

# Sur le corps de définition d'un groupe de réflexions complexe

David Bessis

## Introduction.

Si  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, un groupe de réflexions (complexe) de  $V$  est un sous-groupe fini et engendré par des pseudo-réflexions de  $\mathrm{GL}(V)$ .

**Définition 0.1.** Soient  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $G$  un groupe de réflexions de  $V$ .

- on appelle représentation naturelle de  $G$  la représentation complexe définie par l'inclusion  $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$ ;
- on appelle corps de définition de  $G$  le corps engendré sur  $\mathbb{Q}$  par les valeurs du caractère de la représentation naturelle de  $G$ .

Un résultat classique (voir [ClEw] ou le corollaire 3.2. ci-dessous) prouve que la représentation naturelle d'un groupe de réflexions complexe  $G$  est rationnelle sur le corps de définition de  $G$ . Ce corps est ainsi le plus petit corps de rationalité de cette représentation.

Les groupes de Weyl sont ainsi les groupes de réflexions complexes dont le corps de définition est  $\mathbb{Q}$ . Dans le cas du groupe symétrique, il est bien connu que non seulement la représentation naturelle, mais également toutes les représentations complexes sont rationnelles sur  $\mathbb{Q}$ . Ce résultat a été progressivement étendu à tous les groupes de Weyl (la démonstration a été achevée en 1971 avec l'étude par Benard du cas des groupes de type  $E_6$ ,  $E_7$  et  $E_8$ ; une bibliographie complète se trouve dans [Benard1]). Il est à noter que l'on ne dispose toujours pas d'une démonstration générale.

Le théorème suivant, généralisant cette propriété à tous les groupes de réflexions complexes, est une légère reformulation d'un résultat annoncé dans [Benard2] :

**Théorème 0.2.** Soient  $G$  un groupe de réflexions complexe et  $K$  son corps de définition. Toutes les représentations complexes de  $G$  sont rationnelles sur  $K$ .

La preuve de ce théorème se réduit aisément au cas des groupes de réflexions complexes irréductibles, dont on dispose d'une classification établie par Shephard et Todd ([ShTo]). La démonstration proposée par Benard repose sur une étude au cas par cas, non seulement groupe par groupe, mais également souvent caractère

par caractère. Elle utilise de nombreuses tables de caractères (dues à Benard ou antérieures), dont certaines se sont révélées plus tard être entachées d'erreurs. En l'attente d'une preuve plus directe, le but du présent article est de proposer une démonstration simplifiée du théorème 0.2., en réduisant le nombre d'arguments issus de la théorie de l'indice de Schur, et en effectuant par ordinateur, de façon systématique et indépendante des résultats antérieurs, tous les calculs nécessaires.

Dans la première partie, nous établissons le résultat pour les familles infinies de groupes de réflexions complexes. Nous donnons également une description combinatoire de l'ensemble des caractères irréductibles de  $G(de, e, r)$ .

La seconde partie est consacrée à quelques généralités sur les tables de caractères des groupes de réflexions exceptionnels. Nous apprenons à reconnaître le(s) caractère(s) pouvant correspondre à la représentation naturelle, ce qui nous permet de mettre en évidence certains automorphismes extérieurs.

Enfin, dans la dernière partie, nous proposons un algorithme qui permet, à partir de leurs tables des caractères, d'établir le résultat pour les groupes de réflexions exceptionnels. Les tables de caractères ont été systématiquement recalculées à l'aide du logiciel GAP (pour une description de ce système de calcul, on pourra se reporter à [Schönert]).

*Sur les calculs en GAP.*

GAP accepte les présentations de groupes par générateurs et relations. S'il est ainsi possible d'utiliser les tables de [BrMaRo] pour implémenter les groupes d'ordre petit, cette méthode se révèle trop inefficace pour effectuer des calculs sur les groupes d'ordre plus important. Chaque fois que cela était possible, nous avons utilisé les "systèmes de racines" fournis par [Cohen] pour décrire les groupes comme groupes de permutations sur l'ensemble des racines. Nous remercions Jean Michel de nous avoir communiqué un programme réalisant la plus grande partie de cette implémentation, et d'avoir ainsi simplifié notre tâche.

Nous remercions Michel Broué pour ses nombreux conseils. Ce travail a été réalisé sous sa direction.

## 1 Le cas des familles infinies.

Notations: pour tout entier strictement positif  $n$ , on note  $\mu_n$  le sous-groupe de  $\mathbb{C}$  formé des racines  $n$ -ièmes de 1. On pose  $\zeta_n := e^{2i\pi/n}$ .

Soient  $d$ ,  $e$  et  $r$  des entiers  $\geq 1$ . On note  $A(de, e, r)$  le groupe des matrices  $r \times r$  diagonales à coefficients dans  $\mu_{de}$  et dont le produit des coefficients est dans  $\mu_d$ . On identifie le groupe symétrique  $S_r$  au sous-groupe  $\text{GL}_r(\mathbb{C})$  formé des matrices de permutations. Le groupe de réflexions complexe  $G(de, e, r)$  est par définition le produit des sous-groupes  $A(de, e, r)$  et  $S_r$  de  $\text{GL}_r(\mathbb{C})$ . (On aurait pu de façon équivalente définir  $G(de, e, r)$  comme un produit semi-direct  $A(de, e, r) \rtimes S_r$ .)

Si  $(a_1, \dots, a_r) \in (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r$ , on note  $\theta_{(a_1, \dots, a_r)}$  le caractère linéaire de  $A(de, e, r)$  défini par

$$\theta_{(a_1, \dots, a_r)}(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)) = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{a_i}.$$

Tout caractère de  $A(de, e, r)$  est de cette forme.

