. Pour la limite, il ne faut pas se laisser impressionner par le comportement du $\sin\left(\frac{1}{xy}\right)$, car pour tous $x$, $y \neq 0$, $\left|\sin\left(\frac{1}{xy}\right)\right| \leq 1$. Comme par ailleurs $x+y^2$ tend vers 0 lorsque l'on se rapproche de l'origine, et que par encadrement « (quantité tendant vers 0)$\times$(quantité bornée)=(quantité tendant vers 0) », on en déduite que $f$ tend vers 0 lorsque $(x,y)$ tend vers $(0,0)$ (avec $x$, $y \neq 0$).

5. Le domaine de définition $D_f$ de $f$ est donné par les contraintes $xy > -1$ (ce qui correspond à la région située strictement entre les deux branches de l'hyperbole $xy = -1$, *cf.* exercice 12 question 3 pour un problème analogue), et $x \neq 0$ : il faut donc enlever l'axe des ordonnées de la partie du plan mise en évidence (on pourrait rajouter les $\left(\frac{1}{k}, kl\right)$, $k \in \mathbb{Z}^*$, $l \in -1-\mathbb{N}$ $(k>0)$ ou $l \in -2-\mathbb{N}$ $(k<0)$, mais ce n'est pas le but de l'exercice). Pour $(x,y) \in D_f$, on a $f(x,y) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+xy)}$. Or pour tout $(x,y)$ proche de l'origine (de sorte que $|xy| < 1$), $\ln(1+xy) = O(xy)$, donc $\frac{1}{x}\ln(1+xy) = O(y)$ si de plus $x \neq 0$. Puisque un $O(y)$ tend vers 0 lorsque $(x,y)$ tend vers $(0,0)$, et que l'exponentielle est continue, on en déduit que $f(x,y)$ tend vers $e^0 = 1$ lorsque $(x,y)$ tend vers l'origine (dans $D_f$).

**Exercice 17.** Comme $(0,0)$ appartient à la droite d'équation $x+y=0$ (appelons-la $D$ une fois pour toutes), droite sur laquelle on voit que la formule définissant $f$ lorsque $x \neq y$ diverge, on se doute donc que cette droite va jouer un rôle dans le défaut de continuité de $f$ en $(0,0)$. Néanmoins, lorsque l'on suit cette droite vers l'origine, on a, pour tout $x \neq 0$, $f(x,x) = 0$ par définition de $f$, et cette quantité tend bien vers $0 = f(0,0)$. On doit donc sortir de $D$ pour trouver un contre-exemple à la continuité de $f$ en l'origine.

Essayons par exemple une autre droite passant par l'origine, que l'on paramètre comme étant l'ensemble des $(\alpha t, \beta t)$, $t$ parcourant $\mathbb{R}$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, et, de manière générale, non colinéaire à $(1,-1)$ (soit $\alpha + \beta \neq 0$, pour que notre droite ne soit pas $D$). Alors pour tout $t$ non-nul, c'est-à-dire en dehors de l'origine, $(\alpha t, \beta t) \notin D$ et :

$$f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha\beta t^2}{(\alpha+\beta)t} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}t \xrightarrow{t\to 0} 0,$$

ce qui ne nous donne toujours pas le contre-exemple désiré.

Faisons alors la remarque suivante : si l'on se rapproche de manière orthogonale d'un point de $D$ qui n'est pas l'origine, par exemple en suivant la demi-droite $\{(x_0+t, -x_0+t), t > 0\}$ avec $x_0 \neq 0$, alors pour $t > 0$ on a $f(x_0+t, -x_0+t) = \frac{-x_0^2+t^2}{2t}$, ce qui tend vers $-\infty$ lorsque $t$ tend vers 0. Nous retiendrons donc le fait suivant : lorsque l'on se dirige vers l'origine selon un angle constant, $f$ tend vers 0, et lorsque l'on se dirige orthogonalement vers un point de $D$ qui n'est pas $(0,0)$, on tend vers (moins) l'infini.

Intuitivement, il faudrait donc trouver un équilibre entre ces deux manières de tendre vers $D$, de sorte que $f$ tende vers une quantité entre zéro et l'infini, soit une quantité finie non-nulle.

