

CHEMINS DE LITTELMANN ET

MÉTHODE DE LAPLACE

P. Biane, P. Bougerol, N. O’Connell

Littelman paths and Brownian paths.

Duke Math. J. 130 (2005), no. 1, 127–167.

+ travail en cours

Motivations

Berenstein-Zelevinsky (2001): formules polyédrales pour les multiplicités des poids:

$$V_\mu = \sum m_\lambda V_\mu^{(\lambda)}$$

V_μ = module de plus haut poids μ .

m_μ^λ = nombre de points entiers d'un polyèdre explicite $P(\lambda, \mu)$.

idem pour les coefficients de Littlewood-Richardson,

$$V_\lambda \otimes V_\mu = \sum c_{\lambda\mu}^\nu V_\nu$$

Leur méthode utilise la correspondance (Lusztig) entre les paramétrisations de la base canonique et de la variété totalement positive

Variété totalement positive

exemple: $SL(3)$

$$w_0 = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2 \quad (*)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & v_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$v_1 = \frac{u_2 u_3}{u_1 + u_3} \quad v_2 = v_1 + v_3 \quad v_3 = \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_3}$$

d'autre part les deux paramétrisations de la base canonique de Lusztig correspondant aux deux factorisations (*) sont reliées par

$$t_1 = s_2 + s_3 - \min(s_1, s_3) \quad s_2 = \min(s_1, s_3) \quad s_3 = s_1 + s_2 - \min(s_1, s_3)$$

Méthode de Laplace ("tropicalisation")

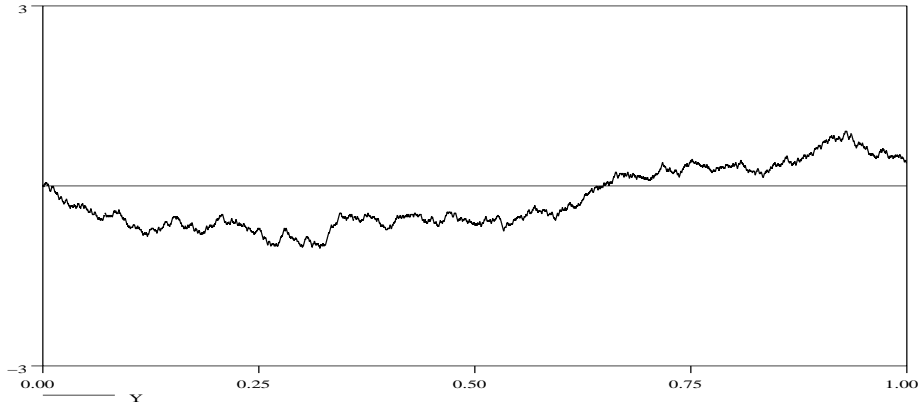
$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\varepsilon \log(x^{-1/\varepsilon} y^{-1/\varepsilon})$$
$$\min(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\varepsilon \log(x^{-1/\varepsilon} + y^{-1/\varepsilon})$$

On va donner une approche de la théorie de Littelmann qui permet de comprendre pourquoi la tropicalisation joue un rôle.

THÉORIE DE LITTELMANN

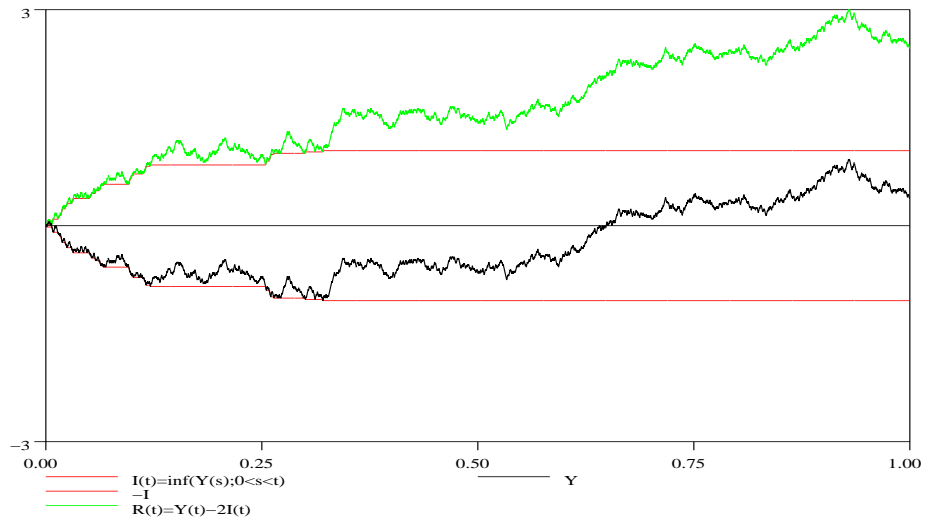
On va décrire la théorie de Littelmann à l'aide de la *transformation de Pitman*

$$Y : [0, T] \rightarrow \mathbf{R}, \quad Y(0) = 0$$



$$PY(t) = Y(t) - 2 \inf_{0 \leq s \leq t} Y(s)$$

$$I(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} Y(s) \quad R(t) = PY(t) = Y(t) - 2I(t)$$

