LM 256 - Feuille 3 - Exercices complémentaires

Exercice 1. On va calculer les intégrales multiples, comme dans le cas d'intégrales simples, à cette différence près que l'on va intégrer successivement ce que l'on obtient en intégrant les premières fois, et que l'on peut selon les cas *séparer* les variables. Concrètement :

- $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^y x^2 dx = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^y dy = \int_0^1 \frac{y^3}{3}\, dy = \left[\frac{x^4}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12};$
- $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^y y^2 dx = \int_0^1 y^2 dy \int_0^y dx = \int_0^1 y^3 dy = \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4};$
- $$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_0^x -\sin(x^2) dy &= \int_0^1 -\sin(x^2) dx \int_0^x dy = \int_0^1 -x\sin(x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_0^1 = \frac{1-\cos 1}{2};\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_0^1 dx \int_{1-x}^{1+x} (2x+3y^2) dy &= \int_0^1 \left[2xy + y^3\right]_{1-x}^{1+x} dx \\ &= \int_0^1 \left(2x(1+x) + (1+x)^3 - 2x(1-x) - (1-x)^3\right) dx \\ &= \int_0^1 (2x^3 + 4x^2 + 6x) dx \\ &= \left[\frac{x^4}{2} + \frac{4x^2}{3} + 3x^2\right]_0^1 = \frac{29}{6};\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y 2xyz dx &= \int_0^1 z dz \int_0^z y dy \int_0^y 2x dx = \int_0^1 z dz \int_0^z y^3 dy \\ &= \int_0^1 \frac{z^5}{4} dz = \left[\frac{z^6}{24}\right]_0^1 = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

$$\bullet \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_0^{x+y} 2xydz = \int_0^1 2xdx \int_x^{2x} ydy \int_0^{x+y} dz$$
$$= \int_0^1 2xdx \int_x^{2x} y(x+y)dy$$
$$= \int_0^1 2x\Big[\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}\Big]_x^{2x} dx = \int_0^1 \frac{23x^4}{3} dx$$
$$= \left[\frac{23x^5}{15}\right]_0^1 = \frac{23}{15};$$

$$\bullet \int_0^\pi dy \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} 2z\sin y dx = 2\int_0^\pi \sin y dy \int_0^2 zdz \int_0^{\sqrt{4-z^2}} dx$$
$$= 2\int_0^\pi \sin y dy \int_0^2 z\sqrt{4-z^2}dz$$
$$= 2\int_0^\pi \sin y \Big[\frac{-1}{3}(4-z^2)^{3/2}\Big]_0^2 dy = 2\int_0^1 \frac{8}{3}\sin y dy$$
$$= \frac{16}{3}[-\cos y]_0^\pi = \frac{32}{3};$$

$$\bullet \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^x -yzdz = -\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} y\frac{x^2}{2}dy = \int_0^3 \frac{x^2}{2}\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{9-x^2}} dx$$
$$= \int_0^3 \Big(\frac{9x^2 - x^4}{4}\Big)dx = \left[\frac{9x^3}{12} - \frac{x^5}{20}\right]_0^3$$
$$= \frac{81}{10}.$$

Exercice 2. *Note : le théorème de Fubini nous dit basiquement, lorsque l'on travaille avec l'intégrale de Riemann, que les intégrales*

$$\int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \qquad \text{et} \qquad \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$$

sont égales lorsque f est continue sur $D := \{(x,y), x \in [a,b], y \in [c(x), d(x)]\} = \{(x,y), y \in [c,d], x \in [a(y), b(y)]\}$, et que l'on peut donc poser $\iint_D f(x,y)dxdy$ comme étant égale à l'une ou l'autre de ces intégrales, et l'on choisit alors l'un ou l'autre de ces calculs en fonction de la simplicité qu'il présente. En théorie de la mesure, on donne (sous des conditions plus faibles que la continuité, et sur des domaines moins restrictifs) une définition de $\iint_D f(x,y)dxdy$ indépendante des deux premières intégrales, et le théorème de Fubini dit alors que ces différentes notions sont équivalentes.

En appliquant cette note préliminaire (après avoir trouvé les cas échéant une description adéquate du domaine D d'intégration), on va calculer les différentes intégrales proposées, en remarquant avant de commencer que toutes les fonctions à intégrer sont continues sur les domaines considérés.

- $$\iint_D 2xy\ dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx$$
$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$
- $$\iint_D (x+2y) dxdy = \int_1^3 dx \int_{1+x}^{2x} (x+2y) dy = \int_0^1 \left[xy + y^2\right]_{1+x}^{2x} dx$$
$$= \int_1^3 (4x^2 - 3x - 1)\ dx = \left[x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x\right]_1^3 = 12.$$
- $$\iint_D e^{x/y} dxdy = \int_1^2 dy \int_y^{2y^3} e^{x/y} dx = \int_1^2 y \left[ye^{x/y}\right]_y^{2y^3} dy$$
$$= \int_1^2 y \left(e^{2y^2} - e\right) dy = \left[\frac{1}{4}e^{2y^2} - ey\right]_1^2 = \frac{1}{4}(e^4 - e^2) - e.$$
- $$\iint_D \frac{2}{x} dxdy = \int_1^e dy \int_{y^2}^{y^4} \frac{2}{x} dx = \int_1^e 2[\log x]_{y^2}^{y^4} dy$$
$$= \int_1^e 4 \log y\ dy = 4[y \log y - y]_1^e = 4.$$
- $$\iint_D x \cos y\ \ dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2} x \cos y dy = \int_0^2 [x \sin y]_0^{x^2} dx$$
$$= \int_0^2 x \sin x^2 dx = \left[-\frac{1}{2} \cos x^2\right]_0^2 = \frac{1 - \cos 4}{2} = \sin^2 2.$$
- $$\iint_D 2xy\ dxdy = \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{2}(1 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}.$$
- $$\iint_D ye^{2x}\ dxdy = \int_0^2 y dx \int_{2y}^{6-y} e^{2x} dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{2y}^{6-y} dy$$
$$= \int_0^2 \frac{y}{2} \left(e^{12-y} - e^{4y}\right) dy$$
$$= \left[\frac{-1}{2}(y+1)e^{12-y} - \frac{1}{8}\left(y - \frac{1}{4}\right) e^{4y}\right]_0^2 = \frac{1}{2}e^{12} - \frac{55}{32}e^8 - \frac{1}{32}.$$

- $$\iint_D xy\ dxdy = \int_0^2 xdx \int_0^{2-x} ydy = \int_0^2 \frac{1}{2}x(2-x)^2dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{8} - \frac{2x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \frac{34}{3}.$$

- $$\iint_D (x+2y)\ dxdy = \int_0^2 dy \int_y^{4-y} (x+2y)dx = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + 2xy\right]_y^{4-y} dy$$
$$= \int_0^2 \left(-4y^2 + 4y + 8\right) dy = \left[-\frac{4y^3}{3} + 2y^2 + 8y\right]_0^2 = \frac{40}{3}.$$

- $$\iint_D xy\ dxdy = \int_0^2 xdx \int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} ydy = \frac{9}{8}\int_0^2 x(4-x^2)dx$$
$$= \frac{9}{8}\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 6.$$

- $$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_1^4 dx \int_1^{4-x} \frac{dy}{(x+y)^2} = \int_1^4 \left[-\frac{1}{(x+y)}\right]_1^{4-x} dx$$
$$= \int_1^4 \left(\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{4}\right) dx = \left[\log(1+x) - \frac{x}{4}\right]_1^4$$
$$= \log\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{4}.$$

- $$\iint_D e^{2x+2y}\ dxdy = \int_0^1 e^{2x}dx \int_{-x}^{x} e^{2y}dy = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\left[e^{2y}\right]_{-x}^{x} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (e^{4x} - 1)dx = \left[\frac{e^{4x}}{8} - x\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^4 - 9\right).$$

Exercice 3. a) Notons V_a le domaine d'espace dont on doit calculer le volume, *i.e.*

$$V_a = \{(x,y,z)|\, f(x,y) \leq z \leq 4\},$$

où $f(x,y) = x^2 + y^2$ pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, et $f(x,y) \leq 4$ équivaut donc à : (x,y) est dans le disque D du plan Oxy, centré en l'origine et de rayon 2. Autrement dit, V_a est le domaine de l'espace situé au-dessus de ce disque, entre le paraboloïde (d'équation) $z = x^2 + y^2$ et le plan $z = 4$. On a donc :

$$\mathrm{Vol}(V_a) = \int_{(x,y)\in D} (4 - f(x,y))\, dxdy$$

(noter l'analogie avec le calcul de l'aire d'un domaine du plan situé entre les graphes de deux fonctions d'une variable). En écrivant $D = \{(x,y)|\, x \in [-2,2], |y| \leq \sqrt{4-x^2}\}$, on a par Fubini :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(V_a) &= \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(4-(x^2+y^2)\right) dy \\ &= \int_{-2}^{2} \left[(4-x^2) - \frac{y^3}{3}\right]_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \frac{4}{3} \int_{-2}^{2} (4-x^2)^{3/2}\, dx\end{aligned}$$

(c'est dans ce calcul que j'avais fait une faute ; j'avais mis un + devant le y^3). Cette dernière intégrale est un peu délicate à calculer.

Le changement de variable $x = 2\sin\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donne

$$\mathrm{Vol}(V_a) = \frac{4}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2\theta)^{3/2} 2\cos\theta\, d\theta = \frac{64}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta.$$

Il faut ensuite linéariser le $\cos^4$: $\cos^4\theta = \frac{1}{8}\cos(4\theta) + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{3}{8}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit facilement que $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{8}$, et donc : $\mathrm{Vol}(V_a) = 8\pi$.

On pouvait adopter un autre point de vue, et décrire V_a par : $\{(x,y,z) |\, x^2+y^2 \leq z \leq 4\}$, sans passer par le point de vue « graphe de fonction ».