Plus prosaïquement, il est tentant au vu de ceci de tendre vers l'origine en suivant une courbe passant par $(0,0)$ et lisse en ce point, telle que $D$ soit la tangente à cette courbe en ce point, et de prendre une telle courbe confinée strictement à un des demi-plans délimités par $D$ en dehors de $(0,0)$ pour éviter les problèmes hors de ce point. Si l'on cherche de plus cette courbe comme étant le graphe d'une fonction, soit un ensemble du type $\{(t, g(t))\}$, on va donc vouloir pour $g$ une fonction définie en 0 avec $g(0) = 0$, dérivable en 0 de dérivée $-1$, et telle que $g(t) > -t$ par exemple pour tout $t \neq 0$.

On trouve rapidement une fonction comme $g : t \mapsto -t+t^2$ satisfaisant à cette analyse, et pour tout $t$ non nul on a alors :

$$f(t, g(t)) = \frac{-t^2+t^3}{t^2} = -1+t \xrightarrow{t\to 0} -1 \neq 0 = f(0,0),$$

ce qui nous permet (enfin) d'affirmer que $f$ n'est pas continue $(0,0)$.

On veut maintenant voir que la restriction de $f$ au cadran supérieur droit est elle continue en l'origine. Remarquons donc que pour $x$ et $y$ positifs tels que $(x,y) \neq (0,0)$, $0 \leq x \leq \max(x,y) \leq x+y$, et de même $0 \leq x \leq x+y$, d'où $0 \leq xy \leq (x+y)^2$, et donc $0 \leq f(x,y) \leq \frac{(x+y)^2}{x+y} = x+y$, et le membre de droite tend vers 0 lorsque $(x,y)$ tend vers $(0,0)$. Par encadrement, on a donc bien que $f$ restreinte à $(\mathbb{R}^+)^2$ est continue en l'origine. On peut aussi utiliser ici les coordonnées polaires, et dire que pour $r > 0$, $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$\begin{aligned} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r(\cos\theta+\sin\theta)} \\ &= \frac{r}{2}\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{2}(\cos(\pi/4)\cos\theta+\sin(\pi/4)\sin\theta)} \\ &= \frac{r}{2\sqrt{2}}\frac{\sin 2\theta}{\cos(\theta-\pi/4)}. \end{aligned}$$

Or le numérateur de la seconde fraction est majoré en valeur absolue par 1, tandis que son dénominateur est minoré par $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ; la fraction est donc majorée en valeur absolue (par $\sqrt{2}$). On en déduit que $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ tend vers 0 lorsque $r$ tend vers 0 (et $\theta$ a pour seule contrainte de rester dans $[0, \pi/2]$), soit lorsque que $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ tend vers l'origine en restant dans le cadran supérieur droit.

**Exercice 18.** 1. Remarquons tout d'abord que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, puisque le dénominateur $x^4+y^2$ ne s'y annule jamais. Il faut donc voir ce qui se passe en l'origine. On paramètre $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D} = \{(\alpha t, \beta t), t \in \mathbb{R}\}$, pour un certain couple de réels $(\alpha, \beta)$ non nul (paramétrisation plus souple que les équation $y = ax$ ou $x = by$). On a alors, le long de $\mathcal{D}$, en dehors de l'origine, *i.e.* pour $t$ non nul, $f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha^2\beta t^3}{\alpha^4 t^4+\beta^2 t^2}$. Si alors $\beta$ est non

nul, le dénominateur est équivalent à $\beta^2 t^2$ lorsque $t$ tend vers 0, donc $f(\alpha t, \beta t)$ équivaut à $\frac{\alpha^2}{\beta} t$, et tend vers 0 avec $t$, donc $f$ réduite à $\mathcal{D}$ est continue en 0 et donc continue. Si à présent $\beta$ est nul, alors $f(\alpha t, \beta t) = 0$, ce qui tend vers 0 (!) avec $t$, et la même conclusion s'en suit.
2. On pourrait croire que ceci nous permet de dire que $f$ est continue en 0. Or, si l'on se place sur la parabole $\{(t, t^2)\}$ qui passe par l'origine, on a pour $t$ non nul $f(t, t^2) = \frac{t^4}{t^4+t^4} = \frac{1}{2}$, ce qui manifestement ne tend pas vers 0 quand $t$ tend vers 0. Surprenant, n'est-ce pas ?