**Définition 1.1.**

(i) On définit une bijection  $(\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r \rightarrow (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r$ , notée *shift*, par:

$$\text{shift}((a_1, \dots, a_r)) := (a_1 - d, \dots, a_r - d).$$

(ii) On définit une relation d'équivalence sur  $(\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r$ , notée  $\sim$ , par:

$$(a \sim b) :\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, b = \text{shift}^k(a)).$$

(iii) Par découpage de  $r$ , on entend  $(de)$ -uplet d'entiers  $\geq 0$  de somme  $r$ . On note  $\mathcal{D}$  l'ensemble des découpages de  $r$ . À  $a \in (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r$ , on associe  $\delta(a)$ , le découpage de  $r$  dont le  $k$ -ième terme est le nombre d'occurrences de  $k$  (modulo  $de$ ) dans  $a$ . Ceci définit une application surjective  $\delta : (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r \rightarrow \mathcal{D}$ .

(iv) On définit une bijection  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ , notée également *shift*, par:

$$\text{shift}((f_1, \dots, f_{de})) := (f_{1+d}, \dots, f_{de+d}).$$

(Les indices étant vus modulo  $de$ .)

Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r & \xrightarrow{\text{shift}} & (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r \\ \delta \downarrow & & \delta \downarrow \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{\text{shift}} & \mathcal{D} \end{array}$$

(v) On dit que deux découpages  $f$  et  $g$  de  $r$  sont cycliquement équivalents si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{Z}, g = \text{shift}^k(f).$$

Ceci définit une relation d'équivalence sur  $\mathcal{D}$ .

Pour alléger les notations, on écrira  $A$  pour  $A(de, e, r)$ . Le groupe  $S_r$  opère sur  $\text{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$  de la façon suivante: pour tout  $\sigma \in S_r$ , pour tout  $\theta \in \text{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$  et pour toute matrice  $M \in A$ , on pose

$$\sigma\theta(M) := \theta(\sigma^{-1}M\sigma).$$

On peut également faire opérer  $S_r$  sur  $(\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r$  en posant pour tout  $\sigma \in S_r$  et pour tout  $a = (a_1, \dots, a_r) \in (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r$

$$\sigma(a) := (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(r)}).$$

**Lemme 1.2.**

- (i)  $\forall a \in (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r, \forall \sigma \in S_r, \sigma\theta_a = \theta_{\sigma(a)},$
- (ii)  $\forall a \in (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r, \forall \sigma \in S_r, \delta(\sigma(a)) = \delta(a),$
- (iii)  $\forall a, b \in (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r, (\theta_a = \theta_b \Leftrightarrow a \sim b).$

*Démonstration :* (i) et (ii) sont immédiats. Le sens  $\Leftarrow$  de (iii) est facile, la réciproque découle de l'égalité des cardinaux de  $A(de, e, r)$  et de  $(\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r / \sim$ .  $\square$

On cherche à décrire les caractères complexes irréductibles de  $G(de, e, r)$ . Une méthode classique consiste à déterminer les orbites de  $\text{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$  pour l'action de  $S_r$  et à calculer les groupes d'inertie dans  $S_r$  des éléments de  $\text{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$ . Le lemme suivant prouve que les orbites de  $\text{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$  pour l'action de  $S_r$  sont en correspondance bijective avec les classes de découpages de  $r$  pour la relation d'équivalence cyclique, ce qui justifie *a posteriori* l'introduction de ces notions.

**Lemme 1.3.** *Soient  $\theta, \theta' \in \text{Hom}(A, \mathbb{C}^\times)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- (i)  $\exists \sigma \in S_r, \theta' = \sigma\theta,$
- (ii) *pour tous  $a$  et  $b$  dans  $(\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r$  tels que  $\theta = \theta_a$  et  $\theta' = \theta_b$ ,  $\delta(a)$  et  $\delta(b)$  sont cycliquement équivalents,*
- (iii)  $\exists a, b \in (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r$  *tels que  $(\theta = \theta_a$  et  $\theta' = \theta_b)$  et  $(\delta(a)$  et  $\delta(b)$  sont cycliquement équivalents).*

*Démonstration :*

(i)  $\Rightarrow$  (ii): soient  $a$  et  $b \in (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r$  tels que  $\theta = \theta_a$  et  $\theta' = \theta_b$ , et soit  $\sigma \in S_r$  tel que  $\theta_b = \sigma\theta_a$ . Par le (i) du lemme 1.2., on a  $\theta_b = \theta_{\sigma(a)}$ . Par le (iii) du lemme 1.2., ceci implique que  $\delta(b)$  et  $\delta(\sigma(a)) = \delta(a)$  (lemme 1.2., (ii)) sont cycliquement équivalents.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) est immédiat car il existe  $a, b \in (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r$  tels que  $(\theta = \theta_a$  et  $\theta' = \theta_b)$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i): soient  $a$  et  $b \in (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r$  tels que  $(\theta = \theta_a$  et  $\theta' = \theta_b)$  et  $(\delta(a)$  et  $\delta(b)$  sont cycliquement équivalents). Soit  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $\delta(b) = \text{shift}^k(\delta(a))$ . On pose  $c := \text{shift}^{-k}(b)$ . Comme  $b \sim c$ , on a  $\theta' = \theta_c$ . Mais  $\delta(c) = \text{shift}^{-k}(\delta(b)) = \text{shift}^{-k}(\text{shift}^k(\delta(a))) = \delta(a)$ . Chaque élément de  $\mathbb{Z}/de\mathbb{Z}$  a autant d'occurrences dans  $a$  que dans  $c$ . On peut donc trouver une permutation  $\sigma \in S_r$  telle que  $c = \sigma(a)$ . Ainsi  $\theta' = \theta_c = \theta_{\sigma(a)} = \sigma\theta$ .  $\square$

**Définition 1.4.** *La période d'un découpage  $f$  de  $r$  est le plus petit  $p$  entier  $> 0$  tel que  $\text{shift}^p(f) = f$ . Le découpage  $f$  est dit strictement périodique si sa période est  $< e$ .*

Pour tout découpage  $f$ , on a  $\text{shift}^e(f) = f$ . Ainsi la période est un diviseur de  $e$ . C'est l'existence de découpages strictement périodiques qui complique l'étude des caractères de  $G(de, e, r)$ .

