LM 256 : Travaux dirigés - Feuille 2

Exercice 1 *Soient a, b, c et d quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Montrer que :*

1. $a \wedge (b \wedge c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$
   En déduire que le produit vectoriel n'est pas associatif.
2. $\det[a, b, c] = a \cdot (b \wedge c) = (a \wedge b) \cdot c$
3. $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = \left\{ \begin{array}{c} c(a \cdot (b \wedge d)) - d(a \cdot (b \wedge c)) \\ -a(b \cdot (c \wedge d)) + b(c \cdot (d \wedge a)) \end{array} \right.$

Exercice 2
1. *Chercher un vecteur perpendiculaire au plan qui passe par les points $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ et $R(1, -1, 1)$.*
2. *Calculer l'aire du triangle PQR.*
3. *Grâce au produit mixte, montrer que les vecteurs $\vec{a} = (1, 4, -7)$, $\vec{b} = (2, -1, 4)$ et $\vec{c} = (0, -9, 18)$ sont coplanaires (c'est-à-dire qu'ils appartiennent à un même plan).*
4. *Calculer l'aire du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{a} = (1, 0, 6)$, $\vec{b} = (2, 3, -8)$ et $\vec{c} = (8, -5, 6)$*
5. *Calculer l'aire du parallélépipède d'arrêtes adjacentes PQ, PR et PS avec : $P(1, 1, 1)$, $Q(2, 0, 3)$, $R(4, 1, 7)$ et $S(3, -1, -2)$.*

Exercice 3 *Représenter graphiquement les champs de vecteurs définis par :*

1. $\vec{V}(x, y, z) = (x, y, 0)$
2. $\vec{V}(x, y, z) = (-x, -y, 0)$
3. $\vec{V}(x, y, z) = (x, y, z)$
4. $\vec{V}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0 \right)$
5. $\vec{V}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$
6. $\vec{V}(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$

Exercice 4 *Calculer :*

1. *div $\vec{r}$ et $\overrightarrow{rot}\ \vec{r}$*
2. *div $\vec{u}$ et $\overrightarrow{rot}\ \vec{u}$ avec $\vec{u}(x, y, z) = (xy, yz, xz)$*
3. *(div $\vec{w}$)* $(1, -1, 1)$ *avec* $\vec{w}(x, y, z) = (x^2y, -2y^3z^2, xy^2z)$
4. $\left(\overrightarrow{grad}\ f\right)(1, -2, -1)$ *avec* $f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$

Exercice 5 *Un champ vectoriel est dit irrationnel si (et seulement si) son rotationnel est nul.*

1. *Montrer que le champ* $\vec{u}(x,y,z) = (ax+by+cz, dx+ey+fz, gx+hy+iz)$ *est irrationnel si et seulement si la matice* $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *est symétrique.*

2. *Montrer que* $\vec{u}$ *est alors le gradient d'un champ scalaire.*

Exercice 6 *Montrer que pour* f *et* g *deux champs scalaires et* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux champs vectoriels, on a les résultats suivants :*

1. $\overrightarrow{grad}(fg) = \left(\overrightarrow{grad}\ f\right) g + f\left(\overrightarrow{grad}\ g\right)$
2. $div(f\vec{u}) = \left(\overrightarrow{grad}\ f\right)\cdot\vec{u} + f(div\ \vec{u})$
3. $div(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \left(\overrightarrow{rot}\ \vec{u}\right)\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{v}\right)$
4. $\overrightarrow{rot}(f\vec{u}) = \left(\overrightarrow{grad}\ f\right)\wedge\vec{u} + f\cdot(\overrightarrow{rot}\ \vec{u})$

Exercice 7 *Exprimer en fonction de* $\dot{r}$ *et* $\vec{r}$ *le gradient de :*

$$r, \quad r^2, \quad \ln r, \quad \frac{1}{r}, \quad r^k \quad k\in\mathbb{R}.$$

Exercice 8 *Pour chacun des champs* $\vec{u}$ *ci-dessous :*

- *vérifier que le rotationnel de* $\vec{u}$ *est nul.*
- *déterminer un champ scalaire* f *admettant ce champ* $\vec{u}$ *pour gradient.*

1. $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r^2}$
2. $\vec{u}(x,y,z) = (2xy, x^2+3y^2z^2, 2y^3z+4z^3)$
3. $\vec{u}(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{x}+y\cos(xy), \dfrac{1}{y}+x\cos(xy), \dfrac{1}{z}\right)$

Exercice 9 *Soit* $\vec{w}(x,y,z) = (x^a y, -axz, ayz)$.

1. *Calculer directement* $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{w})\right)$.
2. *Déterminer* k *et* $a\in\mathbb{N}$ *pour que :* $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\vec{w})\right) = (0, 2(x^k+1), 0)$.