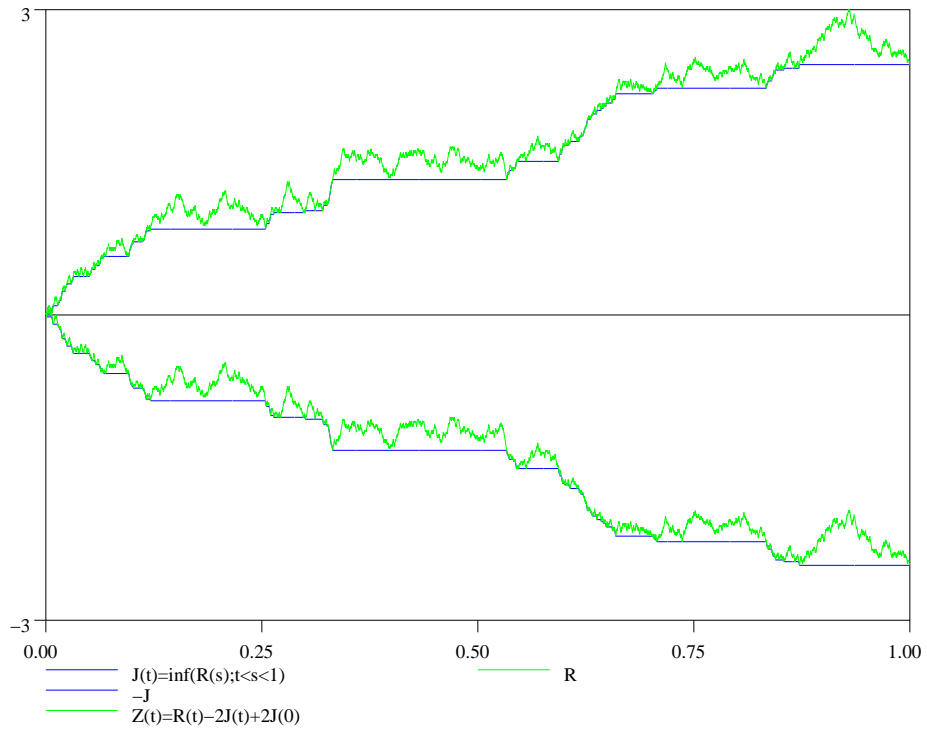


Pour tout t on a $PY(t) \geq 0$, en particulier $PPY = PY$.

(thm de Pitman: Si $Y(t)$ est un mouvement Brownien, alors $PY(t)$ est la norme d'un mouvement Brownien de dimension 3)