**Proposition 1.5.** *Soit  $a \in (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r$ . Le groupe d'inertie de  $\theta_a$  dans  $S_r$  est isomorphe à*

$$(S_{\delta(a)_1} \times \cdots \times S_{\delta(a)_{dp}}) \wr C_{e/p}$$

où  $p$  est la période de  $\delta(a)$  et où la structure de produit en couronne est donnée par une inclusion  $C_{e/p} \hookrightarrow S_{e/p}$  (pour tout entier  $m$ ,  $C_m$  désigne le groupe cyclique d'ordre  $m$ ).

*Démonstration :* Soit  $a = (a_1, \dots, a_r) \in (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r$ . Soit  $I$  le groupe d'inertie de  $\theta_a$ . Soit  $p$  la période de  $\delta(a)$ . Pour  $n \in \mathbb{Z}/de\mathbb{Z}$ , on note  $E_n$  l'ensemble des  $i \in \{1, \dots, r\}$  tels que  $a(i) = n$  (ainsi  $\delta(a)_n = |E_n|$ ). On a notamment: pour tout  $n \in \mathbb{Z}/de\mathbb{Z}$ ,  $E_n$  et  $E_{n+dp}$  ont même cardinal.

Les éléments  $\sigma$  de  $S_r$  tels que  $\sigma(a) = a$  forment un sous-groupe  $H$  de  $I$ . Une permutation est dans  $H$  si et seulement si elle laisse stable les  $E_n$ . Ainsi  $H$  est isomorphe à  $S_{\delta(a)_1} \times \cdots \times S_{\delta(a)_{de}}$ .

Si  $\sigma \in I$ , on a  $\sigma(a) \sim a$  et donc il existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $b = \text{shift}^k(a)$ . La classe de  $k$  modulo  $e$  est entièrement déterminée. On a  $\delta(\sigma(a)) = \text{shift}^k(\delta(a)) = \delta(a)$ , donc  $k$  est divisible par  $p$ . On note  $C := \mathbb{Z}/(e/p)\mathbb{Z}$ . La classe de  $k/p$  dans  $C$  est uniquement déterminée par  $\sigma$ . On la note  $\pi(\sigma)$ . L'application  $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$  est un morphisme de groupes  $I \rightarrow C$ .

La suite:

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow I \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 1$$

est une suite exacte scindée.

En effet, l'exactitude en  $I$  étant immédiate, il ne reste qu'à exhiber une section de  $\pi$ . De la périodicité de  $\delta(a)$ , on déduit l'existence pour tout  $n \in \mathbb{Z}/de\mathbb{Z}$  d'une bijection  $\tau_n : E_n \rightarrow E_{n+p}$ . Soit  $\tau$  la bijection  $\{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$  définie par ses restrictions aux  $E_n$  en posant  $\tau|_{E_n} := \tau_n$ . On a  $\tau \in I$  car  $\tau(a) \sim a$ . Il existe un unique morphisme  $s : C \rightarrow I$  qui envoie la classe de 1 sur  $\tau$ . On a  $\pi \circ s = \text{Id}$ .

Par périodicité de  $\delta(a)$ , on a  $S_{\delta(a)_1} \times \cdots \times S_{\delta(a)_{de}} \simeq (S_{\delta(a)_1} \times \cdots \times S_{\delta(a)_{dp}})^{e/p}$ . On vérifie que le produit semi-direct associé à la suite exacte ci-dessus correspond au produit en couronne annoncé.  $\square$

**Proposition 1.6.** *Les caractères complexes de  $G(de, e, r)$  sont rationnels sur  $\mathbb{Q}(\zeta_{de})$ .*

*Démonstration :* Soient  $a \in (\mathbb{Z}/de\mathbb{Z})^r$ ,  $I$  le groupe d'inertie de  $\theta_a$  et  $\chi$  un caractère irréductible de  $I$ . Le groupe  $I$  est de la forme  $S \wr C$  où  $S$  est un produit direct de groupes symétriques (donc tous ses caractères sont rationnels sur  $\mathbb{Q}$ ) et  $C$  est un groupe cyclique d'ordre diviseur de  $e$  (donc tous ses caractères sont rationnels sur  $\mathbb{Q}(\zeta_e)$ , ainsi que les caractères de ses sous-groupes). D'après [JaKe], théorème 4.4.8, tous les caractères de  $I$  sont rationnels sur  $\mathbb{Q}(\zeta_e)$  et donc sur  $\mathbb{Q}(\zeta_{de})$ . Soit  $\chi$  un

caractère irréductible de  $I$ . Le caractère  $\theta_a \otimes \text{Ind}_I^{S_r}(\chi)$  est rationnel sur  $\mathbb{Q}(\zeta_{de})$ . Tout caractère irréductible de  $G(de, e, r)$  étant de cette forme, on a le résultat voulu.  $\square$

Nous n'avons pas imposé de restrictions particulières aux valeurs de  $d$ ,  $e$  et  $r$ . Ainsi la proposition ci-dessus s'applique aux trois familles infinies de la classification de Shephard et Todd.

Dans le cas du groupe diédral  $G(e, e, 2)$ , le corps de définition est  $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/e))$ . Il est facile de construire les représentations de  $G(e, e, 2)$  et de prouver qu'elles sont rationnelles sur  $\mathbb{Q}(\cos(2\pi/e))$ .

Dans tous les autres cas, le corps de définition de  $G(de, e, r)$  est  $\mathbb{Q}(\zeta_{de})$ , et la proposition ci-dessus établit le théorème 0.2. pour les familles génériques.