Alors $\mathrm{Vol}(V_a) = \iiint_{V_a} dxdydz = \int_0^4 dz \iint_{\{x^2+y^2\leq z\}} dxdy$ par Fubini. Or pour tout $z \geq 0$, $\iint_{\{x^2+y^2\leq z\}} dxdy$ n'est autre que l'aire d'un disque de rayon $\sqrt{z}$, et vaut donc πz. Ainsi $\mathrm{Vol}(V_a) = \pi \int_0^4 zdz = 8\pi$. Je vous laisse voir laquelle des deux méthodes est la plus efficace...

b) Le domaine, disons V_b, dont on doit calculer l'aire est la réunion, disjointe au disque $\Delta := \{(x,y,z) |\, z = 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$ (de volume nul) près, de deux domaines similaires à V_a ; on notera $\cup_\Delta$. Plus précisément, si h est la transformation de l'espace $(x,y,z) \mapsto \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y, \frac{1}{4}z\right)$ (qui multiplie donc les volumes par $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$), on a $V_b = \left(h(V_a)+(0,0,-1)\right) \cup_\Delta \left(-h(V_a)+(0,0,1)\right)$. On en déduit que $\mathrm{Vol}(V_b) = 2\cdot\frac{1}{16}\mathrm{Vol}(V_a) = \pi$.

En procédant à un calcul direct, on avait :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(V_b) &= \int_{-1}^{1} dz \iint_{x^2+y^2\leq\min(z+1,1-z)} dxdy \\ &= \int_{-1}^{0} dz \iint_{x^2+y^2\leq z+1} dxdy + \int_{0}^{1} dz \iint_{x^2+y^2\leq 1-z} dxdy \\ &= \pi\Big(\int_{-1}^{0} (z+1)dz + \int_0^1 (1-z)dz\Big) = \pi.\end{aligned}$$

c) On procède comme en b) pour calculer le volume du domaine considéré, que l'on note V_c ; si $k : (x,y,z) \mapsto (x, \frac{1}{2}y, z)$ (qui multiplie les volumes par $\frac{1}{2}$), on a $V_c = k(V_a)$, donc $\mathrm{Vol}(V_c) = \frac{1}{2}\mathrm{Vol}(V_a) = 4\pi$. Exercice : le démontrer par un calcul direct.

Exercice 4. a) Le domaine V considéré est délimité par un domaine D du plan Oxy, $D = \{x^2 \leq y \leq \sqrt{x},\, (x,y) \in [0,1]^2\}$, et le graphe d'une fonction (continue) au-dessus de D, $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Ainsi $\mathrm{Vol}(V) = \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$. Par Fubini, il vient $\mathrm{Vol}(V) = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y^2) dxdy = \int_0^1 \left(x^{3/2} - x^4 + \frac{1}{3}(x^{3/2-} x^6)\right) = \frac{2}{7}$.

b) C'est la même chose, avec $D = \left\{y^2 - y \leq x \leq y,\, (x,y) \in \left[\frac{1}{4}, 2\right] \times [0,2]\right\}$ et $(x,y) \mapsto 3x^2 + y^2$. Ainsi $\mathrm{Vol}(V) = \int_0^2 dy \int_{y^2-y}^{y} (3x^2+y^2) dx = \int_0^2 (4y^3 - 4y^4 + 3y^5 - y^6) dy = \frac{144}{35}$.

c) Encore pareil, avec $D = \left\{1 \leq x \leq 7 - 3y,\, (x,y) \in [1,4] \times [1,2]\right\}$ et $(x,y) \mapsto 2xy$. On a donc $\mathrm{Vol}(V) = \int_1^2 dy \int_1^{7-3y} 2xy\, dx = \int_1^2 (48y - 42y^2 + 9y^3) dy = \frac{49}{4}$.

d) On prend plutôt le volume compris entre le paraboloïde $z = x^2 + y^2 + 1$ et les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 4$. On peut décrire le domaine comme étant compris entre les graphes de $x^2 + y^2 + 1$ et $4 - (x + y)$, au-dessus du domaine du plan horizontal $D = \{x^2 + y^2 + x + y \leq 3,\, x \geq 0,\, y \geq 0\}$, soit la partie du disque de centre $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ comprise dans le premier quadrant. Le calcul du volume est certainement faisable, mais je ne doute pas qu'il soit fort compliqué.

e) Donnons de V la description suivante : $V = \{0 \leq z \leq 3,\, 0 \leq y \leq \sqrt{9 - z^2},\, 0 \leq x \leq 2y\}$. Ainsi par Fubini

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V) &= \int_0^3 dz \int_0^{\sqrt{9-z^2}} dy \int_0^{2y} dx \\
&= \int_0^3 dz \int_0^{\sqrt{9-z^2}} 2ydy \\
&= \int_0^3 (9 - z^2) dz \\
&= 18.
\end{aligned}$$

f) On peut donner de ce domaine, disons V, la description suivante : $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y \in [-2,2], x \text{ et } z \in [-\sqrt{4-y^2}, \sqrt{4-y^2}]\}$. Ce domaine est donc bien borné, et Fubini nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V) = \iiint_D 1\ dxdydz &= \int_{-2}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dz \\
&= \int_{-2}^{2} dy \left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \right) \cdot \left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dz \right) \\
&= \int_{-2}^{2} \left(2\sqrt{4-y^2} \right)^2 dy = 8 \int_0^2 \left(4 - y^2 \right) dy \\
&= 8 \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 = \frac{128}{3} \approx 42,7,
\end{aligned}$$

où l'on est passé de la première à la deuxième lignes en remarquant que les variables étaient séparées.

Exercice 5. On rappelle que dans le cas homogène, pour une surface S (*resp.* un volume V), le centre de gravité C_S (*resp.* C_V) est le point dont l'abscisse est la moyenne des abscisses des points de S (resp. de V), et de même pour l'ordonnée et la cote. Ce qui se formalise comme suit :

$$x_{C_S} = \frac{1}{\mathrm{Aire}(S)} \int_S x\ dS, \quad y_{C_S} = \frac{1}{\mathrm{Aire}(S)} \int_S y\ dS$$

$$\left(\text{resp. } x_{C_V} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(V)} \int_V x\ dV,\ y_{C_V} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(V)} \int_V y\ dV,\ z_{C_V} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(S)} \int_V z\ dV \right).$$

Dans notre cas, on travaille dans le plan ; il n'y a donc pas de cote à calculer. De plus, par symétrie par rapport à l'axe Oy, on a $x_{C_S} = 0$. Il ne reste donc à calculer que y_{C_S}, et il faut pour cela commencer par $\mathrm{Aire}(S) = \int_S dS = \int_S dxdy$. Par Fubini, puisque $S = \{(x,y), x \in [-1,1], 2x^2 \leq y \leq 1\}$, on écrit $\int_S dxdy = \int_{-1}^1 dx \int_{2x^2}^2 dy = \int_{-1}^1 2(1-x^2)dx = 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}$.

De même, $\int_S y\ dxdy = \int_{-1}^1 dx \int_{2x^2}^2 y\ dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(4 - 4x^4)dx = 2\left[x - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^1 = \frac{16}{5}$. Donc $y_{C_S} = \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{5} = \frac{6}{5}$. Ce résultat conforte bien l'impression que donne un dessin de la situation, puisque l'on y voit qu'il y a un peu plus de masse au dessus de la droite d'équation $\{y = 1\}$, et que donc le centre de masse doit avoir une ordonné légèrement plus grande que 1.

Exercice 6. Rappel de la formule de changement de variables (en deux dimensions) : soit $\varphi : A \to D$ un C^1-difféomorphisme, *i.e.* une bijection C^1 dont la réciproque est C^1 (à un sous-ensemble d'aire nulle près). Notons, pour $(u,v) \in A$, $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$. Soit

$$\mathrm{Jac}_\varphi := \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Alors Jac_φ ne s'annule pas (sauf éventuellement sur le sous-ensemble de A d'aire nulle évoqué ci-dessus), et l'on a la *formule de changement de variables* pour toute fonction f continue sur D :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_A f\circ\varphi(u,v)|\,\mathrm{Jac}_\varphi\,|dudv,$$

ou dans l'autre sens :

$$\iint_D g(u,v)dudv = \iint_A g\circ\varphi^{-1}(x,y)|\,\mathrm{Jac}_\varphi\,|^{-1}dxdy,$$

pour toute fonction g continue sur A.

On peut aussi remarquer que $\mathrm{Jac}_\varphi^{-1} = \mathrm{Jac}_{\varphi^{-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$. Le formalisme est le même en dimension ≥ 3. Cette précision faite, passons aux calculs demandés.

a) Puisque φ est linéaire, c'est un difféomorphisme *ssi* c'est un isomorphisme linéaire, ce qui est immédiat, puisque l'on peut écrire $u = x - y$, $v = 2x + y$. La matrice jacobienne du changement de variable φ, $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$, qui n'est autre que la matrice de φ comme morphisme linéaire, vaut $\begin{pmatrix} \frac13 & \frac13 \\ \frac13 & -\frac23 \end{pmatrix}$, et son déterminant vaut $\frac13$ en valeur absolue. Par ailleurs, en remplaçant x et y dans les équations des droites délimitant D par leurs expressions en u, v (c'est-à-dire en utilisant le « langage des variables u et v »), on trouve que A est délimité par les droites d'équation $\frac13(v-2u) = \frac13(u+v) - 2$, soit $u = 2$, $\frac13(v-2u) = \frac13(u+v)$, soit $u = 0$, $\frac13(v-2u) = -\frac23(u+v)$, soit $v = 0$, et $\frac13(v-2u)3-\frac23(u+v)$, soit $v = 3$. L'utilité du changement de variables réside donc ici dans la simplicité de cette description. Finalement, $\int_D(3x+y)dxdy = \int_A \frac13(u-4v)\cdot\frac13 dudv = \frac19\int_0^2 du\int_0^3(u-4v)dv = \frac19\int_0^2[uv-2v^2]_0^3du = \frac19\int_0^2(3u-18)du = \frac19\left[\frac32u^2-18u\right]_0^2 = -\frac{10}{3}$.

b) C'est exactement la même chose, excepté qu'ici le jacobien $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ vaut $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13$ (donc au passage, on a bien un isomorphisme, donc un C^1-difféomorphisme), et le domaine A est le carré $[0,1]\times[0,1]$. Ainsi, $\int_D(2x+y)dxdy = \int_A(7u+4v)\cdot 13dudv = 13\int_0^1 du\int_0^1(7u+4v)dv = 13\int_0^1[7uv+2v^2]_0^1du = 13\int_0^1(7u+2)du = 13\left[\frac72u^2+2u\right]_0^1 = \frac{143}{2}$.

c) Pour voir que l'on a bien une bijection d'un domaine A dans D, on inverse d'abord les formules (disons de $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{+*}$ dans lui-même) ; elles donnent $u = xy$, $v = y$, et (u,v) dans un domaine A délimité par les courbes d'équation $u = v^2$, $u = 3v^2$, $u = 1$ et $u = 3$ avec u et v positifs. Remarquons que sur un tel domaine, on a toujours $v \geq \sqrt{u/3} \geq 1/\sqrt3$, il n'y a aucun problème dans la définition de $\frac{u}{v}$. Finalement, on a une bijection $(u,v)\mapsto(\frac{u}{v},v)$ de A dans D qui est clairement C^1, dont la réciproque $(x,y)\mapsto(xy,y)$ est elle aussi C^1, de D dans A. Reste le calcul du jacobien, et $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac1v$. Il vient donc :

$\iint_D xydxdy = \iint_A u \cdot \frac{1}{v} dudv = \int_1^3 udu \int_{\sqrt{u/3}}^{\sqrt{u}} \frac{1}{v} dv = \int_1^3 u\,[\ln v]_{\sqrt{u/3}}^{\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{2}\ln 3 \int_1^3 \frac{1}{3} u\, du = \frac{1}{2}\ln 3 \left[\frac{1}{2}u^2\right]_1^3 = 2\ln 3.$

Exercice 7. Il n'y a pas besoin de changement de variables pour voir que la première intégrale est nulle, par antisymétrie par rapport à l'axe Oy. On peut néanmoins le voir concrètement en faisant le changement de variables sur le disque consistant à prendre l'opposée de la première coordonnée et à ne pas changer la seconde.