$$J(t) = \inf_{t \leq s \leq T} R(s)$$

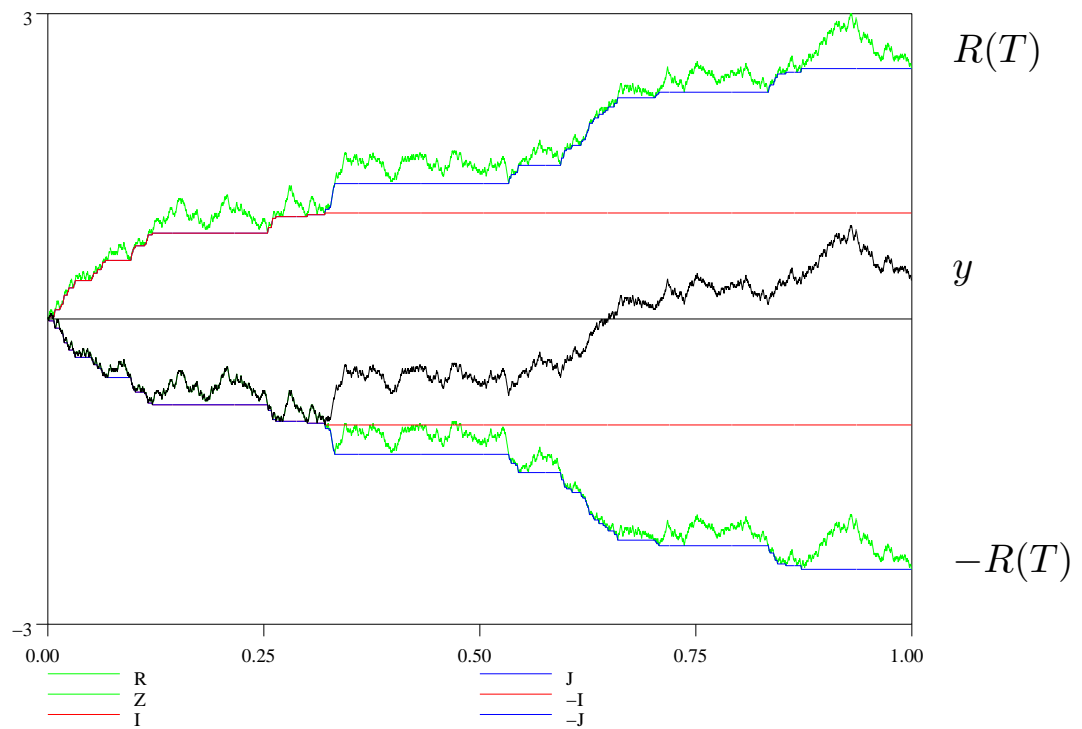
$$W(t) = R(t) - 2J(t)$$



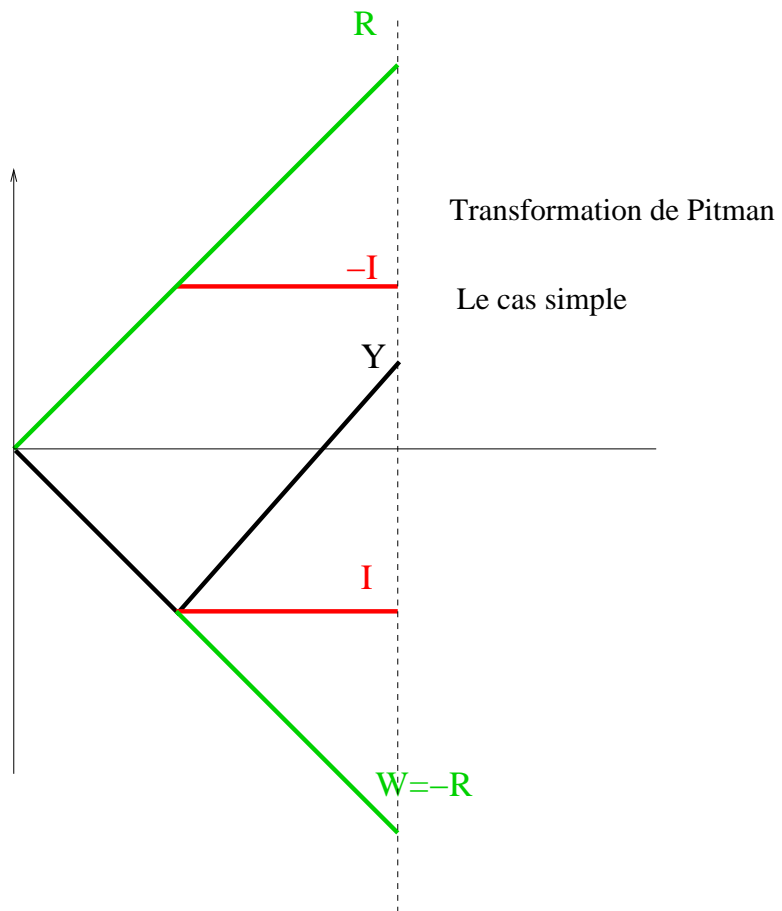
Soit $y \in [-R(T), R(T)]$ et $x = (R(T) - y)/2$.

Il existe un unique chemin X tel que $PW = PY = R$ et $X(T) = y$.

$$X(t) = R(t) - 2J(t) \wedge x$$

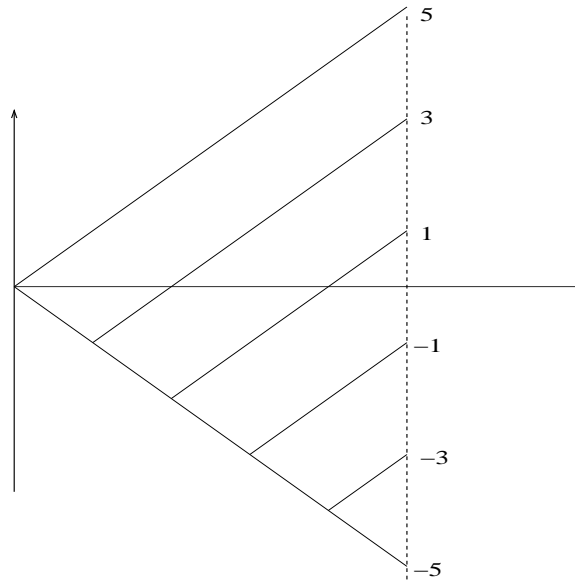


Toute la combinatoire de la transformation est présente dans l'exemple le plus simple.



le module de Littelmann

Le module de Littelmann associé à un chemin $R \geq 0$ tel que $R(T) = n$ est l'ensemble des chemins tels que $PY = R$ et $Y(T) = n - 2k; 0 \leq k \leq n$.



On peut également considérer le module "continu" (sans la quantification de $Y(T)$).

Opérateurs de Littelmann

Soit Y un chemin tel que $Y(T)$ est entier, alors il existe au plus un chemin EY , (FY) tel que

$$PY = PEY = PFY$$

$$EY(T) = Y(T) + 2$$

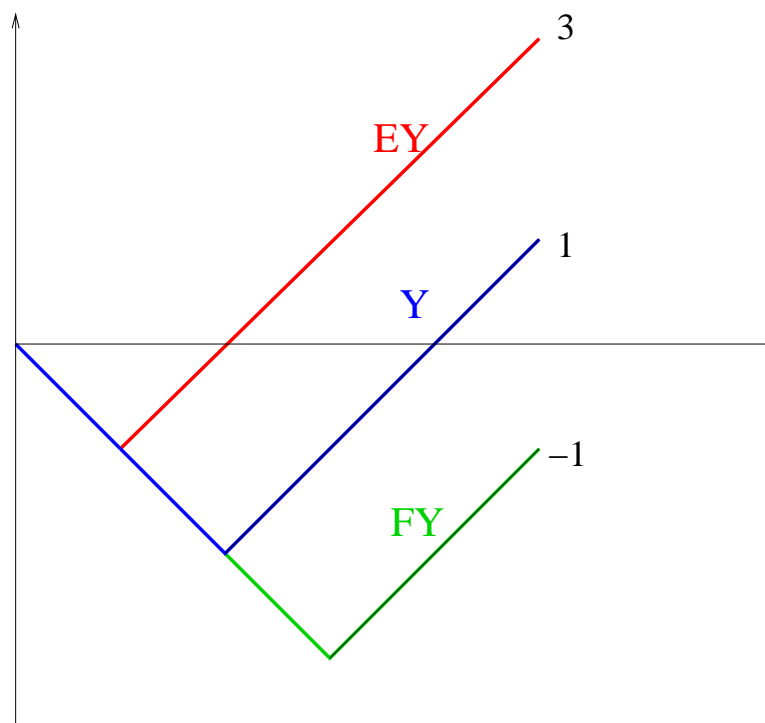
$$FY(T) = Y(T) - 2$$

E et F sont les opérateurs de Littelmann sur les chemins.