**Remarque:** par le lemme 1.3., les orbites de caractères de  $A(de, e, r)$  pour l'action de  $S_r$  sont en bijection avec les classes de découpages de  $r$  pour la relation d'équivalence cyclique. Soit  $\Theta$  un ensemble de caractères de  $A(de, e, r)$ , un dans chaque orbite. Si  $\theta \in \Theta$ , si  $I$  est le groupe d'inertie de  $\theta$  et  $\chi \in \text{Irr}(I)$ ,  $\theta \otimes \text{Ind}_I^{S_r}(\chi)$  est un caractère irréductible de  $G(de, e, r)$ . De plus, chaque caractère irréductible de  $G(de, e, r)$  est obtenu de la sorte une et une seule fois (voir par exemple [Serre], théorème 17). Ceci permet d'énumérer les caractères irréductibles de  $G(de, e, r)$ :

- dans le cas où  $e = 1$ , deux découpages de  $r$  sont cycliquement équivalents si et seulement si ils sont égaux. Les groupes d'inertie qui apparaissent sont des produits de groupes symétriques et les caractères de  $G(d, 1, r)$  sont indexés par les  $d$ -uplets de diagrammes de Young de taille totale  $r$  (cf. [ArKo]);
- plus généralement, si  $e \wedge r = 1$  (dans tout cet article, si  $a$  et  $b$  sont deux entiers, on note  $a \wedge b$  leur plus grand diviseur commun), il n'y a pas de découpages de  $r$  strictement périodiques, Les groupes d'inertie qui apparaissent sont des produits de groupes symétriques et les caractères irréductibles de  $G(de, e, r)$  sont indexés par les classes de  $de$ -uplets de diagrammes de Young de taille totale  $r$  pour la relation d'équivalence cyclique (étendue aux diagrammes de Young, voir par exemple [Ariki]);
- dans le cas général, les groupes d'inertie ne sont plus nécessairement des produits de groupes symétriques. Pour se faire une idée des modules associés aux caractères irréductibles de  $G(de, e, r)$ , on pourra consulter [Ariki].

## 2 Sur les tables de caractères des groupes exceptionnels.

L'objet de cette partie est de préciser quelques notions utiles à l'analyse des tables de caractères des groupes de réflexions. On cherche notamment à reconnaître parmi les caractères irréductibles d'un groupe de réflexions ceux qui correspondent à des représentations comme groupe de réflexions.

Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soit  $G$  un groupe de réflexions irréductible de  $V$ . Soit  $K$  le corps de définition de  $G$ .

**Définition 2.1.** Une réalisation de  $G$  est une représentation  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(W)$  irré-

ductible, fidèle et telle que  $\rho(G)$  soit un groupe de réflexions irréductible de  $W$ .

L'inclusion  $G \hookrightarrow \mathrm{GL}(V)$  est une réalisation de  $G$ ; nous l'appellerons la *réalisation de définition* de  $G$ .

Nous dirons que deux réalisations sont équivalentes si elles sont équivalentes en tant que représentations. L'ensemble des caractères des réalisations de  $G$  forme un sous-ensemble  $X$  de l'ensemble des caractères irréductibles de  $G$ .

Si  $\rho_1 : G \rightarrow \mathrm{GL}(W_1)$  et  $\rho_2 : G \rightarrow \mathrm{GL}(W_2)$  sont des réalisations de  $G$ ,  $\rho_1(G)$  et  $\rho_2(G)$  sont isomorphes. Le choix de bases permet d'identifier  $W_1$  et  $W_2$  à  $\mathbb{C}^{n_1}$  et  $\mathbb{C}^{n_2}$ , on appelle  $G_1$  et  $G_2$  les sous-groupes de  $\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{C})$  et  $\mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{C})$  correspondant ainsi à  $\rho_1(G)$  et  $\rho_2(G)$ . Le théorème de classification de Shephard et Todd prouve alors que  $n_1 = n_2 = n$ , et que  $G_1$  et  $G_2$  sont conjugués dans  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ . Les caractères de  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ont donc le même ensemble de valeurs. La discussion qui précède prouve que le numéro de Shephard-Todd, la dimension, les degrés, le corps de définition de  $G$  sont indépendants du choix de la réalisation.

*Action de  $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$  sur  $X$ .*

Soit  $\rho$  une réalisation de  $G$  et  $\chi$  son caractère. Le corollaire 3.2. prouve que  $\rho$  est rationnelle sur  $K$ . On dispose alors des caractères algébriquement conjugués  $\chi^\sigma$ ,  $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ . Si  $g_1, \dots, g_k$  sont des éléments de  $G$  tels que  $\rho(g_1), \dots, \rho(g_k)$  sont des pseudo-réflexions qui engendrent  $\rho(G)$ , alors  $\rho^\sigma(g_1), \dots, \rho^\sigma(g_k)$  sont des pseudo-réflexions qui engendrent  $\rho^\sigma(G)$  et  $\chi^\sigma$  est un caractère de réalisation. Ainsi  $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$  opère sur  $X$ .

*Action de  $\mathrm{Out}(G)$  sur  $X$ .*

Soient  $A$  et  $B$  des groupes finis,  $\varphi$  un morphisme  $A \rightarrow B$  et  $\rho$  une représentation de  $B$  dans un espace vectoriel  $W$ . L'application  $\rho \circ \varphi$  définit une représentation  $\varphi^*(\rho)$  de  $A$  dans  $W$ . Si  $\varphi$  est surjectif,  $\rho(B) = \varphi^*(\rho)(A)$ ; dans ce cas  $\rho$  est irréductible si et seulement si  $\varphi^*(\rho)$  l'est, et  $\rho(B)$  est un groupe de réflexions si et seulement si  $\varphi^*(\rho)(A)$  en est un.

On a ainsi une action (à droite) de  $\mathrm{Aut}(G)$  sur  $X$ . Il est clair que les automorphismes intérieurs opèrent trivialement et que l'on a une action de  $\mathrm{Out}(G) = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G)$ .

*Multiplication par un caractère linéaire.*

Si  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  est une réalisation de  $G$  et si  $\theta$  est un caractère linéaire, on peut, en identifiant  $\mathbb{C} \otimes V$  à  $V$ , considérer  $\theta \otimes \rho$  comme une représentation de  $G$  dans  $\mathrm{GL}(V)$ . Nous allons voir que sous certaines conditions, on peut trouver  $\varphi \in \mathrm{End}(G)$  tel que  $\theta \otimes \rho = \varphi^*(\rho)$ . Ceci nous permettra, à partir de la table des caractères, d'identifier certains caractères comme étant des caractères de réalisation, et d'autre part de calculer un certain sous-groupe de  $\mathrm{Out}(G)$ .

