Modélisation mathématique des systèmes informatiques : forme produit

J.M. Fourneau

DAVID lab, Université de Versailles St Quentin en Yvelines, , France

- Des objets que l'on peut compter (dénombrable)
- qui attendent de recevoir un service, sur une machine, un élément de réseau, un processeur
- puis qui rejoignent éventuellement une autre site pour un nouveau traitement ou quittent le système
- Système ouvert
- Services de durée aléatoire, arrivées selon un processus stochastique
- Systèmes aléatoires discrets (théorie des files d'attente appliquées, Erlang et Engset)
- Questions : Débit, Capacité de stockage (mémoire, zone physique) et donc pertes ou blocages, ordonnancement pour respecter des contraintes temporelles,
- Dimensionnement de réseaux (circuit, paquet, Internet, mobile)

Les outils élémentaires

- Théorie des réseaux de files d'attente, Markov
- Réseaux de Jackson et forme produit
- Little
- Insensibilité
- PASTA et MUSTA
- Réseaux de Whittle
- Réseaux de Kelly

- qui étendent les résultats de files d'attente qui ont permis le dimensionnement du réseau téléphonique et des réseaux en mode circuit (Erlang, Engset).

- Réseau ouvert connecté avec une classe de clients
- M stations à un serveur,
- Services iid exponentiels de taux μ_i
- Arrivées extérieures indépendantes Poisson de taux λ_i
- Routage probabiliste de matrice stochastique P $(\forall i, \quad \sum_j P(i,j) = 1)$ sous stochastique, probabilité de départ de la file i d_i.
- Capacité infinie de stockage
- Etat du réseau : nombre de clients dans chaque file.

- Propriété : la distribution stationnaire du réseau (si elle existe) est à forme produit

$$\pi(n1, \ldots, n_M) = \prod_{i=1}^{M} \rho_i^{n-i}(1-\rho_i)$$

où ρ_i est une solution de l'équation de flot :

$$\rho_i = \frac{\lambda_i + \sum_j \mu_j \rho_j P(j,i)}{\mu_i}$$

- Similaire au produit de solution pour une file isolée
- Et pourtant les processus d'arrivées ne sont pas tous des processus de Poisson.

- Par rapport à une simulation, on a une méthode pouvant analyser des réseaux de très grande taille
- 1 variable par file (ρ_i)
- On connait la forme de la distribution pour une file (géométrique) plutôt que de calculer par simulation des échantillons de cette distribution.
- Résolution du pb de flot : la complexité dépend de la topologie
- Linéaire pour les réseaux feed forward (sans boucle)
- Cubique en cas général. On préfère souvent utiliser un point fixe.
- Passer de la distribution de probabilités à des questions de dimensionnement ?

Quelques résultats supplémentaires

- Relation simple entre la moyenne spatiale $\overline{N}$ et la moyenne temporelle $\overline{T}$.
$$\overline{N} = \lambda \overline{T} \tag{1}$$
- Propriété PASTA : Poisson Arrivals See Time Average
- La distribution vue par un client observateur venant de l'extérieur (selon un processus de Poisson) est la distribution stationnaire.
- Explique pourquoi la probabilité de perte dans les lois d'Erlang se calcule comme la probabilité d'un buffer plein (robustesse du modèle)
- Propriété MUSTA : Moving Units See Time Average
- Dans un réseau de Jackson, tous les processus ne sont pas des processus de Poisson mais la propriété est encore vraie

Analyse niveau paquet

- Délai moyen de bout en bout: Little + Linearité de l'espérance

$$\overline{N_i} = \frac{\rho_i}{1-\rho_i} \quad \overline{T_i} = \frac{1}{\mu_i(1-\rho_i)}$$

$$T = \sum_{i \in Path} \overline{T_i}$$

- Perte : dans la pratique, les buffers sont finis : B
- Approximations de la probabilité de perte.

$$Pr(Perte\ en\ i) = \rho_i^B$$

- On a des approximations plus précises.
- Les pertes sont rares. Les approximations rapides sont bien plus précises que les simulations.