On peut également définir les opérateurs de Littelmann "continus" pour $x \geq 0$, par

$$E^x Y(T) = Y(T) + x$$

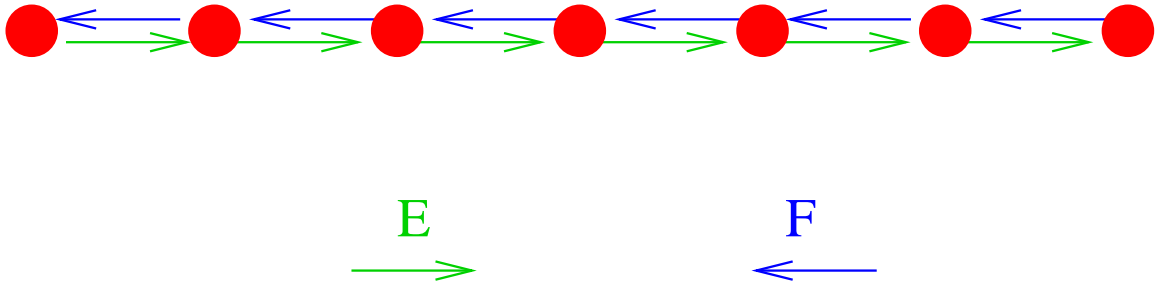
$$F^x Y(T) = Y(T) - x$$



Les opérateurs de Littelmann

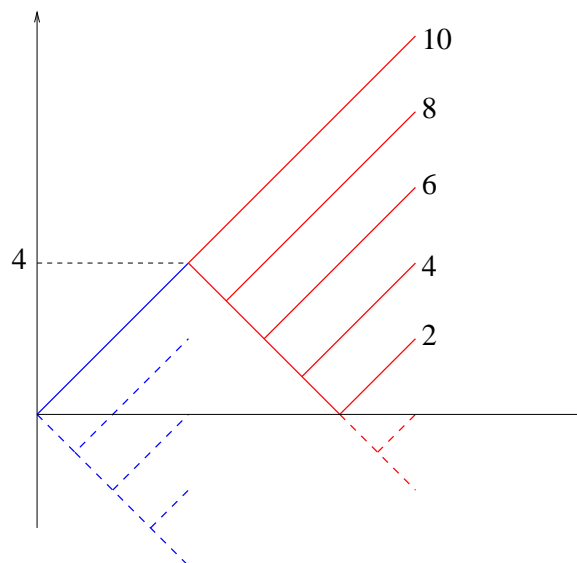
Représentations de $SU(2)$

On remarque que les chemins de Littelmann tels que $R(T) = n$ sont en bijection avec les poids de la représentation irréductible de $SU(2)$ de dimension $n + 1$.



En fait les opérateurs de Littelmann définissent sur le module une structure de "cristal" au sens de Kashiwara.

Le produit tensoriel des représentations de $SU(2)$ peut s'exprimer ainsi.



$$(\mathbf{5}) \otimes (\mathbf{7}) = (\mathbf{3}) \oplus (\mathbf{5}) \oplus (\mathbf{7}) \oplus (\mathbf{9}) \oplus (\mathbf{11})$$

Module "continu" (limite semi-classique)

Le modèle continu décrit les orbites coadjointes de $SU(2)$. Le module de Littelmann associé à un chemin dominant tel que $R(T) = \lambda \geq 0$ correspond aux valeurs possibles du coefficient $(1, 1)$ d'une matrice de l'orbite

$$U \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} U^*$$

cette orbite est une sphère S^2 de rayon λ . La projection de la mesure uniforme sur S^2 sur son diamètre est la mesure de Lebesgue sur $[-\lambda, \lambda]$ (mesure de "Duistermaat-Heckman").

La loi de produit tensoriel correspond à la décomposition

$$\mathcal{O}_\lambda + \mathcal{O}_\mu = \int_{|\lambda-\mu|}^{\lambda+\mu} \mathcal{O}_\nu d\nu$$

Le cas multidimensionnel.

Soit V un espace vectoriel réel, $\alpha \in V$, $\alpha^\vee \in V^*$ $\alpha^\vee(\alpha) = 2$. La transformation de Pitman dans la direction (α, α^\vee) est:

$$P_\alpha Y(t) = Y(t) - \inf_{0 \leq s \leq t} \alpha^\vee(Y(s))\alpha$$

On a $P_\alpha P_\alpha Y = P_\alpha Y$.

On définit alors les opérateurs de Littelmann dans la direction α .

Composition d'opérateurs de Pitman

On suppose que $\alpha, \beta, \alpha^\vee, \beta^\vee$ satisfont

$$\alpha^\vee(\beta) = \beta^\vee(\alpha) = -2 \cos \theta$$

et $\theta \leq \frac{\pi}{n}$ alors

$$(n \text{ termes}) \quad P_\alpha P_\beta P_\alpha \dots Y(t) =$$

$$Y(t) - \inf_{t \geq s_1 \geq \dots \geq s_n \geq 0} A(s_1, \dots, s_n) \alpha - \inf_{t \geq s_1 \geq \dots \geq s_{n-1} \geq 0} B(s_1, \dots, s_{n-1}) \beta$$

avec

$$A(s_1, \dots, s_n) = \frac{\sin \theta}{\sin \theta} \alpha^\vee(Y(s_1)) + \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} \beta^\vee(Y(s_2)) + \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} \alpha^\vee(Y(s_3)) + \dots$$

$$B(s_1, \dots, s_{n-1}) = \frac{\sin \theta}{\sin \theta} \beta^\vee(Y(s_1)) + \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} \alpha^\vee(Y(s_2)) + \frac{\sin 3\theta}{\sin \theta} \beta^\vee(Y(s_3)) + \dots$$

Les relations de tresse

Si $\theta = \pi/n$ alors

$$P_\alpha P_\beta P_\alpha \dots = P_\beta P_\alpha P_\beta \dots \quad (n \text{ termes})$$

Preuve: Deux étapes:

1. Le cas $n = 3$ des relations de tresse.
2. Récurrence sur n .

On donnera une preuve "conceptuelle" du cas $n = 3$ utilisant les propriétés des équations de Sturm-Liouville.

Corollaire:

si (W, S) est un groupe de Coxeter agissant sur V et les α, α^\vee sont des racines et des coracines. On peut associer à chaque $s_\alpha \in S$ un opérateur P_α . À chaque $w \in W$ de décomposition réduite $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_k}$ on peut associer

$$P_w = P_{s_{\alpha_1}} \dots P_{s_{\alpha_k}}$$

(thm de Pitman généralisé: si $X(t)$ est un mouvement Brownien dans V alors $P_{w_0}X(t)$ est un mouvement brownien "conditionné à rester dans $\{\alpha^\vee \geq 0\}$. Dans le cas $SU(n)$ c'est le mouvement des valeurs propres d'un mouvement Brownien hermitien.)