**Lemme 2.2.** *Soient  $G$  un groupe fini et  $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  une représentation fidèle de  $G$  (on identifie  $G$  avec  $\rho(G)$ ). Soit  $\theta \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ . Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i)  $\exists \varphi \in \mathrm{End}(G), \theta \otimes \rho = \varphi^*(\rho),$

(ii)  $\forall g \in G, \theta(g)\text{Id}_V \in G,$

(iii)  $\forall g \in G, \theta(g)\text{Id}_V \in ZG.$

*Démonstration :* (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) est évident.

(i)  $\Rightarrow$  (ii): si (i) est vérifié,  $(\theta \otimes \rho)(G) \subset G$ , i.e.,  $\forall g \in G, \theta(g)g \in G$  et donc  $\forall g \in G, \theta(g)\text{Id}_V = \theta(g)g.g^{-1} \in G.$

(ii)  $\Rightarrow$  (i): si (ii) est vérifié, il suffit de poser pour tout  $g \in G$   $\varphi(g) = \theta(g)\rho(g)$  pour définir un endomorphisme de  $G$  satisfaisant (i).  $\square$

**Définition 2.3.** Si  $\rho$  et  $\theta$  vérifient les hypothèses du lemme 2.2. et sont tels que les propositions (i), (ii) et (iii) soient vérifiées, on dit que  $(\rho, \theta)$  est un couple admissible.

**Lemme 2.4.** Soit  $(\rho, \theta)$  un couple admissible. Soit  $\varphi \in \text{End}(G)$  tel que  $\theta \otimes \rho = \varphi^*(\rho)$ . On suppose de plus que  $\rho$  est irréductible. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:

(i)  $\theta \otimes \rho$  est fidèle,

(ii)  $\{\theta(g)\text{Id}_V \mid g \in G\} \subset (\theta \otimes \rho)(ZG),$

(iii)  $\varphi$  induit par restriction un automorphisme de  $ZG,$

(iv)  $\varphi$  est un automorphisme de  $G.$

*Démonstration :*

(i)  $\Leftrightarrow$  (iv) et (iv)  $\Rightarrow$  (iii) sont évidents.

(ii)  $\Rightarrow$  (iv): on identifie  $G$  avec  $\rho(G)$ . Soit  $g \in G$ . (ii) assure qu'il existe  $z \in ZG$  tel que  $\theta(g)\text{Id}_V = \varphi(z)$ . Comme  $\rho$  est irréductible,  $ZG \subset \mathbb{C}^*\text{Id}_V$  et il existe  $\zeta \in \mathbb{C}^*$  tel que  $z = \zeta\text{Id}_V$ . On a  $\varphi(z^{-1}g) = \varphi(z)^{-1}\theta(g)g = g$  et donc  $\varphi$  est surjectif.

(iii)  $\Rightarrow$  (ii): comme  $(\rho, \theta)$  est un couple admissible, on a  $\{\theta(g)\text{Id}_V \mid g \in G\} \subset \rho(ZG)$ . Par (iii),  $(\theta \otimes \rho)(ZG) = \rho \circ \varphi(ZG) = \rho(ZG)$ .  $\square$

Si  $(\rho, \theta)$  est un couple admissible et si de plus les conditions équivalentes du lemme 2.4. sont vérifiées, il existe un unique  $\varphi \in \text{End}(G)$  tel que  $\theta \otimes \rho = \varphi^*(\rho)$ . On le note  $\varphi_{\rho, \theta}$ . On note  $\text{Aut}_0(G)$  le sous-groupe de  $\text{Aut}(G)$  engendré par les  $\varphi_{\rho, \theta}$  pour tous les  $(\rho, \theta)$  où  $\rho$  est un caractère de réalisation et  $\theta$  est un caractère linéaire tel que  $(\rho, \theta)$  est un couple admissible.

**Remarque:** pour que  $\varphi_{\rho, \theta}$  soit extérieur, il suffit que  $\theta$  prenne une valeur différente de 1 sur une classe de conjugaison de  $G$  pour laquelle le caractère de  $\rho$  ne s'annule pas. C'est en particulier le cas si la restriction de  $\theta$  à  $ZG$  est différente de l'identité. Nous verrons plus tard une autre situation où ceci se produit.

*Application aux groupes de réflexions.*

Soient  $G$  un groupe de réflexions irréductible de dimension  $r$  et  $\rho : G \rightarrow V$  sa réalisation naturelle.

Commençons par déterminer le sous-groupe de  $\text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$  formé des caractères linéaires  $\theta$  tels que  $(\rho, \theta)$  soit un couple admissible.

Nous reprenons les notations de [BrMi]:  $\mathcal{A}$  désigne l'ensemble des hyperplans de réflexions de  $G$ . Si  $H \in \mathcal{A}$ , on note  $e_H$  l'ordre du fixateur  $G_H$  de  $H$  dans  $G$ . Pour tous  $g \in G$  et  $H \in \mathcal{A}$ , on a  $G_{gH} = gG_Hg^{-1}$ , donc  $G$  opère sur  $\mathcal{A}$ . L'entier  $e_H$  ne dépend que de l'orbite  $\Omega$  de  $H$  pour cette action; on pose  $e_\Omega := e_H$ . Le caractère  $\det_\Omega$  est le caractère noté  $\det_{V,H}$  dans la proposition 4.3 de [BrMi]. Il est caractérisé par la propriété suivante: pour toute pseudo-réflexion  $s \in G$ , on a

$$\det_\Omega(s) = \begin{cases} \det_V(s) & \text{s'il existe } H \in \Omega \text{ tel que } s \in G_H, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit  $c$  l'ordre de  $ZG$ . Soit  $z$  un générateur de  $ZG$ . Pour tout  $\Omega \in \mathcal{A}/G$ , on pose  $c_\Omega := (c \vee e_\Omega)/c$ .