Exercice 10 *Existe-t-il une fonction vectorielle différentiable* $\vec{V}$ *telle que :*
(i) $\overrightarrow{rot}\ \vec{V} = \vec{r}$ *(ii)* $\overrightarrow{rot}\ \vec{V} = (2,1,3)$
S'il existe, trouver $\vec{V}$.

Exercice 11 *Soit* $\vec{V}(x, y, z) = (y^2 + z^2, -xy, -xz)$

1. *Déterminer une fonction* φ *telle que* $\varphi(1) = 1$ *et* $\varphi(z) \cdot \vec{V}(M)$ *soit un rotationnel.*
2. φ *étant ainsi choisie, déterminer un potentiel vecteur* $\vec{U_0}(M) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), 0)$ *du champ de rotationnels obtenu. En déduire la forme générale des potentiels vecteurs* $\vec{U}(M)$ *de ce champ (c'est-à-dire les vecteurs* $\vec{U}(M)$ *tels que :* $\overrightarrow{rot}\, \vec{U}(M) = \varphi(z) \cdot \vec{V}(M)$*).*

Exercice 12 *Soit* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction deux fois dérivable.*

1. *On considère le champ scalaire* $f = \varphi \circ r$*. Calculer son gradient et son laplacien.*
2. *On considère le champ vectoriel* $\vec{u} = (\varphi \circ r)\vec{r}$*. Calculer sa divergence et son rotationnel.*

Ces types de champs sont dits radiaux.

Exercice 13 *Soit* $\vec{u} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *une fonction vectorielle d'une variable réelle de classe* $\mathcal{C}^1$*. Montrer que :*

(a) $div(\vec{u} \circ r) = (\vec{u}' \circ r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$ *(b)* $\overrightarrow{rot}(\vec{u} \circ r) = (\vec{u}' \circ r) \wedge \frac{\vec{r}}{r}$

Exercice 14 *Soit* $w = (yz + x^2y^3)dx + (xz + x^3y^2)dy + \phi(x, y)dz$

1. *Déterminer* ϕ *pour que la forme* w *soit exacte sur* $\mathbb{R}$*.*
2. *Trouver alors les primitives de* w*.*

Intégrales curvilignes

Exercice 15 *Soit* $\mathcal{C}$ *la courbe représentée paramétriquement par :*

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t} \cos t \\ y(t) = e^{2t} \sin t \\ z(t) = ke^{2t} \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

1. *Montrer que* $\mathcal{C}$ *est tracée sur un cône de révolution d'axe* Oz*.*
2. *Montrer que les tangentes à* $\mathcal{C}$ *forment toutes le même angle avec le plan* Oxy*.*

Exercice 16 *Calculer les équations des tangentes aux courbes suivantes :*

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \\ y(t) = 2\cos 3t \\ z(t) = 2\sin 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = t^2+1 \\ y(t) = 4t-3 \\ z(t) = 2t^2-6t \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = e^{2t} \end{cases}$$

aux points respectifs : $t_0 = \pi$, $t_0 = 2$ *et* $t_0 = 0$.

Exercice 17 *Les coordonnées d'un point mobile* M *sont données par le système :*

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t - 1 \\ y(t) = -2\cos t + 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1. *Déterminer la trajectoire de* M *et la représenter graphiquement.*
2. *Déterminer le vecteur tangent unitaire.*

Exercice 18 *On considère la courbe représentée par le système paramétré :*

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

Décrire géométriquement cette courbe et calculer le vecteur tangent unitaire en précisant les points où il est défini.

Exercice 19 *On considère un mouvement plan d'équation vectorielle :*

$$\vec{u} = (2t + \sin 2t)\vec{i} + (1 - \cos 2t)\vec{j}.$$

Rechercher, au point correspondant à $t = \frac{\pi}{4}$ *les vecteurs unitaires tangent et normal.*

Exercice 20 *Soient les points* $A(1,0)$, $B(0,1)$ *et* $C(1,1)$.

1. *Calculer les trois intégrales curvilignes :*

$$I_k = \int_{\Gamma_k} \left[(y^2 - y)dx - 2(x^2 - x)dy\right]$$

   $k = 1,2,3$, *où* Γ_1 *est la ligne brisée* OAC, Γ_2 *la ligne brisée* OBC *et* Γ_3 *le segment* $[OC]$.