Relations de tresse pour les opérateurs H^x

On définit

$$H_\alpha^x Y(t) = Y(t) - (\alpha^\vee(Y(s)) \wedge x)\alpha$$

On a $P_\alpha H_\alpha^x = P_\alpha$.

$$H_\alpha^{x_1} H_\beta^{x_2} H_\alpha^{x_3} \dots = H_\beta^{y_1} H_\alpha^{y_2} H_\beta^{y_3} \dots \quad (n \text{ termes})$$

avec

$n = 3$

$$x_3 = (y_2 - y_3) \wedge y_1 \quad y_3 = (x_2 - x_3) \wedge x_1$$

$$x_2 = y_1 + y_3 \quad y_2 = x_1 + x_3$$

$$x_1 = y_3 \vee (y_2 - y_1) \quad y_1 = x_3 \vee (x_2 - x_1)$$

$$n = 4$$

$$x_1 = y_4 \vee (y_2 - T_1(\rho)y_1) \vee (T_1(\rho)y_3 - y_2)$$

$$x_2 = (y_1 + T_1(\rho)y_4) \vee (y_1 - T_1(\rho)y_2 + 2y_3) \vee y_3$$

$$x_3 = y_2 \wedge (T_1(\rho)y_1 + y_4) \wedge (y_4 - T_1(\rho)y_3 + 2y_2)$$

$$x_4 = (y_3 - T_1(\rho)y_4) \wedge (T_1(\rho)y_2 - y_3) \wedge y_1$$

Formules semblables pour $n = 5, 6, 7$.

$n \geq 8?$

Module de Littelmann

Soit $\Lambda \subset V$ le réseau des poids d'une algèbre de Lie semi-simple. Soit Y un chemin dans V , dominant i.e. $\beta^\vee(Y(t)) \geq 0; t \in [0, T]$ pour toute racine positive, et tel que $Y(T) \in \Lambda$.

Le module de Littelmann est l'ensemble des chemins obtenus à partir de Y par application des opérateurs de Littelmann $E_{s_\alpha}, F_{s_\alpha}, \alpha \in S$. Pour tout $X \in L(Y)$ on a $P_{w_0}X = Y$. En fait X est dans $L(Y)$ si et seulement si $P_{w_0}X = Y$ et $X(T) \in \Gamma$.

Avec l'action des opérateurs E_α, F_α , il s'identifie au cristal de Kashiwara.

Dans le cas "continu" le module de Littelmann est l'ensemble des chemins X tels que $P_{w_0}X = Y$. C'est un "cristal continu".

Paramétrisation du module de Littelmann

Soit $w_0 = s_1 \dots s_q$ une décomposition réduite alors la formule

$$Y = P_{w_0} X = P_{s_1} \dots P_{s_q} X$$

s'inverse en

$$X = H_{\alpha_q}^{x_q} \dots H_{\alpha_1}^{x_1} Y$$

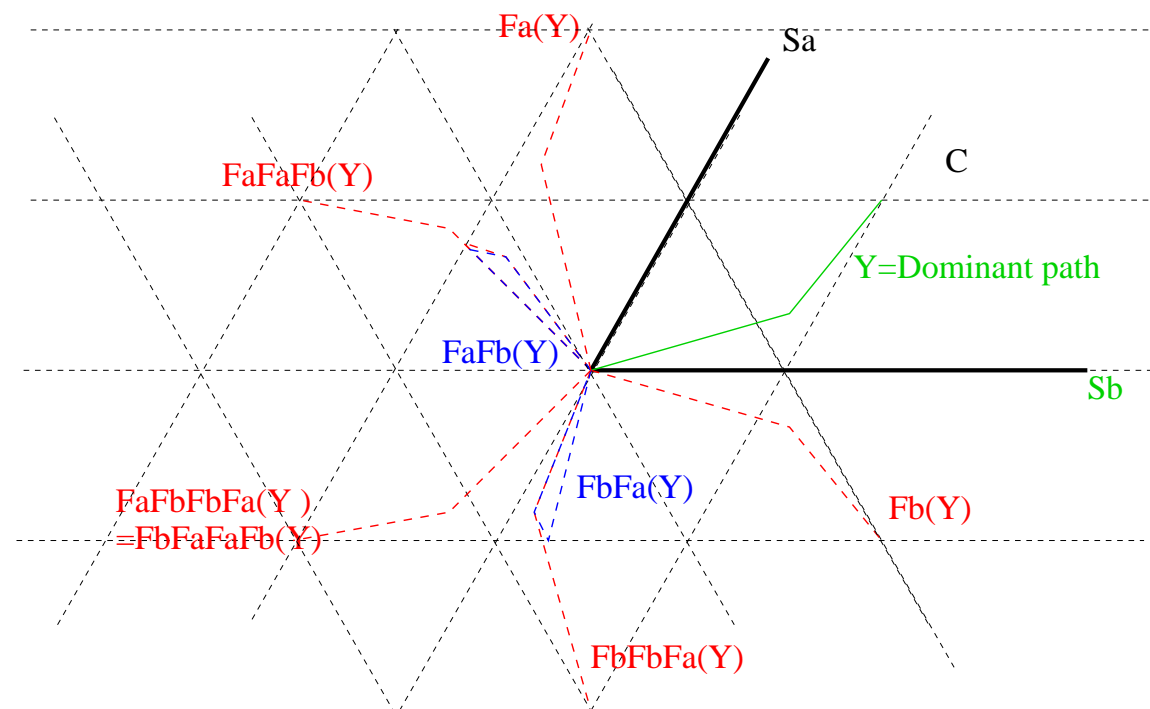
pour un unique choix de x_1, \dots, x_q .