**Exercice 19.** On commence par montrer que $f$ est continue en $(1, 0)$. Supposons $(x, y) \neq (1, 0)$ ; alors on peut écrire $f(x, y)$ sous la forme $\frac{(x-1)y \cdot (x+1)y^2}{(x-1)^2+y^2}$. Or on a toujours $|(x-1)y| \leq \frac{1}{2}\big((x-1)^2 + y^2\big)$, donc $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}|x+1|y^2$ dès que $(x, y) \neq (1, 0)$. Faisons à présent tendre $(x, y)$ vers $(1, 0)$ ; il est clair que $|x+1|y^2$ tend vers 0, et donc par encadrement $f(x, y)$ tend vers $0 = f(1, 0)$ (la dernière égalité par définition de $f$) : $f$ est continue en $(1, 0)$.

Étudions maintenant la dérivabilité de $f$ en ce point ; on commence par les dérivées partielles. Pour la dérivée partielle selon $x$, on fixe $y = 0$ et il s'agit donc de voir que la fonction d'une variable $x \mapsto f(x, 0)$ admet une dérivée en $x = 1$. Or cette dernière fonction est identiquement nulle (si $x \neq 1$, $f(x, 0) = \frac{(x^2-1)0^3}{(x-1)^2+0^2=0}$, tandis que $f(1, 0) = 0$ par définition) ; elle admet donc bien une dérivée, nulle, en $x = 1$. Par conséquent, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ existe et vaut 0.

De même, pour la dérivée partielle selon $y$, on fixe $x = 1$ et on regarde la fonction $y \mapsto f(1, y)$ ; on a encore la fonction nulle, car lorsque $y \neq 0$, on peut favoriser le numérateur par $(x-1)$ dans la formule donnant $f(x, y)$, et toujours car $f(1, 0) = 0$. Conclusion : $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$ existe et vaut 0.

Cela ne suffit toutefois pas à conclure quant à la *différentiabilité* de $f$ en $(1, 0)$. D'après les valeurs des dérivées partielles, si $f$ admet une différentielle en ce point, celle-ci est nulle. Autrement dit, $f$ est différentiable en $(1, 0)$ *ssi* $f(x, y) = f(x, y) - 0 = o_{(1,0)}\big(\|(x-1, y)\|\big)$, et alors sa différentielle en ce point est nulle. Or on a vu que $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}|x+1|y^2$ pour tout $(x, y) \neq (1, 0)$ ; d'une part, au voisinage de $(1, 0)$, $|x+1|$ est borné (par exemple, $|x+1| \leq 3$ si $0 \leq x \leq 2$), et d'autre part $y^2 \leq (x-1)^2 + y^2 = o_{(1,0)}\big(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\big)$ (si l'on tend vers 0, on est négligeable devant sa racine carrée), d'où : $f(x, y) = o_{(1,0)}\big(\|(x-1, y)\|\big)$, et donc $f$ est différentiable en $(1, 0)$, de différentielle nulle.

**Exercice 20.** (a) Pour tous $x$, $y$, $z \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + yz + z^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + xz$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = xy + 3xz^2$.
(b) Le calcul est plus facile si l'on écrit, pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{y^2 \log x}$. On a alors pour ces $x$, $y$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{x} e^{y^2 \log x} = y^2 x^{y^2 - 1}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \log x e^{y^2 \log x} = 2y x^{y^2} \log x$.
(c) On calcule directement, et pour $x$, $z \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{x/y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{y^2}(e^{x/y} + e^{z/y})$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{y} e^{z/y}$.
(d) Pour $(x, y)$ tel que $x^2 + y^2 < 1$, c'est-à-dire $(x, y)$ dans le disque unité ouvert,

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$.

**Exercice 21.** (a) Il est toujours bon de spécifier succinctement l'ensemble (le plus large si possible) sur lequel $f$ est définie et différentiable ; ici, il s'agit de $(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}) \cup (\mathbb{R}^{-*} \times \mathbb{R}^{-*})$, et sur cet ensemble, $df = \frac{dx}{|x|} + \frac{dy}{|y|}$.
(b) Ici, $f$ est définie et différentiable sur $\mathbb{R}^3$. Par ailleurs, $df = 2x(1+y^2z^2)dx + \big(2yx^2z^2 + z\cos(yz)\big)dy + \big(2zx^2y^2 + y\cos(yz)\big)dz$.
(c) On peut décrire l'ensemble de définition et de dérivabilité par $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ y + z > 0,\ x \neq \frac{(2k+1)\pi+y}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$. Dans cette partie d'espace, on a $df = \frac{3}{\cos^2(3x-y)}dx + \left(\frac{-1}{\cos^2(3x-y)} + \log 6 \cdot 6^{y+z}\right) dy + \log 6 \cdot 6^{y+z} dz$.