La seconde intégrale, on fait le changement de variables

$$\begin{aligned} \varphi : [0,3] \times [0, \tfrac{\pi}{4}] &\longrightarrow D \\ (r,\theta) \qquad &\longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{aligned}$$

(coordonnées polaires). Le jacobien vaut r (à retenir, mais faites le calcul au moins une fois), et l'intégrale se calcule donc comme suit (avec Fubini, que nous ne mentionnerons plus dans la suite) :

$$\iint_D ydxdy = \iint_{[0,3]\times[0,\pi/4]} r\sin\theta r drd\theta = (\int_0^3 r^2 dr)(\int_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta) = 9(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

On a, pour la troisième intégrale, la description $V = \{r \in [0,2],\ -2\sqrt{16-r^2} \leq z \leq 2\sqrt{16-r^2}\}$ en coordonnées polaires. Il vient donc (après intégration selon θ) $\mathrm{Vol}(V) = 2\pi \int_0^2 rdr \int_{-2\sqrt{16-r^2}}^{2\sqrt{16-r^2}} dz = 4\pi \int_0^2 2r\sqrt{16-r^2}\, dr = \frac{64\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3}) \approx 188.$

On passe encore en polaires pour la quatrième intégrale. On va cette fois prendre r entre 2 et 4, et θ dans tout l'intervalle $[0, frm{-}e\pi]$. Le jacobien du changement de variables vaut encore r, et $x^2 + y^2$ devient r^2. Ainsi,

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_{[2,4]\times[0,2\pi]} \frac{rdrd\theta}{r} = \Big(\int_2^4 dr\Big)\Big(\int_0^{2\pi} d\theta\Big) = 12\pi.$$

Pour la cinquième intégrale, on passe à nouveau en polaires, et l'on prend $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. En remarquant que x^2+y^2 devient r^2, que $dxdy$ devient $rdrd\theta$ et en utilisant Fubini, il vient :

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} =& \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{rdrd\theta}{1+r^2} = \Big(\int_0^{2\pi} d\theta\Big)\Big(\int_0^1 \frac{dr}{1+r^2}\Big) \\ =& 2\pi\Big[\frac{1}{2}\ln\left(1+r^2\right)\Big] = \pi \ln 2. \end{aligned}$$

Pour la sixième intégrale, le x^2+y^2 au dénominateur nous incite à passer en polaires. On va prendre $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ pour rester entre l'axe des abscisses et la première bissectrice. Toutefois, il faut faire un peu attention pour le choix de r, qui va dépendre de θ. En effet, on doit avoir $x \leq 2$, soit $r\cos\theta \leq 2$ pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ (et donc $\cos\theta \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$), soit encore $r \in [0, \frac{2}{\cos\theta}]$.

On obtient donc après changement de variables (on admettra que le x^2+y^2 au dénominateur, rendant singulier l'intégrande en l'origine, ne pose en fait pas de problèmes) :

$$\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\sin\theta\,d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} \frac{r^2}{r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin\theta\,d\theta = 2-\sqrt{2}.$$

Pour la septième intégrale, on a envie de passer en polaires, mais ceci risque de poser problème si $a \neq b$ (on n'obtient pas les simplifications habituelles). On fait donc le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \varphi : [1,4]\times[0,2\pi] &\longrightarrow D \\ (r,\theta) \quad &\longmapsto (ar\cos\theta, br\sin\theta) \end{aligned}$$

dont le jacobien vaut abr. Notons aussi l'égalité $\frac{(ar\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(br\sin\theta)^2}{b^2}=r^2$.

Ainsi, l'intégrale à calculer vaut (en admettant que l'on n'a pas de problème sur la petite ellipse) :

$$\iint_{[1,4]\times[0,2\pi]} \frac{abrdrd\theta}{\sqrt{r^2-1}} = 2\pi ab\Big[\frac{1}{2}(r^2-1)^{1/2}\Big]_1^4 = \pi(\sqrt{3}-1)ab.$$

Pour la huitième intégrale enfin, on peut la calculer sans changement de variables. On peut toutefois chercher à simplifier la fonction à intégrer, *via* le changement

$$(x(u,v),y(u,v)) = (u, v-u),$$

qui est clairement C^1 de réciproque C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, et de jacobien 1. On a facilement que l'ensemble A sur lequel on doit se restreindre est le triangle $\{0 \le u \le 3, u \le v \le 3\}$. Ainsi,

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \iint_A v\,dvdu = \int_0^3 du \int_u^3 v\,dv = \int_0^3 \frac{9-u^2}{2}du = 9,$$

en utilisant Fubini à la deuxième égalité.

Exercice 8. a) En coordonnées cylindriques, *i.e.* avec $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, z inchangé, le domaine V dont on doit calculer le volume est décrit par

$$\{r\in[0,\sqrt{2}], \theta\in[0,2\pi],\ 4\le z\le 10-3r^2\}.$$

Par conséquent (Fubini, et élément de volume égal à $rdrd\theta dz$),

$$\mathrm{Vol}(V) = \int_0^{\sqrt{2}} rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_4^{10-3r^2} dz = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}} (6-3r^2)rdr = 6\pi.$$

b) On procède comme en a). On décrit le domaine V considéré par $\{r\in[0,1], \theta\in[0,2\pi],\ 3r^2\le z\le 4-r^2\}$, d'où

$$\mathrm{Vol}(V) = \int_0^2 rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{3r^2}^{4-r^2} dz = 2\pi\int_0^2 4(1-r^2)rdr = 2\pi.$$

c) En procédant toujours de la même manière, on a la description $V = \{r \in [0,2],\ -2\sqrt{16-r^2} \leq z \leq 2\sqrt{16-r^2}\}$. Il vient donc (après intégration selon θ)

$$\mathrm{Vol}(V) = 2\pi \int_0^2 r dr \int_{-2\sqrt{16-r^2}}^{2\sqrt{16-r^2}} dz = 4\pi \int_0^2 2r\sqrt{16-r^2}\, dr = \Big(\frac{512}{3} - 64\sqrt{3}\Big)\pi \approx 188.$$

Exercice 9. On utilise d'abord Fubini, avec la description suivante : $D = \big\{x \in [-a,a],\ -b(1-x^2/a^2) \leq y \leq b(1-x^2/a^2)\big\}$ (en supposant a et $b > 0$). De cette manière, si I est l'intégrale demandée

$$\begin{aligned} I &= \int_{-a}^{a} dx \int_{-b(1-x^2/a^2)}^{b(1-x^2/a^2)} (y^2 - x^2) dy \\ &= \int_{-a}^{a} \Big[\frac{y^3}{3} - yx^2\Big]_{y=-b(1-x^2/a^2)}^{b(1-x^2/a^2)} dx \\ &= \int_{-a}^{a} \Big[\frac{2b^3}{3}\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)^{3/2} - 2bx^2\Big(1 - \frac{x^2}{a^2}\Big)^{1/2}\Big] dx. \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variables $x = a\cos\psi$, $\psi \in [0,\pi]$ (attention à l'inversion des bornes) ; il vient $I = \int_0^\pi \Big[\frac{2}{3}(b\sin\psi)^3 - 2a^2 b\cos^2\psi\sin\psi\Big] a\sin\psi d\psi$. Comme $\int_0^\pi \sin^4\psi d\psi = \int_0^\pi \sin^4\psi d\psi = \frac{3\pi}{8}$ et $\int_0^\pi \cos^2\psi \sin^2\psi d\psi = \frac{\pi}{8}$, on obtient $\frac{\pi ab}{4}(b^2 - a^2)$.

Une autre méthode, où les calculs sont grandement simplifiés, consiste à effectuer d'abord le changement de variables $x = au$, $y = bv$, $(u,v) \in \Delta$ le disque unité, pour écrire $I = \iint_\Delta (b^2v^2 - a^2u^2) ab du dv$. On passe ensuite en polaire ($dudv$ devient $rdrd\theta$) :

$$\begin{aligned} I =& ab \int r^3 dr \int_0^{2\pi} (b^2\sin^2\theta - a^2\cos^2\theta) d\theta \\ =& \frac{ab}{4}\Big(b^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta - a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta\Big) \\ =& \frac{\pi ab}{4}(b^2 - a^2) \text{ car } \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \pi. \end{aligned}$$

Exercice 10. Rappelons rapidement les règles de calculs de la loi $\wedge$ sur les 1-formes ; si α, β, γ, δ sont des fonctions définies sur un domaine D du plan, alors pour tout (x,y) de ce domaine,

$$\begin{aligned} (\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy)&\wedge(\gamma(x,y)dx + \delta(x,y)dy) \\ &= \alpha(x,y)\gamma(x,y) dx \wedge dx + \alpha(x,y)\delta(x,y) dx \wedge dy \\ &\quad + \beta(x,y)\gamma(x,y) dy \wedge dx + \beta(x,y)\delta(x,y) dy \wedge dy, \end{aligned}$$

soit, comme $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$ et $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$,

$$\begin{aligned} (\alpha(x,y)dx + \beta(x,y)dy)&\wedge(\gamma(x,y)dx + \delta(x,y)dy) \\ &= \big(\alpha(x,y)\delta(x,y) - \beta(x,y)\gamma(x,y)\big) dx \wedge dy \end{aligned}$$

sur le domaine considéré. De sorte que si $\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta$, *i.e.* si l'on multiplie une 1-forme par elle-même avec $\wedge$, on obtient 0, d'où le résultat si en particulier la forme en question est une df avec f une fonction C^1 sur le plan.