L'ensemble des paramètres varie dans un polyèdre convexe, qui dépend de la décomposition réduite et de $Y(T)$.

(prouvé dans le cas cristallographique et dans le cas diédral, conjecturé dans le cas général).

Théorème 1 (Littelmann):

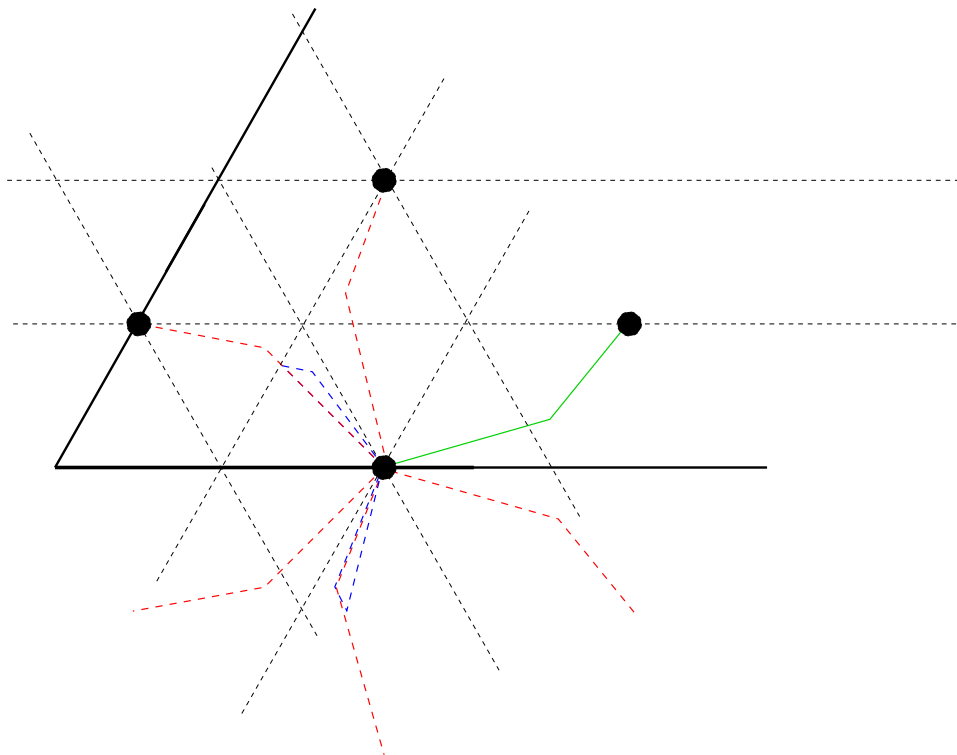
Soit $\pi \in \Lambda$, le nombre de chemins X dans $L(Y)$ tels que $X(T) = \pi$ est égal à la multiplicité de π dans la représentation de plus haut poids $L(Y)$.



La paramétrisation par les x_i correspond à la paramétrisation de la base canonique par les cristaux de Kashiwara.

Théorème 2 (Littelmann's Littelwood-Richardson rule):

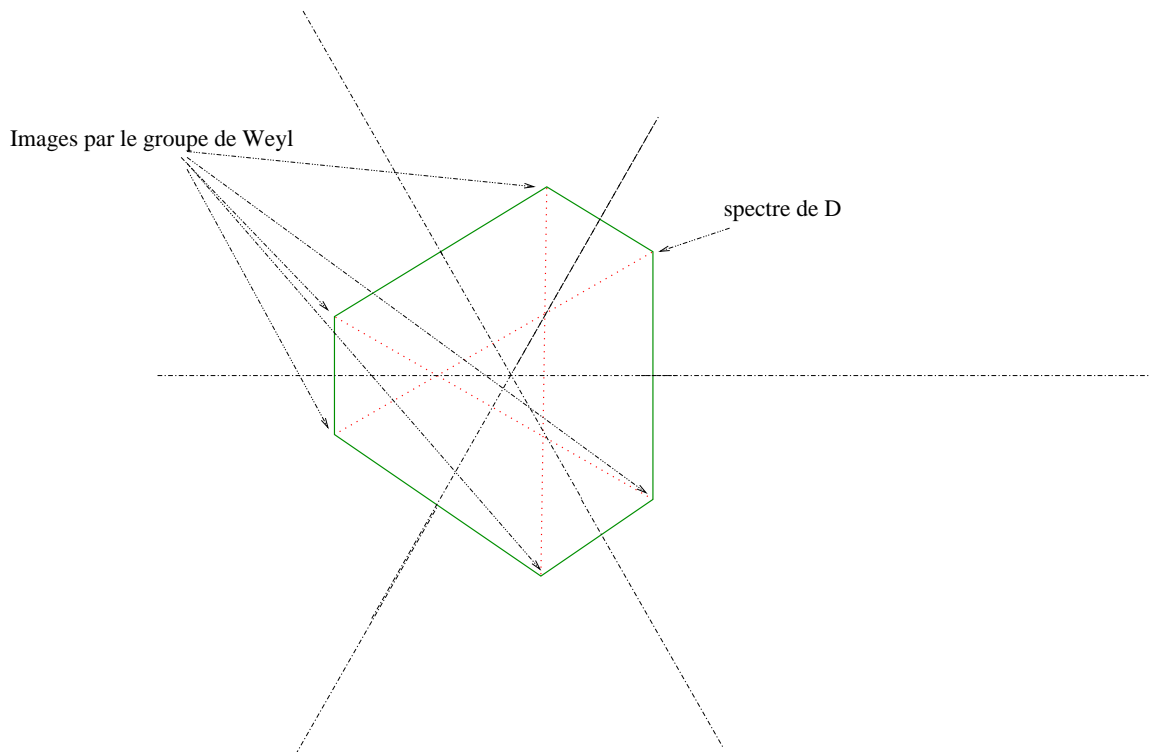
Soient Y un chemins dominants, et π un poids dominant on considère les chemins de la forme $\pi + Y(t); 0 \leq t \leq T$, qui sont dominants. La multiplicité du poids λ dans $\pi \otimes Y(T)$ est égal au nombre de chemins dominant qui arrivent en λ .