**Exercice 22.** C'est le moment d'utiliser le théorème de différentiation des fonctions composées ; on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos x e^{u-2v} + 3x^2 \cdot (-2e^{u-2v}) = (\cos x - 6x^2)e^{u-2v};\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \cdot e^{u-2v} 2y \cdot (-2e^{u-2v}) = -4ye^{u-2v}.
\end{aligned}$$

**Exercice 23.** On se contente de regarder $f$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, le $x$ au dénominateur dans sa définition pouvant poser problème. Puisque $\varphi$ est un fonction dérivable d'une variable (on peut donc noter sa dérivée $\varphi'$), on a par différentiation des fonctions composées :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big) + x\frac{d}{dx}\Big(\frac{y}{x}\Big)\varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big) = \frac{1}{x} f(x,y) - \frac{y}{x}\varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\frac{d}{dy}\Big(\frac{y}{x}\Big)\varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big) = \varphi'\Big(\frac{y}{x}\Big),
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

**Exercice 24.** On a, pour $\alpha > 0$, $\varphi'(\alpha) = -\frac{m}{\alpha^{m+1}} f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) + \frac{1}{\alpha^m}\frac{d}{d\alpha}\big(f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)\big)$. D'après le théorème de dérivations des fonctions composées 2.3.7 du poly, la dérivée en $\alpha$ se développe comme suit :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\alpha}\big(f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)\big) =\\
&\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \cdot \frac{d}{d\alpha}(\alpha x) + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \cdot \frac{d}{d\alpha}(\alpha y) + \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \cdot \frac{d}{d\alpha}(\alpha z),
\end{aligned}$$

ce qui vaut aussi $x\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha x, \alpha y, \alpha z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha x, \alpha y, \alpha z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, ou encore, d'après l'équation d'Euler, $\frac{m}{\alpha} f(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ (l'argument des dérivées partielles est ici $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, et pas $(x,y,z)$). En réutilisant cette expression dans le calcul de $\varphi'$, on voit que $\varphi' = 0$, soit $\varphi$ est constante, ce qui s'écrit encore : pour tout $\alpha > 0$, $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = \alpha^m f(x,y,z)$, et ceci pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$. On dit alors que $f$ *est homogène d'ordre* $m$ ; il suffit donc par exemple de connaître $f$ sur la sphère unité $\{x^2+y^2+z^2=1\}$ pour la connaître dans tout l'espace.

**Exercice 25.** 1. Le plus rapide est d'utiliser la formule du laplacien en coordonnées polaires (*cf.* exercice 29.), en posant pour $r>0$, $\theta\in\mathbb{R}$, $F(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\ln(r^2)=2\ln r$. Il vient alors $(\Delta f)(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(r,\theta)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{2}{r}\right)+0=0$ pour tous $r$, $\theta$, et donc $\Delta f=0$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

2. On peut le faire « à la main », où dans ce cas il faut trouver $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{x^2-(y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$, puis permuter $x$ avec $y$ et $z$ pour avoir respectivement $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. On peut aussi se servir de la formule du laplacien en coordonnées sphériques si on la connaît — si $F(r,\theta,\varphi)=f(r\cos\theta\cos\varphi,r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta)$ alors

$$(\Delta f)(r\cos\theta\cos\varphi,r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\Big)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\Big)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}$$

– et le calcul avec cette formule est immédiat.

**Exercice 26.** Il est clair que les trois fonctions de l'énoncé sont différentiable aux points indiqués ; par conséquent, on peut se servir de leurs dérivées partielles pour les développements demandés.