**Lemme 2.5.** *Le groupe des caractères linéaires  $\theta$  de  $G$  tels que  $(\rho, \theta)$  soit un couple admissible est engendré par  $\{\det_\Omega^{c_\Omega} \mid \Omega \in \mathcal{A}/G\}$ .*

*Démonstration :* Soit  $\Omega \in \mathcal{A}/G$ . D'après la définition de  $\det_\Omega$ , il est clair que  $\det_\Omega(G) = \mu_{e_\Omega}$ . Donc  $\det_\Omega^{c_\Omega}$  est à valeurs dans  $\mu_c$  et  $(\rho, \det_\Omega^{c_\Omega})$  est un couple admissible.

Réciproquement, soit  $\theta \in \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$  tel que  $(\rho, \theta)$  soit un couple admissible. Il existe des entiers  $k_\Omega$  tels que  $\theta = \prod_{\Omega \in \mathcal{A}/G} \det_\Omega^{k_\Omega}$ . Pour tout  $\Omega \in \mathcal{A}/G$  et tout  $H \in \Omega$ ,  $\theta(s_H) = \zeta_{e_\Omega}^{k_\Omega}$ . Comme  $\theta(s_H) \in \mu_c$ , on a  $c_\Omega \mid k_\Omega$ .  $\square$

**Remarque:** comme nous le verrons dans le tableau 1, on a dans la plupart des cas  $c_\Omega = 1$ , et tous les caractères linéaires conviennent. Dans le cas général, toutes les informations nécessaires au calcul sont dans les tables de [BrMaRo].

La remarque qui suit le lemme 2.4. permet d'établir facilement le critère suivant:

**Lemme 2.6.** *Soit  $\Omega \in \mathcal{A}/G$  tel que  $(\rho, \det_\Omega)$  soit un couple admissible. Supposons que  $r > 2$  ou  $e_\Omega > 2$ . Alors  $\varphi_{(\rho, \det_\Omega)}$  est un automorphisme extérieur.*

#### *Réalisations des groupes de réflexions irréductibles.*

Etant donnée la table des caractères d'un groupe de réflexions irréductible  $G$  de dimension  $n$ , on cherche à déterminer l'ensemble  $X$  des caractères de réalisations.

On sait *a priori* que ces caractères sont fidèles, de degré  $n$ , et que de plus ils prennent sur certains éléments (qui seront les pseudo-réflexions dans la réalisation correspondante) des valeurs de la forme  $n - 1 + \zeta$  où  $\zeta$  est une racine de l'unité. Ces contraintes permettent de sélectionner certains caractères *candidats* pour être des caractères de pseudo-réflexions. On sait de plus que parmi ces *candidats* figure au moins un caractère de réalisation.

Chacun des groupes  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  et  $\text{Aut}_0(G)$ , opérant sur  $\text{Irr}(G)$ , correspond à un sous-groupe du groupe des permutations de  $\text{Irr}(G)$ . On note  $H$  le produit de ces deux sous-groupes. L'examen des tables de caractères permet de vérifier que la situation favorable suivante se produit: si  $G$  est l'un quelconque des groupes de réflexions exceptionnels, alors l'action de  $H$  est transitive sur l'ensemble des *candidats*. Comme la propriété d'être un caractère de réalisation est conservée par cette action, il en

résulte que tous les *candidats* sont des caractères de réalisation. L'ensemble  $X$  est alors parfaitement déterminé.

Dans le tableau 1 sont regroupés les résultats de ces calculs pour les groupes de réflexions exceptionnels. Chaque ligne correspond à un groupe de réflexions  $G$ :

- la première colonne contient le numéro de Shephard-Todd du  $G$ ;
- la seconde donne la structure de  $G^{\text{ab}}$ , l'abélianisé de  $G$ . Si les couples  $(\rho, \theta)$  ne sont pas tous admissibles, on donne également entre parenthèses le sous-groupe de  $G^{\text{ab}}$  formé des  $\theta$  tels que pour toute réalisation  $\rho$ ,  $(\rho, \theta)$  soit admissible;
- la troisième colonne donne le corps de définition  $K$  de  $G$  (une telle liste est déjà donnée dans [Benard2] et [Benson]);
- dans la quatrième colonne figure la structure du groupe  $\text{Out}_0(G)$ , image de  $\text{Aut}_0(G)$  dans  $\text{Out}(G)$  (dans tous les cas examinés,  $\text{Out}_0(G) \simeq \text{Aut}_0(G)$ ; le lemme 2.6. permet de le prouver dans un grand nombre de cas);
- la dernière colonne donne le nombre  $|X|$  de caractères de réalisations de  $G$ .

**Remarques:**

- le groupe  $\text{Out}_0(G)$  est en général un sous-groupe strict de  $\text{Out}(G)$ . D'autres automorphismes extérieurs peuvent être déduits de symétries des diagrammes de [BrMaRo] (par exemple celui qui échange les deux nœuds du diagramme de  $G_5$ ). Dans certains cas, l'action de certains éléments de  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  sur  $X$  (notamment la conjugaison complexe) peut être décrite à l'aide d'automorphismes extérieurs évidents sur les présentations. Ces considérations ne permettent cependant pas de décrire exhaustivement  $\text{Out}(G)$  l'aide du diagramme de  $G$  (l'automorphisme extérieur d'ordre 2 de  $S_6$  ne correspond ni à un automorphisme de diagramme, ni à la multiplication par un caractère linéaire);
- si le nombre total de pseudo-réflexions, qui se calcule à partir des degrés du groupe, est indépendant du choix de la réalisation, le fait qu'un élément donné du groupe fini sous-jacent au groupe de réflexions corresponde à une pseudo-réflexion dépend de la réalisation. Par exemple, pour le groupe  $G_5$ , il y a six classes de conjugaisons, chacune constituée de quatre éléments, susceptibles de correspondre à des pseudo-réflexions. Dans chacune des six réalisations, il y a toujours quatre de ces classes qui correspondent effectivement à des pseudo-réflexions (soit un total de seize pseudo-réflexions), mais ce ne sont pas toujours les mêmes.