Effectuons les calculs demandés. Pour le premier, on obtient

$$(x^2 + y^2(2x - 1))dx \wedge dy.$$

Pour le second (attention à l'ordre d'écriture !),

$$(1 + e^{x+y})dx \wedge dy.$$

Pour le dernier, on calcule d'abord $d(x^2 + 6xy + y^2) = (2x + 6y)dx + (2y + 6x)dy$ et $d(x^3 + y^3) = 3x^2dx + 3y^2dy$. Le résultat demandé est donc

$$6\big((x + 3y)y^2 - (y + 3x)x^2\big)dx \wedge dy.$$

Exercice 11. Remarquons que pour toutes les intégrales à calculer, nous sommes bien dans les situations comprises par le théorème du cours sur la formule de Green-Riemann (domaines sans trous, bords C^1 par morceaux, intégrandes C^1, *etc.*), ainsi que par le théorème de Fubini, que nous appliquerons pour passer d'intégrales doubles à intégrales simples emboîtées. Cela dit, en appliquant cette formule, et en appelant D les domaines délimités par les courbes considérées, on obtient :

- $$\begin{aligned}\int_{bD} x^2ydx + xy^3dy &= \iint_D \Big(\frac{\partial(xy^3)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y)}{\partial y}\Big)dxdy \\ &= \iint_{[0,2]^2} (y^3 - x^2)dxdy \\ &= 2\Big(\int_0^2 y^3dy - \int_0^2 x^2dx\Big) = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_C (x^2 + y^2)dx + 2xydy &= \iint_D \Big(\frac{\partial(2xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2 + y^2)}{\partial y}\Big)dxdy \\ &= \iint_D (2y - 2y)dxdy \\ &= 0.\end{aligned}$$

- $$\int_C 2xydx + y^5dy = \iint_D \Big(\frac{\partial(y^5)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy)}{\partial y}\Big)dxdy$$
$$= \iint_D 2xdxdy$$
$$= \int_0^2 dx \int_0^{x/2} 2xdy = \int_0^2 x^2dx = \frac{8}{3}.$$
- $$\int_C x^2ydx - xy^5dy = \iint_D \Big(\frac{\partial(-xy^5)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y)}{\partial y}\Big)dxdy = \iint_{[-1,1]^2}(-y^5 - x^2)dxdy$$
$$= -2\Big(\int_{-1}^1 y^5dy + \int_{-1}^1 x^2dx\Big) = -\frac{4}{3}.$$
- $$\int_C (3y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos^2 y)dy = \iint_D \Big(\frac{\partial(2x + \cos^2 y)}{\partial x} - \frac{\partial(3y + e^{\sqrt{x}})}{\partial y}\Big)dxdy$$
$$= \iint_D (2-3)dxdy = -\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy$$
$$= -\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = -\frac{1}{3}.$$
- $$\int_C (y^2 - \arctan x)dx - (3x + \sin y)dy$$
$$= \iint_D \Big(-\frac{\partial(3x + \sin y)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2 - \arctan x)}{\partial y}\Big)dxdy$$
$$= \iint_D (-3 - 2y)dxdy = -\int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 (3 + 2y)dy$$
$$= -\int_{-2}^2 (12 - 3x^2 + 16 - x^4)dx$$
$$= -\Big(112 - 16 - \frac{64}{5}\Big) = -\frac{416}{5}.$$
- $$\int_C x^2dx + 3y^2dy = \iint_D \Big(\frac{\partial(3y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y}\Big)dxdy = 0.$$
- $$\int_C x^2ydx - 6y^2dy = \iint_D \Big(\frac{\partial(-6y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y)}{\partial y}\Big)dxdy$$
$$= -\iint_D x^2dxdy = -\iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} r^2\cos^2\theta rdrd\theta$$
$$= -\Big(\int_0^1 r^3dr\Big)\Big(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\Big) = -\frac{\pi}{4},$$

en linéarisant $\cos^2\theta$ pour calculer $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta$.

Une fois calculé le produit scalaire $\vec{V}\cdot d\vec{r}$ (je pense qu'il y a une faute de frappe et que le d a été oublié), l'intégrale suivante se ramène à :

$$\begin{aligned}\int_C x^3ydx + 2x^4dy &= \iint_D \Big(\frac{\partial(2x^4)}{\partial x} - \frac{\partial(x^3y)}{\partial y}\Big)dxdy \\ &= \iint_D (8x^3 - x^3)dxdy = 7\iint_D x^3dxdy\end{aligned}$$

À ce stade, il est clair que l'intégrale est nulle, puisque la fonction à intégrer est impaire en x, tandis que le domaine d'intégration est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (voir un exemple de ce phénomène dans l'exercice 7, première intégrale).

Continuons, en appliquant cette fois la formule dans l'autre sens :

$$\begin{aligned}\iint_D xydxdy &= \iint_D \frac{\partial(x^2y/2)}{\partial x}dxdy \\ &= \int_{bD} \frac{x^2y}{2}dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 (2-y)^2ydy = \frac{20}{3}\end{aligned}$$

en regardant les composantes de bD où l'on n'a pas identiquement $x = 0$ ou $y = 0$.

Enfin, de la même manière,

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2} &= \iint_D \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{-1}{x+y}\Big)dxdy = \int_{bD}\frac{dx}{x+y} \\ &= \int_1^3 \frac{dx}{x+y} + \int_3^1 \frac{dx}{4} = \log(2) - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 12. 1. Si $D = \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z \leq 4\}$,

$$\begin{aligned}\iiint_D zdxdydz &= \int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy \int_0^{4-x-y} zdz \text{ par Fubini} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^4 dx \int_0^{4-x} (4-x-y)^2dy = \frac{1}{6}\int_0^4 (4-x)^3dx \\ &= \frac{32}{3}.\end{aligned}$$

2. Si $D = \{0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2\pi,\ 0 \leq x \leq z+2\} = \{0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq x \leq z+2\} \times \{0 \leq y \leq 2\pi\}$, par Fubini et séparation des variables,

$$\begin{aligned}\iiint_D zdxdydz &= -\Big(\int_0^{2\pi} ydy\Big)\Big(\int_0^1 zdz \int_0^{z+2} dx\Big) \\ &= -2\pi^2 \int_0^1 z(z+2)dz = -\frac{8\pi^2}{3}.\end{aligned}$$

3. Si $D = \{0 \leq y \leq 1,\, 0 \leq x \leq y,\, 0 \leq z \leq x + y\}$, par Fubini,

$$\begin{aligned}\iiint_D e^x dxdydz =& \int_0^1 dy \int_0^y e^x dx \int_0^{x+y} dz\\ =& \int_0^1 dy \int_0^y (x+y)e^x dx = \int_0^1 \big((2y-1)e^y + 1\big)dy\\ =& 4 - e.\end{aligned}$$

4. Si $D = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ (boule fermée de rayon 2 centrée en l'origine), $\iiint zdxdydz = 0$ par symétrie. Pour $\iiint_D z^2dxdydz$, on utilise les coordonnées sphériques : $x = r\sin\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\varphi$, $r \in [0,2]$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\varphi \in [0,\pi]$. L'élément de volume $dxdydz$ devient $r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$ (à connaître, ou a savoir retrouver). Ainsi, (Fubini, séparation des variables, intégration selon θ) $\iiint_D z^2dxdydz = 2\pi\big(\int_0^2 r^2dr\big)\big(\int_0^\pi \cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi\big) = \frac{32\pi}{9}$.

Pour la dernière intégrale, on se retrouve en développant la parenthèse en intégrande à calculer les quantités $\iiint_D u^2dxdydz$, $u = x,\, y,\, z$, et $\iiint_D uvdxdydz$, $(u,v) = (x,y)$, (x,z) et (y,z). On connait déjà $\iiint_D z^2dxdydz$; un argument de symétrie nous dit en outre que $\iiint_D x^2dxdydz$ et $\iiint_D y^2dxdydz$ ont la même valeur. Enfin, les $\iiint_D uvdxdydz$ sont nulles, encore par symétrie. Ainsi, $\iint_D (x+y-z)^2dxdydz = 3\cdot\frac{32\pi}{9} = \frac{32\pi}{3}$.

