

Polynômes de Shabat et mesure harmonique

Philippe Biane

ABSTRACT. On donne une caractérisation du plongement d'un arbre planaire dans \mathbf{C} associé à un polynôme de Shabat au moyen de la théorie du potentiel.

1. Introduction

Cette note est inspirée par l'article [BZ], qui décrit "la vraie forme d'un arbre". On y voit que chaque arbre planaire admet un plongement privilégié dans le plan complexe (à une similitude près). Plus précisément, on a le résultat suivant

THÉORÈME 1.1. *Pour tout arbre planaire Γ il existe un polynôme complexe P admettant pour valeurs critiques au plus 0 et 1, et tel que l'image réciproque du segment $[0,1]$ par ce polynôme soit la réunion des arêtes d'un arbre plan qui est un plongement de Γ dans le plan complexe, alors que les sommets sont les images réciproques des points 0 et 1. Le polynôme ainsi défini est unique à un changement de variable $z \mapsto az + b$ ou à une substitution $P \mapsto 1 - P$ près.*

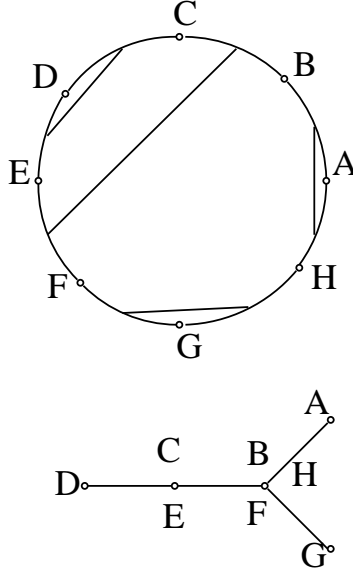
Le polynôme ainsi obtenu s'appelle le polynôme de Shabat de l'arbre, et nous nommerons plongement de Shabat le plongement de l'arbre correspondant. La démonstration de ce théorème n'est pas élémentaire, elle utilise la théorie des "Dessins d'enfants" de Grothendieck. On peut trouver une liste de dessins de quelques uns de ces arbres canoniques dans [BZ] ou dans [LZ], page 89. Le but de cette note est de donner une caractérisation de la forme des ces arbres au moyen de la théorie du potentiel, et de fournir par la même occasion une preuve du théorème 1. Cette preuve n'est pas totalement élémentaire, car elle utilise des résultats sur la représentation conforme et l'équation de Löwner.

Nous commençons, dans la section 2, par rappeler un codage bien connu des arbres planaires par des partitions noncroisées, puis dans la section 3 on étudie la transformation conforme de l'extérieur d'un arbre pour donner l'interprétation attendue du polynôme de Shabat, ainsi que la preuve du théorème 1.

2. Arbres planaires et partitions noncroisées

Considérons, sur le cercle unité du plan complexe, les racines $2n^e$ de l'unité, et les arcs de cercles qui les joignent. Soit π une partition de l'ensemble de ces arcs en n paires, qui soit noncroisée. Ce terme signifie que si on trace les n segments de droites joignant les milieux des arcs se trouvant dans un même bloc de la partition

π , ces segments sont deux à deux d'intersections vides. Le quotient du cercle par la relation d'équivalence obtenue en identifiant les deux arcs de chacune des n paires est de façon naturelle un arbre planaire. Il est facile de voir que l'on peut obtenir ainsi tout arbre planaire, et que la partition correspondante est unique, à une rotation globale du cercle d'un angle multiple entier de $\frac{\pi}{n}$ près. Soyons maintenant un peu plus précis, et exigeons que lors de chaque identification entre deux arcs, celle-ci se fasse suivant la longueur d'arc naturelle. Autrement dit, si on identifie les arcs $[\frac{2k\pi}{2n}, \frac{(2k+1)\pi}{2n}]$ et $[\frac{(2l-1)\pi}{2n}, \frac{2l\pi}{2n}]$ (des raisons de parité évidentes font que seules de telles identifications sont possibles), on doit identifier les points $\frac{(2k+\theta)\pi}{2n}$ et $\frac{(2l-\theta)\pi}{2n}$, pour $\theta \in [0, 1]$. Voici un exemple, pour $n = 4$, de partition noncroisée, avec l'arbre planaire associé.