### 3 Fin de la démonstration du théorème.

Si  $G$  est un groupe fini,  $\chi$  un caractère complexe irréductible de  $G$  et  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ , on note  $m_K(\chi)$  l'indice de Schur de  $\chi$  sur  $K$ . Le corps engendré sur  $K$

S&T	$G^{\text{ab}}$	$K$	$\text{Out}_0(G)$	$ X $
4	$C_3 (1)$	$\mathbb{Q}(\zeta_3)$	1	2
5	$C_3 \times C_3$	$\mathbb{Q}(\zeta_3)$	$S_3$	6
6	$C_2 \times C_3 (C_2)$	$\mathbb{Q}(\zeta_{12})$	$C_2$	4
7	$C_2 \times C_3 \times C_3$	$\mathbb{Q}(\zeta_{12})$	$C_2 \times S_3$	12
8	$C_4$	$\mathbb{Q}(i)$	$C_2 \times C_2$	4
9	$C_2 \times C_4$	$\mathbb{Q}(\zeta_8)$	$C_2 \times C_2 \times C_2$	8
10	$C_3 \times C_4$	$\mathbb{Q}(\zeta_{12})$	$C_2 \times C_2 \times C_2$	8
11	$C_2 \times C_3 \times C_4$	$\mathbb{Q}(\zeta_{24})$	$C_2 \times C_2 \times C_4$	16
12	$C_2$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	$C_2$	2
13	$C_2 \times C_2$	$\mathbb{Q}(\zeta_8)$	$C_2 \times C_2$	4
14	$C_2 \times C_3$	$\mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt{-2})$	$C_2 \times C_2$	4
15	$C_2 \times C_2 \times C_3$	$\mathbb{Q}(\zeta_{24})$	$C_2 \times C_2 \times C_3$	8
16	$C_5$	$\mathbb{Q}(\zeta_5)$	$C_4$	8
17	$C_2 \times C_5$	$\mathbb{Q}(\zeta_{20})$	$C_2 \times C_4$	16
18	$C_3 \times C_5$	$\mathbb{Q}(\zeta_{15})$	$C_2 \times C_4$	16
19	$C_2 \times C_3 \times C_5$	$\mathbb{Q}(\zeta_{60})$	$C_2 \times C_2 \times C_4$	32
20	$C_3$	$\mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt{5})$	$C_2$	4
21	$C_2 \times C_3$	$\mathbb{Q}(\zeta_{12}, \sqrt{5})$	$C_2 \times C_2$	8
22	$C_2$	$\mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$	$C_2$	4
23	$C_2$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	1	2
24	$C_2$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$	1	2
25	$C_3$	$\mathbb{Q}(\zeta_3)$	$C_3$	6
26	$C_2 \times C_3$	$\mathbb{Q}(\zeta_3)$	$C_3$	6
27	$C_2$	$\mathbb{Q}(\zeta_3, \sqrt{5})$	1	4
28	$C_2 \times C_2$	$\mathbb{Q}$	$C_2 \times C_2$	4
29	$C_2$	$\mathbb{Q}(i)$	$C_2$	4
30	$C_2$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	$C_2$	4
31	$C_2$	$\mathbb{Q}(i)$	$C_2$	4
32	$C_3$	$\mathbb{Q}(\zeta_3)$	$C_2$	4
33	$C_2$	$\mathbb{Q}(\zeta_3)$	1	2
34	$C_2$	$\mathbb{Q}(\zeta_3)$	$C_2$	4
35	$C_2 (1)$	$\mathbb{Q}$	1	1
36	$C_2$	$\mathbb{Q}$	1	1
37	$C_2$	$\mathbb{Q}$	$C_2$	2

Tableau 1: corps de définition, automorphismes extérieurs et nombre de réalisations.

par les valeurs de  $\chi$  est noté  $K(\chi)$ . Nous allons commencer par rappeler ou établir quelques propriétés utiles de l'indice de Schur.

**Lemme 3.1.** *Soit  $G$  un groupe fini. Soit  $\rho$  une représentation complexe irréductible de  $G$  et soit  $\chi$  son caractère. Soit  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$  contenant les valeurs de  $\chi$ .*

- (i) *Si  $\gamma$  est un caractère irréductible de  $G$  rationnel sur  $K$ , alors  $m_K(\chi)$  divise  $(\chi|\gamma)$ .*
- (ii) *Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$  et si  $\psi$  est un caractère irréductible de  $H$ , alors  $m_K(\chi)$  divise  $m_K(\psi)[K(\psi) : K](\psi^G|\chi)$ .*
- (iii) *Soit  $g \in G$  et supposons que  $\rho(g)$  admette  $\zeta \in K$  comme valeur propre avec la multiplicité  $d$ . Alors  $m_K(\chi)$  divise  $d$ .*

*Démonstration :* (i) et (ii) figurent dans [Isaacs] (lemme 10.2.(c) et lemme 10.4.).

(iii) se déduit de (ii): on prend pour sous-groupe  $H$  le sous-groupe cyclique de  $G$  engendré par  $g$  et pour caractère  $\psi$  l'unique caractère de  $H$  tel que  $\psi(g) = \zeta$ . On a  $d = (\psi|\chi_H)$ . Le caractère  $\psi$  est rationnel sur  $K$  et donc  $m_K(\psi)[K(\psi) : K] = 1$ , d'où le résultat.  $\square$

Du (iii) du lemme, on déduit aisément le résultat suivant:

**Corollaire 3.2.** ([ClEw]) *La représentation naturelle d'un groupe de réflexions  $G$  est rationnelle sur le corps de définition de  $G$ .*

On se donne un groupe fini  $G$  et un sous-corps  $K$  de  $\mathbb{C}$ .

**Définition 3.3.** *Soit  $n$  un entier tel que  $\zeta_n \in K$ . On appelle crible d'ordre  $n$  et on note  $c_n$  la fonction:*

$$\begin{aligned} \text{Irr}(G) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \chi &\longmapsto \bigwedge_{\substack{g \in G \\ g^n = 1}} \bigwedge_{\zeta \in \mu_n} \text{mult}_{g,\chi}(\zeta), \end{aligned}$$

où  $\text{mult}_{g,\chi}(\zeta)$  désigne la multiplicité de  $\zeta$  comme valeur propre de l'image de  $g$  par une représentation de caractère  $\chi$ .