(a) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$ sur $\mathbb{R}^2$, donc $f(1+h,1+k)=f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)h+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)h+o_0(\|(h,k)\|)=2+2(h+k)+o_0(\|(h,k)\|)$. De même $f(h,2+k)=4+4k+o_0(\|(h,k)\|)$ et $f(a+h,b+k)=a^2+b^2+2(ah+bk)+o_0(\|(h,k)\|)$.

(b) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=2x+3yz$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=3xz-3y^2$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=3xy+1$, d'où $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,-1)=2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0,-1)=-3$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(1,0,-1)=1$, et comme $f(1,0-1)=0$, il vient $f(1+h,k,-1+l)=2h-3k+l+o_0(\|(h,k,l)\|)$.

(c) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\cos x\cos y\tan z$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=-\sin x\sin y\tan z$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\sin x\cos y(1+\tan^2 z)$ sur $\mathbb{R}^2\times\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ (par exemple). Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi,\frac{\pi}{4})=-1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi,\frac{\pi}{4})=0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0,\pi,\frac{\pi}{4})=0$, tandis que $f(0,\pi,\frac{\pi}{4})=0$, d'où $f(h,\pi+k,\frac{\pi}{4}+l)=-h+o_0(\|(h,k,l)\|)$.

**Exercice 27.** 1. Répondons d'abord à la question sur le théorème de Schwarz (on pourrait le vérifier après-coup, mais il faudrait faire un calcul de plus). La fonction $f$ est un polynôme en $(x,y)$ ; en tant que tel, elle est donc définie et $C^\infty$, donc $C^2$, sur le plan tout entier, et on peut donc appliquer le théorème de symétrie. Un calcul donne $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-6y$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

2. Ce n'est pas demandé, mais en tant que composée de fonctions $C^2$ (la fonction $(x,y,z)\mapsto xy+z$, de classe $C^2$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, et la fonction cos), $f$ est $C^2$ et vérifie donc encore le théorème de symétrie. Les calculs donnent : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=-\cos(x+yz)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)=-z\cos(x+yz)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)=-z^2\cos(xy+z)$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = -\sin(x+yz) - yz\cos(x+yz)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -y^2\cos(x+yz)$ et enfin $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = -y\cos(x+yz)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

**Exercice 28.** *Cet exercice est un peu délicat puisque comme on s'y attend, il se passe quelque chose au point* $(0,0)$ *; on prendra donc soin de traiter pas à pas les différents cas.* Pour $y \neq 0$ fixé, on a $x \mapsto f(x,y)$ $C^1$ (on peut aussi écrire « $f(\cdot,y)$ $C^1$ »), et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a (après calcul) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$, donc en particulier $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$. De plus, si $y = 0$, $f(\cdot,y)$ est $C^1$ (elle est égale à 0 en dehors de $x = 0$, et vaut par définition 0 en 0) et puisqu'elle est constante, on a, pour tout $x$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$, et en particulier $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. On peut résumer ceci en disant que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ et que donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe, et vaut $-1$.

De la même manière, pour $x \neq 0$ fixé, on a $y \mapsto f(x,y)$ $C^1$, et pour tout $y \in \mathbb{R}$ on obtient $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5+xy^4-x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$, d'où $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$. De plus, si $x = 0$, $f(0,\cdot)$ est $C^1$ (égale à 0 en dehors de $y = 0$, valant 0 en 0) et puisqu'elle est constante, pour tout $y$, on a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$, d'où $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. On peut résumer ceci en disant que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe, et vaut 1. Le théorème de symétrie de Schwarz ne s'applique donc pas, et $f$, qui est $C^2$ sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, ne l'est donc pas sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 29.** *A quoi sert cet exercice ? Si l'on considère le résultat, essayez de manipuler le champ électrique créé par une charge ponctuelle avec des coordonnées cartésiennes, et vous serez convaincus de l'utilité de savoir calculer un laplacien en coordonnées cylindriques. Si vous n'accordez aucune valeur aux démonstrations mathématiques et me répondez que la formule est dans les formulaires, et qu'elle est de toutes manières trop alambiquée pour être apprise, je vous dirais alors que si vous savez faire les calculs demandés ici, c'est que vous avez compris ce qu'est la différentiation à plusieurs variables et que vous ne devriez plus avoir de problème avec ce chapitre du cours.*

1. En utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées 2.3.7 ($F$ étant partout deux fois dérivable, puisque $f$ l'est, et que le changement de coordonnées $(r,\theta) \mapsto$