Exercice 13. a) Appelons A la région du plan considérée ; $A = \{(x,y) \in [0,2]\times[0,4] \,|\, 0 \leq y \leq x^2\}$. Par Fubini,

$$\begin{aligned}\iiint_D ydxdydz =& \iint_{(x,y)\in A} ydxdy \int_0^{x+2y} dz = \iint_{(x,y)\in A} y(x+2y)dxdy\\ =& \int_0^2 dx \int_0^{x^2} y(x+2y)dy = \int_0^2 \Big(\frac{x^5}{2} + \frac{2x^6}{3}\Big)dx = \frac{5}{28}.\end{aligned}$$

b) D'après la description qui est faite de D, par Fubini,

$$\begin{aligned}\iiint_D zdxdydz =& \iint_{(x,y)\in[0,3]^2} dxdy \int_0^{3-\max(x,y)} zdz\\ =& \frac{1}{2}\iint_{(x,y)\in[0,3]^2} (3-\max(x,y))^2dxdy\\ =& \iint_{(x,y)\in[0,3]^2,x\geq y} (3-x)^2dxdy \quad \text{par symétrie}\\ =& \int_0^3 dx \int_0^x (3-x)^2dy = \int_0^3 x(3-x)^2dx = \frac{127}{4}.\end{aligned}$$

c) On peut voir D comme délimité par les plans $\{x = 0\}$, $\{y = 2\}$, $\{z = 0\}$ et $\{x - y + z = 0\}$ (un rapide dessin n'est pas inutile), de sorte que $D = \{(x,y,z) \in$

$[0,2]^3 |\, y \geq x,\ z \leq y-x\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\iiint_D xzdxdydz &= \int_0^2 dx \int_x^2 dy \int_0^{y-x} xz\, dz \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 dx \int_x^2 dy = \int_0^2 dx \int_x^2 (4y^2 - 2xy - 2x^2)dy \\ &= \int_0^2 \Big(\frac{32}{3} - 4x - 4x^2 + \frac{5}{3}x^3\Big)dx = \frac{104}{9}. \text{ à corriger}\end{aligned}$$

d) Donnons de D la description suivante : $\{(x,y,z) \in [0,1]^3 |\, x^2 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq x\}$. Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}\iiint_D (2x+4y)dxdydz &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (2x+4y)dy \int_0^x dz \\ &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x x(2x+4y)dy = 2\int_0^1 (x^2 + x^3 - 2x^4)dx \\ &= \frac{11}{30}.\end{aligned}$$

e) Comme $D = \{(x,y,z) \in [0,16] \times \Delta(0,2) |\, x \leq 4y^2 + 4z^2\}$, ($\Delta(0,2)$ le disque de centre 0 et de rayon 2 dans le plan Oyz), il vient

$$\begin{aligned}\iiint_D xdxdydz &= \int_0^{16} x\, dx \int_{(y,z)\in\Delta(0,\sqrt{x/4})} dydz \\ &= \int_0^{16} x \cdot \pi \frac{x}{4}\, dx \quad \text{(aire d'un disque)} \\ &= \frac{1024\pi}{3}.\end{aligned}$$

f) On a $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \times \Delta(0,4) |\, y \geq 0,\ 0 \leq x \leq y/4,\ z \geq 0\}$. Ainsi, en notant Δ^+ l'intersection d'un disque Δ avec le premier quadrant dans Oyz,

$$\begin{aligned}\iiint_D zdxdydz &= \int_{(y,z)\in\Delta^+(0,4)} zdydz \int_0^{y/4} dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{(y,z)\in\Delta^+(0,4)} yzdydz \\ &= \frac{1}{4}\int_0^4 r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \quad \text{(passage en coordonnées polaires)} \\ &= \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 14. Le volume V considéré est l'intersection d'une boule centrée en l'origine de rayon 9 avec le premier octant. Par symétrie, si l'on désigne par C son centre de gravité, on a $x_C = y_C = z_C$. On calcule donc z_C, en utilisant les coordonnées sphériques habituelles, restreintes au premier octant (θ, $\varphi \in [0,\pi/2]$) :

$$z_C = \iiint_V z\, dxdydz = \int_0^3 r^2\, dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{9\pi}{2}.$$

On a donc $C = (\frac{9\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{9\pi}{2})$.

Exercice 15. a) Je triche un peu, en disant que l'image du tétraèdre V considéré par $h : (x, y, z) \mapsto (\frac{1}{12}x, \frac{1}{8}y, \frac{1}{4}z)$, qui multiplie les volumes par $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{384}$, est tétraèdre standard de sommets O, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Or ce dernier a pour volume $\frac{1}{6}$; en effet, ce volume est égal à

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2\, dx = \frac{1}{6}.$$

On a donc $\mathrm{Vol}(V) = \frac{384}{6} = 64$.

b) On rapelle qu'une ellipse (dans Oxz) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ (a, $b > 0$) a pour aire πab. Soit V le domaine considéré ; alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V) &= \iint_{\{4x^2+z^2\leq 1\}} dxdz \int_0^{z+1} dy = \iint_{\{4x^2+z^2\leq 1\}} (z+1)\, dxdz \\
&= \iint_{\{4x^2+z^2\leq 1\}} dxdz \quad \text{car} \quad \iint_{\{4x^2+z^2\leq 1\}} z\, dxdz \text{ par symétrie} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

c) Ici

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(V) &= \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2}^{2} dx \int_0^{2-x} dz = \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2}^{2} (2-x)\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} (2-y^2)^2 dy = \frac{13\sqrt{2}}{30}.
\end{aligned}$$

d) On reprend le calcul de l'exercice 3, c) :

$$\mathrm{Vol}(V) = \int_{(x,y)\in\Delta(0,2)} (8 - 2(x^2+y^2))dxdy = 2\pi \int_0^2 (8-r^2)rdr = \frac{80\pi}{3}.$$

Exercice 16. Le jacobien demandé vaut

$$\begin{vmatrix} 2u & 0 & 0 \\ 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{vmatrix} = 8uvw$$

pour (u, v, w) dans $(\mathbb{R}^+)^3$, et plus particulièrement dans le domaine

$$A = \{(u, v, w) |\, u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0,\ u + v + w \leq 2\}$$

pour la suite de l'exercice. Ainsi, le volume demandé vaut

$$\begin{aligned}
\iiint_A 8uvw\,dudvdw =& 8\int_0^2 udu \int_0^{2-u} vdv \int_0^{2-u-v} wdw \\
=& 4\int_0^2 udu \int_0^{2-u} (2-u-v)^2 vdv \\
=& 4\int_0^2 udu \int_0^{2-u} (v^3 - 2(2-u)v^2 + (2-u)^2 v)dv \\
=& \frac{1}{3}\int_0^2 (2-u)^4 udu = \frac{2}{3}\int_0^2 (2-u)^4 du - \frac{1}{3}\int_0^2 (2-u)^5 du \\
=& \frac{2}{3}\cdot\frac{32}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{64}{6} = \frac{32}{45}.
\end{aligned}$$

Exercice 17. a) Avec les coordonnées cylindriques,

$$\iiint_D (x^2+y^2)dxdydz = \int_{-2}^2 dz \int_0^2 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = 32\pi.$$

b) Ici,

$$\begin{aligned}
\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz =& \int_0^4 r^2 dr \int_0^{16-r^2} dz \int_0^{2\pi} d\theta \\
=& 2\pi \int_0^4 (16-r^2) r^2 dr = \frac{512}{15}.
\end{aligned}$$

c) On a ($x = r\cos\theta$, $r \in [0,2]$, $\theta \in [0,\pi]$) :

$$\begin{aligned}
\iiint_D xz\,dxdydz =& \int_0^2 r^2 dr \int_0^{\pi} \cos\theta\,d\theta \int_0^{r\sin\theta} zdz \\
=& \frac{1}{2}\int_0^2 r^4 dr \int_0^{\pi} \cos\theta \sin^2\theta\,d\theta = 0
\end{aligned}$$

(ce que l'on pouvait obtenir en par symétrie $x \mapsto -x$).

d) Le même type de raisonnement donne :

$$\begin{aligned}
\iiint_D y\,dxdydz =& \int_2^4 r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^{4+r\cos\theta} dz \\
=& 4\int_2^4 r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta + \int_2^4 r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\,d\theta \\
=& 0, \quad \text{car} \int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = 0.
\end{aligned}$$

e) On a ici

$$\begin{aligned}\iiint_D x^2\,dxdydz =& \iint_{\{x^2+y^2\leq 1\}} x^2\,dxdy \int_0^{3\sqrt{x^2+y^2}} dz\\ =& \int_0^1 3r^4 dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta\\ =& \frac{3\pi}{10}.\end{aligned}$$

Exercice 18. Rappelons qu'en coordonnées sphériques, l'élément de volume $dxdydz$ devient $r^2\sin\varphi\,drd\theta d\varphi$.

a) Comme $x^2+y^2+z^2=r^2$,

$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \int_0^2 r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi = \frac{128\pi}{5}.$$

b) Ici $x^2+y^2=r^2\sin^2\varphi$ et $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$, d'où :

$$\iiint_D (x^2+y^2)\,dxdydz = \int_0^1 r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi\,d\varphi = \frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\,d\varphi.$$

Arrêtons-nous sur le calcul de $\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\,d\varphi$; de l'identité $\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi$ on tire

$$\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,d\varphi - \int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

L'intégrale demandée vaut donc $\frac{4\pi}{15}$.

c) Ici $y^2=r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta$, θ, $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$, donc :

$$\begin{aligned}\iiint_D y^2\,dxdydz =& \int_0^1 r^4 dr \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta \int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\,d\varphi\\ =& \frac{\pi}{30}, \quad \text{car} \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ \text{(à corriger).}\end{aligned}$$

d) Le domaine D considéré est décrit en coordonnées sphériques par $\{r\in[1,2],\ (\theta,\varphi)\in[0,\frac{\pi}{2}]^2\}$. Ainsi, comme $x=r\sin\varphi\cos\theta$,

$$\iiint_D 2xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}dxdydz = \int_1^2 2r^3e^{r^2}dr \int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi \int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta.$$

Or $\int_1^2 2r^3e^{r^2}dr = \left[r^2e^{r^2}\right]_1^2 - \int_1^2 2re^{r^2}dr = \left[(r^2-1)e^{r^2}\right]_1^2 = 3e^4$, $\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4}$ (à corriger) et $\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = 1$. L'intégrale demandée vaut donc $\frac{3\pi e^4}{4}$.

e) On a ici $D = \{0 \leq r \leq 3, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi/6]\}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz &= \int_0^3 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/6} \sin\varphi\, d\varphi \\ &= \frac{81}{4} \cdot 2\pi \cdot [-\cos\varphi]_0^{\pi/6} \\ &= (2-\sqrt{3})\frac{\pi}{2} \approx 0,421.\end{aligned}$$

f) On a la description $D = \{1 \leq r \leq 4, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi/4]\}$. Par suite, comme $x^2 = r^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta$,

$$\iiint_D x^2 dxdydz = \underbrace{\int_1^4 r^4 dr}_{=\frac{1023}{5}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta}_{=\pi} \underbrace{\int_0^{\pi/4} \sin^2\varphi\, d\varphi}_{=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}} \approx 91,7.$$

g) Décrivons D par $\{\varphi \in [0, \pi/3],\ 0 \leq r \leq 4\cos\varphi, \theta \in [0, 2\pi]\}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(D) &= \int_0^{\pi/3} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{128}{3}\pi \int_0^{\pi/3} \sin\varphi \cos^3\varphi\, d\varphi \\ &= \frac{128}{3}\pi\Big[-\frac{1}{4}\cos^4\varphi\Big]_0^{\pi/3} = 10\pi.\end{aligned}$$