2. *Le résultat est-il indépendant du chemin suivi ?*

Exercice 21 *Soit* Γ *l'arc limité par les points* $A(1,0,0)$ *et* $B(1,0,2\pi)$ *de la trajectoire du mouvement dont le vecteur vitesse est* $\vec{v}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, $0 \le t \le 2\pi$.
Calculer :

$$I = \int_{\Gamma} 4xydx + 3y^2dy + 5zdz$$

Exercice 22 *Soient* $A(1,-1)$, $B(1,1)$, $C(-1,-1)$ *et* $D(-1,1)$. *Calculer :*

$$I = \int_\Gamma \left[(x^2+y^2)dx + 2x^2y\,dy\right]$$

si Γ *est la courbe fermée* $ABCDA$ *constituée :*
(a) de l'arc AB *du cercle* $(x-1)^2+y^2=1 \quad x \geq 1$ *(b) du segment* $[BC]$
(c) de l'arc CD *du cercle* $(x+1)^2+y^2=1 \quad x \leq -1$ *(d) du segment* $[DA]$

Exercice 23 *Soit :*

$$I = \int_\Gamma \left[(x^2+y^2)dx + (x^2+y^2)dy\right]$$

où Γ *est la frontière, parcourue dans le sens trigonométrique, de la plus petite des deux portions délimitées par le cercle de rayon* 2 *centré à l'origine et par la parabole d'équation* $y^2=3x$.

1. *Calculer* I.
2. *Calculer l'aire intérieure à* Γ.

Exercice 24 *On considère la forme différentielle* $\phi(x,y) = \dfrac{x dy - y dx}{x^2+y^2}$.

1. *Montrer que* ϕ *est une forme différentielle fermée.*
2. *Calculer* $I = \int_\mathcal{C} \phi(x,y)$ *si* $\mathcal{C}$ *est :*
   – *le cercle de rayon* $R > 0$, *centré à l'origine, parcouru dans le sens direct,*
   – *la courbe représentée par* $\begin{cases} x(t) = (2+\cos\frac{t}{2})\cos t \\ y(t) = (2+\cos\frac{3t}{2})\sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$
3. *Calculer les aires intérieures à ces deux courbes.*

Exercice 25 *Un point matériel est soumis au champ de forces :* $\vec{F}(x,y,z) = (2x-y+3z, z+4y, 2xz+y+x^2)$ *le long de l'ellipse* $\mathcal{E}$ *d'équation paramétrique :*

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$$

parcourue dans le sens trigonométrique. Déterminer les coefficients a *et* $b \in \mathbb{N}$ *avec* $3 < a < b$, *sachant que le travail de* $\vec{F}$, $W = \int_\mathcal{E} \vec{F}\cdot d\vec{M}$, *le long de l'ellipse vaut* 32π.

Exercice 26 *Calculer l'intégrale curviligne* $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{M}$, *si* $\mathcal{C}$ *est la courbe décrite par la fonction vectorielle* $\overrightarrow{OM}(t)$:

1. $\vec{F}(x,y,z) = (\sin x, \cos y, xz)$ $\quad \overrightarrow{OM}(t) = (t^3, -t^2, t)$ $\quad 0 \leq t \leq 1$
2. $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, xy, z^2)$ $\quad \overrightarrow{OM}(t) = (\sin t, \cos t, t^2)$ $\quad 0 \leq t \leq \pi/2$

Exercice 27

1. *Calculer à l'aide d'une intégrale curviligne l'aire intérieure à l'astroïde représentée par :*
$$\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$
2. *Même question pour la cardioïde définie par l'équation polaire :* $r = a(1+\cos\theta)$.

Exercice 28 *Soit l'intégrale curviligne*

$$I = \int_{\Gamma} \frac{(1+y)dx + xdy}{x^2y^2 + 2x^2y + x^2 + 1}$$

1. *Montrer que* I *ne dépend pas du chemin* Γ *suivi entre deux points fixes.*
2. *Calculer* I *si l'arc* Γ *est limité par les points* $A(0,1)$ *et* $B(1/2,1)$, *sans faire le choix d'un chemin particulier.*

Exercice 29 *Soit* OP *l'arc de la courbe* $x^4 - 6xy^3 = 4y^2$ *limité par l'origine et par le point* P, *situé dans le premier cadrant, dont les coordonnées sont de la forme* $(t, 2t)$. *Calculer :*

$$\int_{OP} \big((10x^4 - 2xy^3)dx - 3x^2y^2dy\big)$$

Exercice 30 *Montrer que l'expression* $w = \dfrac{x}{x^2+y^2}dx + y\dfrac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}dy$ *est la différentielle totale d'une fonction* f *que l'on déterminera.*

Exercice 31 *Calculer l'intégrale curviligne :*

$$I = \int_{AB} \sqrt{x}dy - [\sqrt{x}\ln(x+1)]dx$$

A *et* B *étant les points d'abscisses* 0 *et* 1 *sur la courbe d'équation* $y = (x-1)\ln(x+1)$.

Exercice 32 *Calculer l'intégrale curviligne* I *le long de la boucle fermée* $\mathcal{C}$ *constituée par les deux arcs de paraboles* $y = x^2$ *et* $x = y^2$, *décrite dans le sens direct, avec :*

$$I = \int_{\mathcal{C}} (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$$