$(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est $C^\infty$), on obtient pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) &= \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta),\\
\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) &= -\, r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta),\\
\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) &= \cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\
&\qquad + \sin\theta\cos\theta \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right),\\
\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta) &= -\, r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r^2\sin^2\theta \frac{\partial f}{\partial^2 x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\
&\qquad - r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r^2\cos^2\theta \frac{\partial f}{\partial^2 x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\\
&\qquad - r^2\sin\theta\cos\theta \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right),
\end{aligned}$$

où, comme je l'ai souligné pendant la séance de Te, on doit faire la différence entre $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, puisque l'on ne sait pas si $f$ est $C^2$. Mais ceci ne change rien à la suite.

2. On a, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, $(\Delta f)(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta)$, ou encore $(\Delta f)(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right)(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r,\theta)$.

**Exercice 30.** On pose, pour $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^5 + 3xy - y^6 - 1$, de sorte que l'équation $x^5 + 3xy - y^6 = 1$ $(*)$ s'écrive $f(x,y) = 0$ et que l'on ait $f(1,0) = 0$. Pour appliquer le théorème des fonctions implicites tel qu'il est écrit en 2.4.1 dans le poly, il faut donc voir que $f$ est $C^1$, ce qui est immédiat puisque $f$ est un polynôme en $x, y$ (et en tant que tel est même $C^\infty$), et que la dérivée partielle de $f$ selon $y$ en $(1,0)$ est non nulle. Or pour tout $(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 6y^5$, ce qui en $(1,0)$ vaut 3. Le théorème nous dit alors qu'il existe une fonction $\varphi$ définie et $C^1$ sur un voisinage de 1 (disons $I = ]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[, \varepsilon > 0$) valant 0 en $x = 1$ et telle que pour tout $x \in I$ l'on ait $f(x, \varphi(x)) = 0$. Autrement dit, $(1,0)$ est solution de $(*)$, et grâce au théorème, on sait que si $x$ reste proche de 1, on peut encore résoudre $(*)$ d'inconnue $y$ puisqu'en effet $(x, \varphi(x))$ est solution, même si en raison du degré 6 en $y$ *on ne sait pas écrire de formule explicite pour* $\varphi$, d'où son nom de *fonction implicite*. On peut dire aussi que localement au voisinage de $(1,0)$, la courbe $(x, \varphi(x))$ est une ligne de niveau de $f$ pour la valeur 0.

En outre, pour $x \in I$, $f(x, \varphi(x)) = 0$, ce qui en dérivant (par rapport à $x$, mais c'est la seule variable qu'il reste) nous donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) = 0 \quad (**)$$

soit en $x = 1$, puisque $\varphi(1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + \varphi'(1)\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$. Tandis que $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 3$, un calcul direct donne $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 5$, donc $\varphi'(1) = -\frac{5}{3}$. Un raffinement [1] du théorème dit encore que $\varphi$ hérite de la régularité de $f$ et par conséquent est (au moins) $C^2$ ; on peut donc dériver la relation $(**)$ (noter au passage l'utilisation du théorème de symétrie de Schwarz) pour obtenir :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, \varphi(x)) + 2\varphi'(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, \varphi(x)) + \varphi''(x)\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, \varphi(x)) = 0$$

soit $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) + 2\varphi'(1)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) + \varphi''(1)\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) + \varphi'(1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 0$. Or, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 20$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 0$ et $\varphi'(1) = -\frac{5}{3}$ et il vient donc $\varphi''(1) = -\frac{55}{9}$. En itérant cette technique, on pourrait aussi bien calculer de proche en proche toutes les dérivées successives de $\varphi$ en 1.

**Exercice 31.** *Cet exercice et le suivant sont semblables à l'exercice 30 ; je serai donc assez bref.* Il s'agit ici d'utiliser le théorème des fontioncs implicites pour la fonction $C^1$

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & xy + yz + xz + 2x + 2y - z \end{array}$$

(on a bien $F(0,0,0) = 0$) par rapport à la troisième variable ; on calcule $\frac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = -1 \neq 0$. Le théorème nous donne donc une fonction $f : U \to V$ de classe $C^1$ avec $U$ (*resp.* $V$) un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ (*resp.* de 0 dans $\mathbb{R}$) telle que l'équation $F(x,y,z) = 0$ avec $(x,y,z) \in U \times V$ soit équivalente à $z = f(f,y)$ ; en particulier, $f(0,0) = 0$.