D'après le lemme 3.1., pour tout  $\chi \in \text{Irr}(G)$  et tout  $n$  tel que  $\zeta_n \in K$ , on a  $m_K(\chi) | c_n(\chi)$ .

*Fin de la démonstration du théorème 0.2.*

L'examen des tables de caractères des groupes de réflexions exceptionnels permet d'établir le fait suivant:

**Fait 1.** *Soient  $G$  un groupe de réflexions complexe et  $K$  son corps de définition. Tous les caractères de  $G$  sont à valeurs dans  $K$ .*

### Algorithme

Les données sont un groupe fini  $G$  (dont on dispose de la table des caractères) et un corps  $K$ .

- Étape 1: on calcule  $c_n$  pour tous les caractères irréductibles de  $G$ .  
On constitue une liste  $L$  des  $\chi \in \text{Irr}(G)$  tels que  $c_n(\chi) = 1$ .
- Étape 2: on forme la liste  $T := L \otimes L$  des produits tensoriels d'éléments de  $L$ .
- Étape 3: pour chaque  $\chi \in \text{Irr}(G) - L$ , on calcule les produits scalaires  $(\chi|\psi)$  où  $\psi$  parcourt  $T$ . Si l'un de ces produits scalaires vaut 1, on ajoute  $\chi$  à la liste  $L$ .
- Étape 4: si  $L = \text{Irr}(G)$ , on arrête; sinon, on repart à l'étape 2 avec la nouvelle liste  $L$ .

**Lemme 3.4.** *Soient  $G$  un groupe et  $K$  un corps tel que tous les caractères de  $G$  sont à valeurs dans  $K$ . Si l'algorithme ci-dessus s'arrête, alors tous les caractères de  $G$  sont rationnels sur  $K$ .*

*Démonstration :* En utilisant les (i) et (iii) du lemme 3.1., on vérifie sans peine qu'à chaque instant la liste  $L$  ne peut contenir que des caractères d'indice de Schur sur  $K$  égal à 1 et donc également rationnels sur  $K$  (tous les caractères étant à valeurs dans  $K$ ).  $\square$

Le calcul effectué avec GAP permet d'établir le fait suivant:

**Fait 2.** *Si  $G$  est un groupe de réflexions complexe exceptionnel et si  $K$  est son corps de définition, alors l'algorithme ci-dessus s'arrête.*

La démonstration du théorème 0.2. est achevée.

**Remarque:** il est clair que l'algorithme que nous avons donné est en pratique très peu performant. Le fait 2 a en fait été vérifié grâce à un algorithme plus efficace, réduisant le nombre de calculs nécessaires. De plus, il s'avère que, dans presque tous les cas, l'algorithme s'arrête dès la première passe.

Notre démonstration repose sur la classification de Shephard et Todd. Il serait évidemment préférable de disposer d'une preuve directe, utilisant uniquement la définition abstraite d'un groupe de réflexions complexe. On peut cependant noter que pour deux types de caractères, il est possible d'établir directement la rationalité sur le corps de définition:

- pour les caractères linéaires, car ils sont à valeurs dans le corps de réalisation;
- pour les caractères de réalisation, par le corollaire 3.2..

Pour parvenir à une démonstration directe, il serait souhaitable de mieux comprendre la géométrie des autres représentations irréductibles. En effet, certaines propriétés de "régularité" de la distribution des valeurs propres des images des pseudo-réflexions par ces représentations se dégagent de l'étude des tables de caractères des groupes exceptionnels, et permettent de comprendre pourquoi le critère du lemme 3.1.(iii) est utile. Une étape pourrait être de trouver une formulation simple et une démonstration directe de ces propriétés.

## Références

- [Ariki] S. Ariki, *Representation Theory of a Hecke Algebra of  $G(r, p, n)$* , J. Algebra **177** (1995), 164-185.
- [ArKo] S. Ariki, K. Koike, *A Hecke algebra of  $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr S_n$  and construction of its irreducible representations*, Advances in Math. **106** (1994), 216-243.
- [Benard1] M. Benard, *On the Schur indices of characters of the exceptional Weyl groups*, Ann. of Math. **94** (1971), 89-107.
- [Benard2] M. Benard, *Schur Indices and Splitting Fields for the Unitary Reflection Groups*, J. Algebra **38** (1976), 318-342.
- [Benson] D. J. Benson, *Polynomial Invariants of Finite Groups*, London Math. Soc. Lecture Note **190**, 1993.
- [BrMaRo] M. Broué, G. Malle, R. Rouquier, *On complex reflection groups and their associated braid groups*, Representations of Groups (B. N. Allison and G. H. Cliff, eds.), Canadian Mathematical Society, Conference Proceedings, vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, 1995, pp. 1-13.
- [BrMi] M. Broué, J. Michel, *Sur certains éléments réguliers des groupes de Weyl et les variétés de Deligne-Lusztig associées*, Proceedings de la Semaine de Luminy "Représentations des groupes réductifs finis", Birkhäuser, 1996 (à paraître).
- [ClEw] A. Clark, J. Ewing, *The realization of Polynomial Algebras as Cohomology Rings*, Pacific J. of Math. **50** (1974), 425-434.
- [Cohen] A. M. Cohen, *Finite complex reflection groups*, Ann. scient. Éc. norm. Sup. **9** (1976), 379-436.
- [Isaacs] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Academic Press, 1976.
- [JaKe] G. James, A. Kerber, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **16**, Addison-Wesley, 1981.
- [Schönert] M. Schönert et al., *GAP- Groups, Algorithms and Programming*, fourth ed., Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, Germany, 1994.
- [Serre] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1967.
- [ShTo] G. C. Shephard et J. A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math. **6** (1954), 274-304.

David Bessis: Équipe des groupes finis, UMR 9994 et Université Paris 7,  
2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.

E-mail address: bessis@mathp7.jussieu.fr