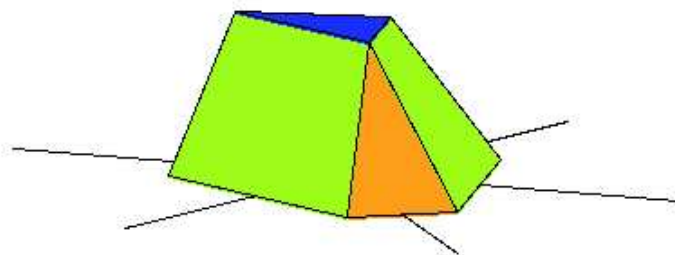
Version continue

$$U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} U^* \quad U \in SU(3) \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

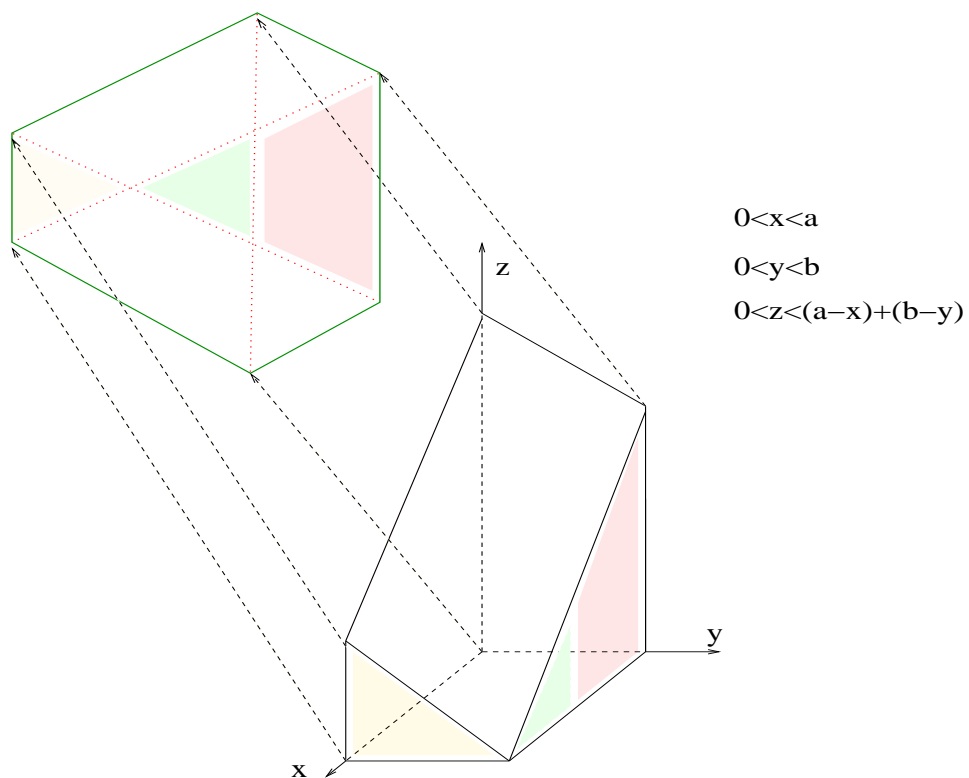
La projection de l'orbite sur la diagonale est un convexe dont les points extrémaux sont les images du spectre par les permutations de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.



La densité est polynomiale par morceaux, le degré du polynome étant ici 1.



Cette mesure est l'image par une application affine de la mesure de Lebesgue sur le polyèdre convexe de Littelmann (ici les coordonnées de Gelfand-Tsetlin).



L'analogue de Littelwood Richardson est une description de la mesure $\mathcal{O}_\lambda + \mathcal{O}_\mu$

Les propriétés fondamentales des opérateurs de Pitman et des opérateurs H^x

$$PY(t) = Y(t) - 2 \inf_{0 \leq s \leq t} Y(s)$$

$$\theta = \pi/n \quad P_\alpha P_\beta P_\alpha \dots = P_\beta P_\alpha P_\beta \dots \quad (n \text{ termes})$$

$$H^x R(t) = R(t) - 2 \inf_{t \leq s \leq T} R(s) \wedge x$$

$$H_\alpha^{x_1} H_\beta^{x_2} H_\alpha^{x_3} \dots = H_\beta^{y_1} H_\alpha^{y_2} H_\beta^{y_3} \dots$$

expliquent le succès de la théorie de Littelmann.

On va expliquer ces identités à l'aide de considérations sur les équations de Sturm-Liouville.