Exercice 19. Pour la première intégrale, on utilise les coordonnées sphériques ; l'intégrale à calculer devient

$$\iiint_{\{0\leq z\leq h,\, 0\leq r\leq R,\, 0\leq\theta\leq 2\pi\}} z^2 r\, drdzd\theta = \int_0^R r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h z^2 dz = \frac{R^2h^3\pi}{3}.$$

Les coordonnées sphériques usuelles sont mieux adaptées à la deuxième intégrale. L'élément de volume devient $r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi$, et D est décrit par $\{2 \leq r \leq 3, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]\}$, si bien que :

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \int_2^3 r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 5\pi.$$

Pour la troisième intégrale, on utilise des coordonnées sphériques « tordues » en posant $x = ar\sin\varphi\cos\theta$, $y = br\sin\varphi\sin\theta$ et $z = c\cos\varphi$; noter que cela revient à poser $x = ax'$, $y = by'$ et $z = cz'$, puis $x' = r\sin\varphi\cos\theta$, $y' = r\sin\varphi\sin\theta$ et $z' = \cos\varphi$. Le domaine D se décrit alors comme $\{0 \leq r \leq 1, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]\}$, et l'élément de volume $dxdydz$ devient $abcr^2 \sin\varphi\, dr d\theta d\varphi$, donc

$$\iiint_D e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}} dxdydz = abc \int_0^1 e^r r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi.$$

Or $r \mapsto r^2 e^r$ admet pour primitive $r \mapsto (r^2 - 2r + 2)e^r$, ce qui vaut e en $r = 1$ et 2 en $r = 0$; par ailleurs $\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 2$. L'intégrale considérée vaut donc $4\pi(e - 2) \approx 9.03$.

Exercice 20. Raisonnons comme dans le c) de l'exercice précédent ; D est décrit cette fois par $\{0 \leq r \leq 1, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\iiint_D xyz\,dxdydz =& abc \int_0^1 abcr^5 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \cos\varphi d\varphi \\ =&(abc)^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{(abc)^2}{48}.\end{aligned}$$

Exercice 21. En remarquant que pour $|x| \leq 2$, la condition $y^2 \leq 1 - (x-1)^2$ implique $y^2 \leq 4 - x^2$, on a que le domaine D considéré est décrit par $\{0 \leq x \leq 2,\ |y| \leq (1-(x-1)^2)^{1/2},\ |z| \leq (4 - x^2 - y^2)\}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(D) =& \int_0^2 dx \int_{-(1-(x-1)^2)^{1/2}}^{(1-(x-1)^2)^{1/2}} dy \int_{-(4-x^2-y^2)^{1/2}}^{(4-x^2-y^2)^{1/2}} dz \\ =&2\int_0^2 dx \int_{-(1-(x-1)^2)^{1/2}}^{(1-(x-1)^2)^{1/2}} (4-x^2-y^2)^{1/2} dy\end{aligned}$$

À ce stade, un calcul direct semble délicat ; effectuons plutôt un changement en coordonnées polaires $x = 2r\cos\theta$, $y = 2r\sin\theta$, $(r,\theta) \in [0,1] \times [-\pi,\pi]$ (on aurait pu utiliser des coordonnées cylindriques dès le début). L'élément de surface $dxdy$ devient $2rdrd\theta$ (attention au facteur 2), tandis que la contrainte $|y| \leq (1-(x-1)^2)^{1/2}$ devient $\cos\theta \geq r$; au passage, ceci force θ à être dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Comme $(4-x^2-y^2)^{1/2}$ devient $2(1-r^2)^{1/2}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(D) =& 8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} r(1-r^2)^{1/2} dr \\ =&\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin\theta|^3) d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\theta) d\theta \quad \text{(symétrie)} \\ =&\frac{16}{3}\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\Big) \approx 4,82,\end{aligned}$$

d'après le b) de l'exercice 15 pour la valeur de $\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\, d\theta$.

Exercice 22. Les règles de calcul pour la multiplication par $\wedge$ en dimension 3 sont analogues à celles de la dimension 2 (*cf.* 10) : bilinéarité point par point et anticommutativité (plus associativité, contrairement au produit vectoriel). Concrètement :

- $$\begin{aligned}(x^2dx + z^2dy + dz) \wedge (dx - 2dy - x^2dz) =& -(2x^2 - z^2)dx \wedge dy - (x^4+1)dx \wedge dz \\ &+ (-x^2z^2 + 2)dy \wedge dz\,;\end{aligned}$$

- $(e^z dx - e^y dz) \wedge (xdy + ydz) = xe^z dx \wedge dy + ye^z dx \wedge dz + xe^y dy \wedge dz$;

- $(-y^2dx + dy + 2ydz) \wedge (zdx \wedge dy + xdz \wedge dx) = (x + 2yz)dx \wedge dy \wedge dz$;

- $(xdy + ydz) \wedge (zdy + xdz) \wedge (xdz - zdx) = -z(x^2 - yz)dx \wedge dy \wedge dz$;

- $$\begin{aligned} d(x^3 + e^z) \wedge (2dx \wedge dy - xdy \wedge dz) =& (3x^2dx + e^z dz) \wedge (2dx \wedge dy - xdy \wedge dz) \\ =& (-3x^3 + 2e^z)dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

La dernière question se traite exactement comme en dimension 2.

Exercice 23. La normale extérieure est vers le bas. Si l'on paramètre la surface par sa projection verticale sur le plan Oxy, il faudra donc faire un changement de signe, puisque le plan est naturellement (par défaut) orienté vers le haut. Ainsi, S se projette sur le cercle D de Oxy de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$, d'où : $S = \{(x, y, \frac{x^2+y^2}{4}) | (x, y \in D)\}$.

On a donc, sur S, $dz = d(\frac{x^2+y^2}{4}) = \frac{xdx+ydy}{2}$, donc $\frac{dy\wedge dz}{x} = \frac{dy\wedge xdx}{2x} = -\frac{1}{2}dx \wedge dy$. L'intégrale à calculer vaut donc $\iint_D \frac{1}{2}dxdy$ (c'est ici que l'on fait le changement de signe, au moment d'enlever le $\wedge$ entre dx et dy), c'est-à-dire la moitié de l'aire de D, soit 4π.

Exercice 24. Si Δ est le disque fermé dans Oxy de centre l'origine et de rayon 2, la surface S dont on doit calculer l'aire est $\{(x, y, xy) | (x, y) \in \Delta\}$. Posons, pour $(x, y) \in \Delta$, $z(x, y) = xy$; d'après la proposition 5.3.1 du poly,

$$\begin{aligned} \text{Aire}(S) =& \iint_{(x,y)\in\Delta} (1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2)^{1/2} dxdy \\ =& \iint_{(x,y)\in\Delta} (1 + y^2 + x^2)^{1/2} dxdy \\ =& \int_0^2 (1 + r^2)^{1/2} r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \quad \text{(passage en polaires et Fubini)} \\ =& 2\pi \Big[\frac{1}{3}(1 + r^2)^{3/2}\Big]_0^2 = 2\pi \frac{5\sqrt{5} - 1}{3} \approx 21,3. \end{aligned}$$

Remarquons que l'intégrande de la première intégrale est bien $\|X'_x \wedge X'_y\|$ (norme euclidienne), où $X(x, y) = (x, y, z(x, y)) = (x, y, xy)$, $X'_x = (1, 0, y)$ et $X'_y = (0, 1, x)$ (ce qui est l'approche que j'ai utilisée en TD).

Exercice 25. Soit Δ le disque fermée dans Oxy, de centre $(2, 0)$ et de rayon 2, de sorte que le cylindre de l'énoncé soit le cylindre vertical au-dessus de Δ. La surface S considérée est donc la partie du cône $z^2 = x^2 + y^2$ au-dessus de Δ ; on a donc sur cette surface $z = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$, d'où :

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(en oubliant la légère singularité en l'origine, qui est juste au bord de Δ).

On en déduit :

$$\begin{aligned}\text{Aire}(S) &= \iint_{(x,y)\in\Delta} \Big(1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}\Big)^{1/2} dxdy = \sqrt{2} \iint_{(x,y)\in\Delta} dxdy \\ &= \sqrt{2}\,\text{Aire}(\Delta) = 4\pi\sqrt{2} \approx 17.8.\end{aligned}$$

Exercice 26. 1. Donnons-nous une paramétrisation $\big(x(s,t), y(s,t), z(s,t)\big)$ de la surface S inscrite dans la sphère de rayon $R > 0$, où les paramètres (s,t) est pris dans un domaine D du plan (on peut éventuellement avoir besoin de plusieurs paramétrisations, mais il suffit alors de découper S en morceaux respectifs pour ces diverses paramétrisations). On suppose encore que notre paramétrisation est admissible en ce sens que si $\vec{\sigma}$ et $\vec{\tau}$ désignent les vecteurs tangents $\big(x'_s(s,t), y'_s(s,t), z'_s(s,t)\big)$ et $\big(x'_t(s,t), y'_t(s,t), z'_t(s,t)\big)$, alors $\vec{\sigma} \wedge \vec{\tau}$ ne s'annule pas sur D, et est donc soit intérieur, soit extérieur, pour peu que S soit connexe (« en un seul morceau »), ce que l'on suppose quitte là encore à scinder les intégrales. Quitte enfin à effectuer une symétrie sur s ou t, on supposera que $\vec{\sigma} \wedge \vec{\tau}$ est extérieur.