Dimensionnement

- Simulation : pb du passage à l'échelle
- Modélisation : oui
- et surtout optimisation (ou amélioration).
- Offline : Objets technologiques pour lesquels il y a de nombreuses variantes et des réglages (puissance de calcul, de stockage, de débit)
- Plus de puissance de calcul pour optimiser plus (optimisation combinatoire)
- Online : MDP et learning pour la 5G

Insensibilité

- Discipline Processor Sharing (limite du Time Sharing avec un quantum infinitésimal) : PS
- Insensibilité : une discipline a la propriété d'insensibilité quand la distribution de la file d'attente ne dépend pas de la loi de service, mise à part son premier moment.
- Propriété : La file M/GI/1-PS est insensible (arrivée Poisson, Services indépendants et de loi générale, 1 serveur et capacité infini)
- Donc on étudiera plutôt une file avec services exponentiels pour laquelle il y a une solution analytique connue.
- En dimensionnement de circuit, les modèles d'Erlang sont insensibles. Donc la variance des services n'a pas d'importance. Ce qui explique, en partie, la robustesse de ces formules.
- Mesures plus simples (la moyenne suffit), moins de puissance de calcul pour les pre-traitements
- Il y a d'autres disciplines insensibles (LCFS, par exemple) mais

Réseaux de Whittle

- Taux de service dépendant de l'état du réseau.
- Le taux de service dans la file i est $\mu_i m_i(x)$ où x est l'état du réseau et e_i = vecteur nul avec 1 en position i.
- Définition : Réseau de Whittle si la condition de symétrie est vérifiée:

$$m_i(x)m_j(x-e_i) = m_j(x)m_i(x-e_j), \quad \forall i, j, x_i > 0, x_j > 0$$

  Les deux chemins de x à $x - e_i - e_j$ ont les mêmes taux.
- Propriété : les réseaux de Whittle sont à forme produit et ils sont insensibles.
- Version multiclasses où la classe d'un client code sa route dans le réseau (Kelly).
- Exemple : réseaux avec Processor Sharing, diverses disciplines avec propriété de "Fairness".

Analyse niveau flots

- Flot : ensemble des paquets d'une session après un éventuel multiplexage.
- Partage de la bande passante par les flots, gestion de l'équité.
- Réseaux de Whittle.
- Insensibilité par rapport à la loi de service.
- Processus de Poisson pour l'arrivée d'un flot.
- Permet de s'affranchir de l'hypothèse sur les arrivées de paquet suivant des processus de Poisson indépendants.
- Utilisation de la solution à forme produit pour analyser les flots et calculer une approximation de la probabilité de congestion (la probabilité que les débits demandés par les flots soient supérieurs à la capacité).

- HDSPA: partage temporel strictement équitable de la bande radio
- Débit de réception dépendant de la zone dans la cellule (N zones imbriquées, idéalement des anneaux)
- p_i fraction du trafic pour la zone i, d_i débit dans la zone i.
- Le débit global de la zone i vaut $\frac{d_i x_i}{\sum_j x_j}$
- Equivalent à un réseau de Whittle (1 file par zone)
- Soit la charge ρ, probabilité de congestion : ρ^2
- Débit moyen par utilisateur dans la zone i : $d_i(1-\rho)$
- Débit moyen par utilisateur dans la cellule : $C(1-\rho)$ ($C = \left(\sum_i \frac{p_i}{d_i}\right)^{-1}$ est la capacité de la cellule)

Demain

- Evolution du réseau et du trafic
- Sécurité, Accès par contenu, Energie, Adaptation à un usage majoritaire par des terminaux mobiles, SDN
- Pour l'énergie, le modèle "Energy Packet Network" (Imperial College) permet de représenter le plan Paquet, le plan Energie (discrètisé) et leurs interactions (consommation) tout en gardant une distribution stationnaire à forme produit.