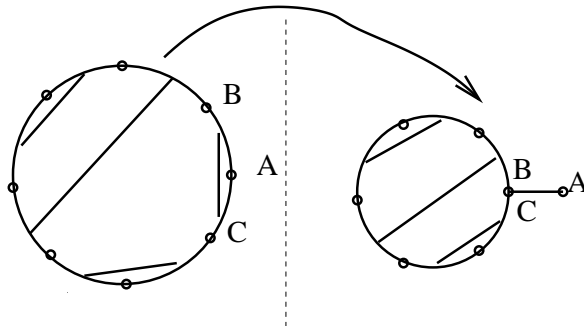
3. Transformation conforme et mesure harmonique

PROPOSITION 3.1. Soit π une partition par paires, noncroisée, du cercle unité. Il existe une unique application conforme de l'extérieur du disque unité dans \mathbf{C} , admettant un développement de Laurent à l'infini de la forme $z + \dots$, se prolongeant par continuité au bord du disque, et tel que la relation d'équivalence sur le cercle unité induite par ce prolongement soit celle donnée par la partition noncroisée π . L'image du cercle par cette application est un plongement dans \mathbf{C} de l'arbre associé à la partition π .

Rappelons que la relation d'équivalence induite par le prolongement est celle qui identifie les points du cercle ayant la même image par ce prolongement. On peut construire cette application conforme de la façon suivante. On choisit une feuille de l'arbre (un sommet qui a un seul voisin dans l'arbre), celle-ci correspond à une racine $2n^e$ de l'unité dont les arcs adjacents sont dans un même bloc de la partition π . Supposons pour fixer les idées que cette racine de l'unité soit 1, alors les applications $\phi_\theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{n}]$ données par la formule

$$\phi_\theta(z) = \left(z^2 + 1 + 2 \sin^2(\theta/2)z + (z+1)\sqrt{z^2 + 1 - 2z \cos \theta} \right) / (2z)$$

”recollent” les deux intervalles de longueur d’arc θ situés de part et d’autre de 1 selon leur longueur d’arc. Elles appliquent conformément l’extérieur du disque unité sur le domaine extérieur à la réunion du disque centré en 0, de rayon $\cos^2(\theta/2)$ et du segment $[\cos^2(\theta/2), (1 + \sin(\theta/2))^2]$. Voir la figure ci-dessous.



La partition noncroisée π , transportée sur le nouveau cercle C_1 , donne une partition noncroisée de $n - 1$ paires d’arcs, qui correspond à l’arbre planaire obtenu en ôtant à l’arbre la feuille initiale. Ces arcs ne sont plus identifiés entre eux par la longueur d’arc, puisqu’on a appliqué la transformation $\phi_{\pi/n}$ qui déforme les distances sur le cercle, toutefois si on choisit une feuille du nouvel arbre, on peut encore trouver une famille d’applications analogue aux ϕ_θ ci-dessus, qui recollent les deux arcs de cercle suivant l’identification voulue. Ces applications se construisent en résolvant une équation de Löwner (voir par exemple la partie 3 de [MR]). On obtient alors une transformation conforme de l’extérieur du cercle C_1 sur l’extérieur de la réunion d’un cercle de rayon plus petit et d’un arc analytique issu de ce cercle. On peut alors itérer le procédé et au bout de n étapes on obtient l’application ψ . \square

De par sa normalisation à l’infini, la transformation conforme ainsi construite est unique à une translation près, de plus elle applique l’extérieur du disque unité sur l’extérieur d’un arbre planaire plongé dans \mathbf{C} . On a ainsi associé de façon canonique, à chaque arbre planaire, une application conforme ψ et un plongement de l’arbre planaire dans \mathbf{C} . Ce plongement peut être caractérisé par les propriétés suivantes, que nous énoncerons sous forme de théorème. Avant cela il nous faut tout d’abord rappeler la notion de mesure harmonique. Soit K un sous ensemble compact du plan complexe. On suppose que K est non polaire, il existe alors une unique mesure de probabilité μ_K , portée par K , qui minimise la fonctionnelle