Par définition (*cf.* poly, p.75), on a donc :

$$\begin{aligned}\text{Aire}(S) &= \iint_D \|\vec{\sigma} \wedge \vec{\tau}(s,t)\| dsdt \\ &= \iint_D \left((y'_s z'_t - y'_t z'_s)^2 + (z'_s x'_t - z'_t x'_s)^2 + (x'_s y'_t - x'_t y'_s)^2\right)^{1/2} dsdt,\end{aligned}$$

où la dernière ligne découle juste de la définition du produit vectoriel et de la norme d'un vecteur. Cette expression analytique promet toutefois en général des calculs fort complexes, en raison entre autres des carrés et de la racine qui y figurent. Le but de cette question est néanmoins de voir que l'on peut calculer l'aire de S par une expression plus simple, que l'on note provisoirement $\mathcal{A}_S$, donnée par

$$\mathcal{A}_S = \frac{1}{R} \iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$$

et qui peut s'interpréter comme l'intégrale de surface de la 2-forme $\frac{1}{R}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$ sur S, ou encore comme le flux du vecteur (sans dimension) $\dfrac{\vec{r}}{R} = \dfrac{1}{R}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ à travers S, qui donne donc la réécriture (*cf.* feuille sur le flux)

$$\mathcal{A}_S = \frac{1}{R} \iint_D \begin{pmatrix} x(s,t) \\ y(s,t) \\ z(s,t) \end{pmatrix} \cdot (\vec{\sigma} \wedge \vec{\tau})(s,t) dsdt$$

d'après notre paramétrisation. Pour voir que $\mathcal{A}_S = \text{Aire}(S)$, il suffit donc de voir que $\frac{1}{R}\vec{r} \cdot (\vec{\sigma} \wedge \vec{\tau}) = |\vec{\sigma} \wedge \vec{\tau}|$. Or puisque $\vec{\sigma} \wedge \vec{\tau}$ est normal à S donc à la sphère (car $\vec{\sigma}$ et $\vec{\tau}$ sont tangents à la sphère et que leur produit vectoriel est orthogonal au plan qu'ils engendrent, *i.e.* le plan tangent à S au point considéré), $\vec{\sigma}\wedge\vec{\tau}$ est donc *colinéaire* à $\vec{r}$. Puisqu'ils ont tous deux même sens (ils sont extérieurs), on a donc :

$$\vec{\sigma}\wedge\vec{\tau} = \|\vec{\sigma}\wedge\vec{\tau}\|\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{\|\vec{\sigma}\wedge\vec{\tau}\|}{R}\vec{r},$$

et finalement $\vec{r}\cdot(\vec{\sigma}\wedge\vec{\tau}) = \frac{\|\vec{\sigma}\wedge\vec{\tau}\|}{R}\|\vec{r}\|^2 = R\|\vec{\sigma}\wedge\vec{\tau}\|$, d'où le résultat.

2. Cherchons une paramétrisation de la surface proposée, disons S, pour calculer son aire avec la formule démontrée en 1. On peut paramétrer S par la surface du plan Oxy sur laquelle elle se projette (bijectivement), à savoir le disque de centre $(R/2,0)$ et de rayon $R/2$ que nous nommons D, et que l'on peut décrire comme $\{(x,y)|\,0\le x\le R, 0\le |y|\le\sqrt{Rx-x^2}\}$. Ainsi, si $(x,y)\in D$, alors $(x,y,z)\in S$ *ssi* $z\ge 0$ et (x,y,z) est dans la sphère de rayon R, soit *ssi* $z=(R^2-x^2-y^2)^{1/2}$. En utilisant plutôt la relation $z^2=R^2-x^2-y^2$, on obtient $zdz=-xdx-ydy$, d'où $xdy\wedge dz=\frac{x^2dx\wedge dy}{z}$ et $ydz\wedge dx=\frac{y^2dx\wedge dy}{z}$, et comme $zdx\wedge dy=\frac{z^2dx\wedge dy}{z}$, on a :

$$\begin{aligned}\text{Aire}(S) =&\frac{1}{R}\iint_D\Big(\frac{x^2+y^2+z(x,y)^2}{z(x,y)}\Big)dx\wedge dy\\ =&R\iint_D\frac{dxdy}{z(x,y)}\\ =&R\int_0^R dx\int_{-\sqrt{Rx-x^2}}^{\sqrt{Rx-x^2}}\frac{dy}{(R^2-x^2-y^2)^{1/2}},\end{aligned}$$

par Fubini. Par parité et symétrie de l'intervalle par rapport à 0, l'intégrale en y se réduit pour tout $x\in[0,R]$ à

$$2\int_0^{\sqrt{Rx-x^2}}\frac{dy}{((R^2-x^2)-y^2)^{1/2}},$$

ce qui vaut

$$\Big[\arcsin\big(\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\big)\Big]_0^{\sqrt{Rx-x^2}} = \arcsin\big(\sqrt{\frac{x}{R+x}}\big).$$

Ainsi,

$$\text{Aire}(S) = 2R\int_0^R\arcsin\Big(\sqrt{\tfrac{x}{R+x}}\Big)dx.$$

Le reste des calculs est néanmoins assez pénible, du moins pour que je l'écrive ; de toute manière ce n'est pas le type de calculs que l'on exigera de vous. À titre indicatif, je vous conseille juste le changement de variables $x=R\,\mathrm{sh}^2\varphi$ et une intégration par parties. Vous devriez, sauf erreur de ma part, trouver $\text{Aire}(S)=(\frac{3\pi}{4}-2)R^2$, ce qui est bien >0.

Exercice 27. 1) Puisque l'on est dans le premier octant (x, y et $z\ge 0$), on peut décrire S par $\{(x,y,6-3x-2y)|\,x\in[0,2],\ y\in[0,3-\frac{3}{2}x]\}$. Sur S on a donc $z(x,y)=6-3x-2y$, de sorte que l'élément de surface $d\sigma$ devient $(1+3^2+2^2)^{1/2}dxdy = \sqrt{14}\,dxdy$ (en supposant S orientée vers le haut). On a donc

$$\begin{aligned}\iint_S yz\,d\sigma =& \sqrt{14}\int_0^2 dx\int_0^{3-\frac{3}{2}x} y(6-3x-2y)dy\\ =&\frac{\sqrt{14}}{3}\int_0^2(6-3x)^3dx\\ =&36\sqrt{14}\approx 135.\end{aligned}$$

2) Une rapide analyse montre que S est la portion du plan $x+y+z=2$ comprise dans le premier octant. On a donc $S=\{(x,y,2-x-y)|\,x\in[0,2],\,y\in[0,2-x]\}$; l'élément de surface $d\sigma$ devient quant à lui $\sqrt{3}\,dxdy$. Finalement,

$$\begin{aligned}\iint_S xz\,d\sigma =& \sqrt{3}\int_0^2 x\,dx\int_0^{2-x}(2-x-y)dy\\ =&\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2 x(2-x)^2dx\\ =&\frac{2}{\sqrt{3}}\approx 1.15.\end{aligned}$$

3) Puisque sur S, $y'_x = 2x$ et $y'_z = 4$, on a $d\sigma = -(1+4x^2+16)^{1/2}dxdz$ dans ce calcul (en supposant S orientée vers la droite). Il vient :

$$\begin{aligned}\iint_S -x\,d\sigma =& \int_0^2 x(17+4x^2)^{1/2}dx\int_0^2 dz = \Big[\frac{1}{12}(17+4x^2)^{3/2}\Big]_0^2\cdot 2\\ =&\frac{1}{6}(33^{3/2}-17^{3/2})\approx 19,9.\end{aligned}$$

4) La surface S est au-dessus du disque fermé dans Oxy, de centre 0 et de rayon 2. Sur S, $z'_x = 0$, et $z'_y = 1$; ainsi, $d\sigma = \sqrt{2}dxdy$, en supposant S orientée vers le haut. Par suite, on a

$$\begin{aligned}\iint_S yz\,d\sigma =& \sqrt{2}\iint_\Delta y(y+6)dxdy\\ =&\sqrt{2}\iint_\Delta y^2dxdy \quad \text{car} \quad \iint_\Delta ydxdy = 0\\ =&\sqrt{2}\int_0^2 r^3dr\int_0^{2\pi}d\theta \quad \text{(passage en polaires et Fubini)}\\ =&8\pi\sqrt{2}\approx 35,5.\end{aligned}$$

5) Il doit y avoir une faute d'énoncé, S étant d'après sa définition invariante selon z, donc en particulier non bornée, ce qui pose problème pour l'intégration demandée.

6) La surface S est au dessus du disque fermé Δ dans Oxy, de centre l'origine et de rayon 1 ; orientons-la vers le haut. On décrit S par $\big\{(x,y,(1-x^2-y^2)^{1/2})|\,(x,y)\in\Delta\big\}$. On a donc, au-dessus de Δ (ou plus exactement au-dessus de son intérieur, soit hors de

son bord qu'est le cercle unité de Oxy), $z'_x = \frac{x}{(1-x^2-y^2)^{1/2}}$, et $z'_y == \frac{y}{(1-x^2-y^2)^{1/2}}$, donc $1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = \frac{1}{1-x^2-y^2}$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\iint_S (x^2z + y^2z)\, d\sigma &= \iint_\Delta (x^2+y^2)(1-x^2-y^2)^{1/2} \frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^{1/2}} \\
&= \iint_\Delta (x^2+y^2) dxdy \\
&= \frac{\pi}{4} \quad \text{(en utilisant les coordonnées polaires).}
\end{aligned}
$$

7) Les contraintes définissant S nous donnent facilement que celle-ci est la région de la sphère unité située au-dessus du disque fermé Δ dans Oxy, de centre 0 et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En effet, sur S on a $z \geq 0$, et $1-x^2-y^2 = z^2 \geq x^2+y^2$, d'où $x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}$, et il est facile de voir que les conditions $x^2+y^2 \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq z = (1-x^2-y^2)^{1/2}$ sont également suffisantes. Si S est orientée vers le haut, on sait déjà que $d\sigma$ devient $\frac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^{1/2}}$. Néanmoins, un simple coup d'œil à l'intégrale demandée nous dit qu'elle est nulle par symétrie.

8) On peut voir S comme l'union (disjointe à une ensemble d'aire nulle près) des graphes $S_\pm$ de $(x,z) \to \pm(1-x^2)^{1/2}$ sur $\{x \in [-1,1],\ z \in [0,3]\} \subset Oxz$. Ainsi, si S est orientée vers l'extérieur, $d\sigma$ devient $\left(1 + \frac{x^2}{1-x^2} + 0\right)^{1/2} dxdz = \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} dxdz$ sur S_+, et

$$
\iint_{S_+} (x^2y - z^2) d\sigma = \iint_{(x,z)\in[-1,1]\times[0,3]} \frac{x^2(1-x^2)^{1/2} - z^2}{(1-x^2)^{1/2}}\, dxdz.
$$

De même,

$$
\iint_{S_-} (x^2y - z^2) d\sigma = \iint_{(x,z)\in[-1,1]\times[0,3]} \frac{-x^2(1-x^2)^{1/2} - z^2}{(1-x^2)^{1/2}}\, dxdz.
$$

car $y = -(1-x^2)^{1/2}$ sur S_-. Finalement

$$
\begin{aligned}
\iint_S (x^2y - z^2) d\sigma &= \iint_{S_+} (x^2y - z^2) d\sigma + \iint_{S_-} (x^2y - z^2) d\sigma \\
&= -2 \iint_{(x,z)\in[-1,1]\times[0,3]} \frac{z^2}{(1-x^2)^{1/2}}\, dxdz \\
&= -2 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} \int_0^3 z^2 dz \\
&= -18 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\cos\theta}\, d\theta \quad \text{en posant } x = \sin\theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
&= -18\pi.
\end{aligned}
$$

Exercice 28. a) On va utiliser la formule du déterminant (voir feuille sur le flux). La paramétrisation est simple ; on prend $(x,y) \in \Delta := [0,1]^2$ et $X(x,y) = (x, y, x^2+y^2)$.