Pour l'équation du plan tangent au graphe de $f$ en $(0,0)$, on calcule ses dérivées partielles en ce point ; on dérive pour cela la relation

$$F\big(x, y, f(x,y)\big) = 0$$

sur $U$, par rapport à $x$, ce qui donne en $\frac{\partial F}{\partial x}\big(x,y,f(x,y)\big) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial F}{\partial z}\big(x,y,f(x,y)\big) = 0$, et par rapport à $y$, d'où : $\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,y,f(x,y)\big) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial F}{\partial z}\big(x,y,f(x,y)\big) = 0$. On fait ensuite $(x,y) = (0,0)$, pour avoir $2 - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $2 - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, soit $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2$. L'équation du plan tangent au graphe de $f$ (graphe qui n'est autre, au voisinage de $(0,0,0)$, que la surface d'équation $F(x,y,z) = 0$), est donc $2x + 2y - z = 0$.

**Exercice 32.** L'énoncé est assez vague, puisqu'il ne spécifie pas quelle variable on veut exprimer implicitement en fonction de l'autre. Il s'agit donc en toute rigueur qu'une des deux dérivées partielles de $F$ en $(2,1)$ est non-nulle. Or $\frac{\partial F}{\partial x}(2,1) = 2$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(2,1) = -2$ : on peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites de deux manières différentes, et obtenir une fonction $\varphi$ (*resp.* $\psi$) définie d'un voisinage de 2 dans un voisinage de 1

1. Quitte à réduire $I$, on peut supposer par continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ que pour tout $x \in I$ on a $\frac{\partial f}{\partial y}\big(x, \varphi(x)\big)$ non nul, et l'on peut alors écrire pour ces $x$ d'après $(**)$ $\varphi'(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}\big(x,\varphi(x)\big) \big/ \frac{\partial f}{\partial y}\big(x,\varphi(x)\big)$ ; comme le membre de droite est $C^1$, celui de gauche l'est aussi, donc $\varphi$ est $C^2$ — le membre de droite devient alors $C^2$, donc $\varphi$ est $C^3$, et ainsi de suite.

(*resp.* définie d'un voisinage de 1 dans un voisinage de 2) et $C^2$ (*cf.* exercice 30 pour la régularité améliorée) telle qu'au voisinage de $(2,1)$, $F(x,y) = F(2,1) = 0$ équivale à $y = \varphi(x)$ (*resp.* $x = \psi(y)$) — exercice : $\psi = \varphi^{-1}$ là où ceci a un sens. En particulier $\varphi(2) = 1$ (*resp.* $\psi(1) = 2$).

On considère désormais la fonction $\varphi$ ; pour tout $x$ au voisinage de 2, on a

$$x^2 + \varphi(x)^4 - 3x\varphi(x) + x - 1 = 0.$$

Dérivons successivement cette relation deux fois ; on obtient au voisinage de 2 :

$$\begin{gathered} 2x + 4\varphi(x)^3\varphi'(x) - 3\varphi(x) - 3x\varphi'(x) + 1 = 0 \\ \text{et } 2 + 12\varphi(x)^2\varphi'(x)^2 + 4\varphi(x)^3\varphi''(x) - 6\varphi'(x) - 3x\varphi''(x) = 0. \end{gathered}$$

On fait $x = 2$ dans la première équation, ce qui donne $4 + 4\varphi'(2) - 3 - 6\varphi'(2) + 1 = 0$, soit $\varphi'(2) = 1$. On réinjecte dans la deuxième équation pour aboutir à $2 + 12 + 4\varphi''(2) - 6 - 6\varphi''(2) = 0$, soit $\varphi''(2) = 4$.

En tant que fonction $C^2$ au voisinage de 2, $\varphi$ admet pour développement limité $\varphi(x) = \varphi(2) + \varphi'(2)(x-2) + \varphi''(2)\frac{(x-2)^2}{2} + o_2\big((x-2)^2\big)$, soit $\varphi(x) = 1 + (x-2) + 2(x-2)^2 + o_2\big((x-2)^2\big)$.