Équations de Sturm-Liouville et opérateurs de Littelmann

L'équation de Sturm-Liouville:

$$\varphi'' + q\varphi = \lambda\varphi$$

Soit φ_0 une solution > 0 sur $[0, T]$, alors toutes les autres solutions s'obtiennent par quadrature (méthode de variation des constantes)

$$\varphi = a\varphi_0 + b\varphi_0 \int \frac{1}{\varphi_0^2(s)} ds$$

Considérons les opérations

$$T_{a,b}^- : \varphi \mapsto a\varphi + b\varphi \int_t^T \frac{1}{\varphi^2(s)} ds$$

$$T_{a,b}^+ : \varphi \mapsto a\varphi + b\varphi \int_0^t \frac{1}{\varphi^2(s)} ds$$

Elles satisfont:

$$T_{a,b}^\pm T_{a',b'}^\pm = T_{aa', ab'+b/a'}^\pm$$

i.e. représentation du groupe

$$\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$$

La méthode de Laplace

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \int_{x_0}^{x_1} \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} u(s)\right) ds = - \inf_{x_0 \leq t \leq x_1} u(t)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log T_{e^{-x/\varepsilon}, b}^{-} \left(\exp \frac{1}{\varepsilon} X(t) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \left(e^{-\frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} X(t)} + b e^{\frac{1}{\varepsilon} X(t)} \int_t^T e^{-\frac{2}{\varepsilon} X(s)} ds \right) \\ &= X(t) - 2 \inf_{t \leq s \leq T} X(s) \wedge x = H^x X(t) \quad (b > 0) \end{aligned}$$

Interprétation matricielle de $T_{a,b}$

On considère l'équation

$$\dot{M}(t) = \begin{pmatrix} \dot{X}(t) & 1 \\ 0 & -\dot{X}(t) \end{pmatrix} M(t) \quad M(t) = \begin{pmatrix} e^{X(t)} & e^{X(t)} \int_0^t e^{-2X(s)} ds \\ 0 & e^{-X(t)} \end{pmatrix}$$

Soit $A \in GL(2, R)$, alors soit

$$MA = [MA]_{<} [MA]_{\geq}$$

la décomposition de Gauss ($[\cdot]_{<} =$ strictement triangulaire inférieure;

$[\cdot]_{\geq} =$ triangulaire supérieure;)

Lemme

$$\frac{d}{dt} [MA]_{\geq}(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} T_A X(t) & 1 \\ 0 & -\frac{d}{dt} T_A X(t) \end{pmatrix} [MA]_{\geq}$$

Cela donne une (presqu')action $A \mapsto T_A$ de $GL(2)$ sur les chemins X .

En particulier si $s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors

$$T_s X(t) = X(t) + \log \int_0^t e^{-2X(s)} ds$$

et par la méthode de Laplace on obtient la transformation de Pitman

$$D_\varepsilon \circ T_s X(t) \circ D_{\frac{1}{\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} PX(t) = X(t) - 2 \inf_{0 \leq s \leq t} X(s)$$

$$D_\varepsilon X(t) = \varepsilon X(t)$$

Généralisation au rang supérieur

On considère les données radicielles $\alpha_i, \alpha_i^\vee, e_i, f_i, h_i$, et $t \mapsto X(t) \in H$ et la solution de

$$\dot{M}(t) = (\dot{X}(t) + N)M(t)$$

$N = \sum_i e_i$ (ou plus généralement $\sum_i u_i e_i; u_i > 0$)

Lemme

$$\frac{d}{dt}[MA]_{\geq}(t) = \left(\frac{d}{dt}T_A X(t) + N\right)[MA]_{\geq}$$

Repose sur le fait que $Ad_{n_-}(x)_{\geq} = x$ si et seulement si $x \in [\text{span}_i(e_i)]$

Les opérateurs de Pitman s'obtiennent en appliquant la méthode de Laplace aux opérateurs T_{s_i} où les s_i sont les générateurs du groupe de Weyl.

En particulier, on retrouve les relations de tresse pour les opérateurs de Pitman, à partir des relations de tresse pour les T_{s_i} , dans le cas d'un angle cristallographique.

Les relations pour les opérateurs H^x ont une preuve semblable.

Application : une formule pour les opérateurs de Pitman

On rappelle la formule remarquable:

$$\begin{aligned}
 (n \text{ termes}) \quad P_\alpha P_\beta P_\alpha \dots Y(t) &= Y(t) - \\
 2 \inf_{t \geq s_1 \geq \dots \geq s_n \geq 0} & \left[\frac{\sin \theta}{\sin \theta} \alpha^\vee(Y(s_1)) + \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} \beta^\vee(Y(s_2)) + \dots \right] \alpha - \\
 2 \inf_{t \geq s_1 \geq \dots \geq s_{n-1} \geq 0} & \left[\frac{\sin \theta}{\sin \theta} \beta^\vee(Y(s_1)) + \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} \alpha^\vee(Y(s_2)) + \dots \right] \beta
 \end{aligned}$$

Une formule analogue est valable pour n'importe quel opérateur de Pitman si W est un groupe de Weyl.

Soit $X(t) \in H$, la solution de

$$\dot{M}(t) = (\dot{X}(t) + N)M(t)$$

s'écrit

$$e^{X(t)} \sum_{k \geq 0} \sum_{i_1, \dots, i_k} \left(\int_{t \geq t_1 \dots \geq t_k \geq 0} e^{-\alpha_{i_1}^\vee(a(t_1)) - \dots - \alpha_{i_k}^\vee(a(t_k))} dt_1 \dots dt_k \right) e_{i_1} \dots e_{i_k}$$

Par la méthode de Laplace ($P_w X = \lim D_\varepsilon T_w D_{1/\varepsilon}$):

$$P_w X(t) = X(t) - \sum_i \left(\inf_{\substack{j_1, \dots, j_r \in S(\omega_i, w) \\ t \geq t_1 \dots \geq t_k \geq 0}} \alpha_{j_1}(X(t_1)) + \dots + \alpha_{j_r}(X(t_r)) \right) \alpha_i$$

les ω_i sont les poids fondamentaux et $S(\omega_i, w)$ est l'ensemble des (j_1, \dots, j_r) tels que $\langle e_{i_1} \dots e_{j_r} w v_{\omega_i}, v_{\omega_i} \rangle \neq 0$ ("i-trails" au sens de Berenstein et Zelevinsky)

Problème:

Existe-t-il une formule analogue dans un groupe de Coxeter quelconque?

Quelle est alors l'interprétation des "i-trails"?

Plus généralement: y-a-t-il une théorie des "orbites coadjointes" pour un groupe de Coxeter quelconque.