On a alors $X'_x = (1,0,2x)$ et $X'_y = (0,1,2y)$, et $X'_x \wedge X'_y = (-2x,-2y,1)$. Puisque le champ de vecteur dont on veut calculer le flux à travers S s'écrit $(-e^y, ye^x, xy)$, le produit mixte $V\cdot(X'_x \wedge X'_y)$ vaut $2xe^y + 2xye^x + x^2y$. Ainsi, le flux demandé vaut (d'après Fubini)

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]^2}(2xe^y + 2xye^x + x^2y)\ dxdy =& \int_0^1 2xdx \int_0^1 e^y dy + \int_0^1 2xe^x dx \int_0^1 ydy\\ &+ \int_0^1 x^2dx \int_0^1 ydy\\ =&(e-1) + 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = e + \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

b) On procède de même : $(x,y) \in \Delta := [0,2]\times[0,1]$ et $X(x,y) = (x,y,x^2+y^2-9)$, de sorte que $X'_x = (1,0,2x)$ et $X'_y = (0,1,2y)$, dont on a vu que le produit vectoriel était $(-2x,-2y,1)$. Le champ de vecteur V s'écrivant $(-x^2y, 3xy^2, -4y^3)$, le produit mixte $V\cdot(X'_x \wedge X'_y)$ vaut en tout point $(-2x^3y + 6xy^3 + 4y^3)$. Finalement, en tenant compte des orientations, le flux demandé vaut (en utilisant Fubini)

$$\begin{aligned}&\iint_{[0,1]\times[0,2]}(-2x^3y + 6xy^3 + 4y^3)dxdy\\ &\qquad=-2\Big(\int_0^2 x^3dx\Big)\Big(\int_0^1 ydy\Big) + 6\Big(\int_0^2 xdx\Big)\Big(\int_0^1 y^3dy\Big)\\ &\qquad\quad+4\Big(\int_0^2 dx\Big)\Big(\int_0^1 y^3dy\Big)\\ &\qquad=1.\end{aligned}$$

c) On paramètre S grâce aux coordonnées sphériques, ce qui donne

$$S = \{(4\cos\theta\sin\varphi, 4\sin\theta\sin\varphi, 4\cos\varphi) |\ (\theta,\varphi) \in [0,2\pi]\times[0,\pi/2]\}.$$

Ainsi, en reprenant les notations de la feuille, on a $X(\theta,\varphi) = (4\cos\theta\sin\varphi, 4\sin\theta\sin\varphi, 4\cos\varphi)$, donc :

$$X'_\theta(\theta,\varphi) = (-4\sin\theta\sin\varphi, 4\cos\theta\sin\varphi, 0)$$

et

$$X'_\varphi(\theta,\varphi) = (4\cos\theta\cos\varphi, 4\sin\theta\cos\varphi, -4\sin\varphi),$$

d'où $(X'_\theta \wedge X'_\varphi)(\theta,\varphi) = -16(\cos\theta\sin^2\varphi, \sin\theta\sin^2\varphi, \sin\varphi\cos\varphi)$ (qui est orienté vers le bas). Ainsi, en tenant compte des orientations, le flux demandé vaut

$$\begin{aligned}-16\iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]}&\begin{pmatrix}\cos\theta\sin^2\varphi\\ \sin\theta\sin^2\varphi\\ \sin\varphi\cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\sin\theta\sin\varphi\\ -4\cos\theta\sin\varphi\\ -12\cos\varphi\end{pmatrix} d\theta d\varphi\\ &=192\iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]}\sin\varphi\cos^2\varphi d\theta d\varphi\\ &=192\Big(\int_0^{2\pi} d\theta\Big)\Big(\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi\Big) = 256\pi.\end{aligned}$$

Exercice 29. a) Un calcul direct donne immédiatement $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = 0$.

b) La courbe en question délimitant la surface S de l'exercice 26, on a en utilisant la formule de Stokes-Ampère (poly p.78) :

$$\oint_{bS} \vec{V} \cdot \overrightarrow{dM} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} \cdot \vec{n}_S dS,$$

quantité nulle d'après a) (à vrai dire, on pouvait s'en douter, puisque le seul résultat qui ne dépende pas du sens de parcours de bS, omis dans l'énoncé, est 0).

c) La question est beaucoup plus simple qu'il n'y paraît. En effet, $\vec{V}$ est C^1 et à rotationnel nul sur $\mathbb{R}^3$ qui est sans trou. C'est donc le gradient d'une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (de classe C^2, disons). On pourrait chercher f avec la méthode habituelle ; on voit néanmoins facilement que $f : (x, y, z) \mapsto xyz$ convient.

Ainsi, la circulation de $\vec{V}$ la long d'un arc (a, b, c) à (a', b', c') est indépendante de ce chemin dès lors que celui-ci a ces extrémités, et vaut $f(a', b', c') - f(a, b, c) = a'b'c' - abc$.

d) Par un calcul direct, on a que la divergence de $\vec{V}$ est nulle.

e) Par Ostrogradsky (notre champ est C^1 <u>dans toute la boule</u>), p.79 du poly, ce flux est égal à l'intégrale de la divergence sur la boule de centre O et de rayon R, qui est nulle d'après la question précédente.

Exercice 30. Remarquons en préambule que si une courbe est orientée dans le sens anti-horaire vue d'en haut, alors l'orientation induite sur une surface (sans « repli ») qu'elle délimite sera vers le haut.

a) On calcule $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = (3x, x - 3y, 2y)$, et on considère comme surface bordée par S celle située dans le plan $\{3x+y+z = 6\}$, que l'on paramètre par $z = 6-3x-y$, $x \in [0, 2]$, $y \in [0, 6 - 3x]$. On a donc à calculer le déterminant (voir le document « Formule pour calculer le flux... »)

$$\begin{vmatrix} 3x & x - 3y & 2y \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

qui vaut $10x - y$, puis l'intégrale

$$\iint_{x\{\in[0,2],\, y\in[0,6-3x]\}} (10x - y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{6-3x} (10x - y)dy = 10.$$

b) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = (5, 2, 4)$. Soit S la surface délimitée par le cylindre d'équation $x^2 + y^2 + 16$ dans le plan $z = x + 8$ orientée vers le haut, de sorte que $bS = C$, avec orientation induite. On a $S = \{(r\cos\theta, r\sin\theta, 8 + r\cos\theta) | \, r \in [0, 4],\ \theta \in [0, 2\pi]\}$; le déterminant à calculer est donc

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ \cos\theta & \sin\theta & \cos\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix}$$

ce que donne r. La circulation demandée vaut donc $\iint_{\{r\in[0,4],\,\theta\in[0,2\pi]\}} r\,drd\theta = 16\pi$.

c) Ici $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V}) = (2y, 3x, 0)$. Soit S la surface $\{X(r,\theta) |\, r \in [0,1],\ \theta \in [0, \pi/2]\}$, avec $X(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1-r^2)$, orientée vers le haut, de sorte que $bS = C$. On a $X'_r = (\cos\theta, \sin\theta, -2r)$ et $X'_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$, donc $X'_r \wedge X'_\theta = (-2r\cos\theta, 2r\sin\theta, 1)$, qui est orienté vers le haut (sa troisième composante est positive). De plus, le déterminant habituel vaut $rt(\vec{V}) \cdot (X'_r \wedge X'_\theta) = -8r^2 \sin\theta\cos\theta$ (produit mixte de trois vecteurs). Finalement, la circulation demandée est égale à :

$$\iint_{\{r\in[0,1],\,\theta\in[0,\pi/2]\}} -8r^2\sin\theta\cos\theta\, drd\theta = -8\int_0^1 r^2dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = -\frac{4}{3}.$$

Exercice 31. a) D'après l'exercice 12 de la feuille 2 (applicable en dehors de l'origine si $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$), $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$ et $\mathrm{div}\,(\vec{v}) = 0$ sur $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$.

b) Paramétrons la sphère unité, disons S, par $S = \{X(\theta,\varphi) |\, \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0,\pi]\}$, avec $X(\theta,\varphi) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$. On a $X'_\theta \wedge X'_\theta = -(\sin\varphi)X(\theta,\varphi)$ après calculs, qui pointe donc vers l'intérieur. Par suite le flux $\mathcal{F}$ de $\vec{v}$ (égal à X sur S, puisque $r = 1$) est donné par :

$$\mathcal{F} = -\iint_{\{(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]\}} X \cdot (X'_\theta \wedge X'_\theta) d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 4\pi.$$

c) La formule d'Ostrogradsky (aussi appelée *formule de flux-divergence*), qui nous donnerait que le flux du b) est nul ce qui n'est manifestement pas le cas, ne s'applique pas à cause de la singularité de $\vec{v}$ en l'origine.

Exercice 32. Notons α la 2-forme $x^3dy \wedge dz$ et $\beta = z^3dx \wedge dz$. On remarque que $\beta = d(-\frac{1}{4}z^4dx)$, donc $\iint_S \beta = 0$, car S n'a pas de bord ; l'intégrale demandée se restreint donc à $\iint_S x^3dy\wedge dz + y^3dz\wedge dx$. Par symétrie, ceci vaut $2\iint_S \alpha$. D'après le théorème de Stokes, si B est la boule unité, on a $\iint_S \alpha = \iiint_B d\alpha = 3\iiint_B x^2dx\wedge dy\wedge dz = 3\iiint_B x^2dxdydz$ par définition de l'intégrale d'une 3-forme. Passons en coordonnée sphériques ; on a (avec Fubini)

$$\iiint_B x^2dxdydz = \int_0^1 r^4dr\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{4\pi}{5},$$

de sorte que l'intégrale demandée vaille $\frac{24\pi}{5}$.