$$E(\mu) = \int_{K \times K} \log(|z_1 - z_2|^{-1}) d\mu(z_1) d\mu(z_2).$$

(K est non polaire s’il existe une mesure de probabilités μ telle que $E(\mu) < +\infty$). La mesure μ_K s’appelle la mesure harmonique de K . Si le complémentaire de K est connexe, et si φ est une transformation conforme de l’extérieur du disque unité sur l’extérieur de K , alors cette transformation conforme se prolonge par continuité sur le cercle unité, et l’image de la mesure de probabilité uniforme sur le cercle par cette application est la mesure μ_K . Cette mesure de probabilité est la ”loi d’arrivée sur K d’un mouvement brownien partant de l’infini”. On renvoie à [D] pour plus de précisions sur cette interprétation probabiliste de la mesure harmonique. Considérons un arbre planaire quelconque plongé dans \mathbf{C} . Pour éviter des pathologies, nous supposons que chaque arête de l’arbre est un arc de classe C^1 . On peut alors distinguer, pour chaque arête, deux côtés, et assigner une partie de la mesure

harmonique à chaque côté, correspondant à la probabilité, pour le mouvement brownien, de l'atteindre par ce côté. Si l'on utilise la représentation conforme de l'extérieur du disque unité sur l'extérieur de l'arbre les $n - 1$ sommets de l'arbre sont images de $2n$ points sur le cercle, et chaque arête de l'arbre est image de 2 des $2n$ arcs de cercle joignant deux de ces points consécutifs. Chacun de ces arcs de cercle correspond à un des côtés de l'arête de l'arbre, et la mesure harmonique sur chaque côté est l'image par la transformation conforme de la mesure uniforme sur l'arc correspondant. Nous avons donc démontré le

THÉORÈME 3.2. *Soit Γ un arbre planaire, il existe un plongement de cet arbre dans \mathbf{C} tel que*

- i) la mesure harmonique de chaque arête est égale à $\frac{1}{n}$*
 - ii) les mesures harmoniques sur les deux côtés de chaque arête coïncident.*
- Ce plongement est unique à une similitude près.*

La première propriété explique pourquoi, sur les dessins d'arbres, les sommets tendent à s'accumuler vers les bords des feuilles, il s'agit là du "pouvoir des pointes", bien connu en électrostatique, qui concentre la mesure harmonique vers les extrémités. La deuxième propriété permet de comprendre pourquoi les arêtes ont tendance à s'incurver.

Nous allons maintenant voir que le plongement d'un arbre planaire que nous venons de construire est bien celui de Shabat, ce qui démontrera le Théorème 1.1. Pour cela, considérons l'application $z \mapsto z^n$. Elle envoie le cercle unité sur lui-même, les racines $2n^e$ de l'unité sur les points -1 et 1 , et les arcs qui les joignent sur les deux arcs de cercle joignant -1 à 1 . L'application $z \mapsto \frac{1}{4}(z + \frac{1}{z} + 2)$ est une transformation conforme de l'extérieur du disque unité sur l'extérieur du segment $[0, 1]$, qui se prolonge continûment au cercle, et qui identifie les points du cercle ayant la même abscisse. Considérons maintenant η , l'application réciproque de ψ , définie sur l'extérieur de l'arbre. Les considérations précédentes entraînent que l'application $P(z) = \frac{1}{4}(\eta(z)^n + \eta(z)^{-n} + 2)$ envoie de façon conforme l'extérieur de l'arbre sur l'extérieur du segment $[0, 1]$, et de plus, au vu des identifications qui ont mené à la construction de l'arbre, on peut prolonger P par continuité à \mathbf{C} tout entier. L'application P , étant analytique dans le complémentaire de l'arbre, et continue sur \mathbf{C} tout entier, est analytique dans \mathbf{C} , d'après le théorème de Morera ([R]). Comme elle vérifie $P(z) = z^n + O(z^{n-1})$ à l'infini, c'est un polynôme de degré n , et l'arbre plongé Γ est égal à $P^{-1}([0, 1])$. On vérifie également facilement que les seules valeurs critiques de ce polynôme sont 0 et 1 .

References

- [BZ] J. Bétréma, A. Zvonkin, *La vraie forme d'un arbre*. TAPSOFT '93: theory and practice of software development (Orsay, 1993), 599–612, Lecture Notes in Comput. Sci., 668, Springer, Berlin, 1993. 05C05
- [D] J.L. Doob, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 262. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [LZ] S. Lando, A. Zvonkin, *Graphs on surfaces and their applications*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Low dimensional topology, II. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [MR] D. E. Marshall, S. Rhode, *the Löwner differential equation and slit mapping*, preprint, <http://www.math.washington.edu/~rohde/papers/publications.html>
- [R] W. Rudin, *Real and complex analysis*. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

CNRS, DMA, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 45, RUE D'ULM 75005 PARIS, FRANCE
E-mail address: Philippe.Biane@ens.fr