

Programme du groupe de lecture "La méthode probabiliste"

Thomas BUDZINSKI

Septembre 2016-Janvier 2017

Résumé

La méthode probabiliste, popularisée par Paul Erdős, désigne l'utilisation de techniques probabilistes pour traiter des problèmes "déterministes" en mathématiques discrètes. Souvent, il s'agit, quand on veut montrer l'existence d'un objet satisfaisant certaines propriétés, de choisir cet objet de manière aléatoire et de montrer qu'il vérifie les propriétés voulues avec probabilité strictement positive.

Malgré l'apparente simplicité de cette idée, les contextes dans lesquels elle s'applique sont variés (combinatoire, théorie des graphes mais aussi théorie des nombres, logique, codes correcteurs...) et les outils probabilistes utilisés (méthodes du premier et du second moment, martingales, inégalités de concentration...) sont fondamentaux en probabilités.

Le groupe de lecture se décompose grossièrement en quatre parties : on commencera par des applications "basiques" de la méthode probabiliste, puis on introduira des outils probabilistes plus sophistiqués. On s'intéressera ensuite aux propriétés des graphes d'Erdős-Rényi, le modèle le plus simple et le plus naturel de graphes aléatoires. Enfin, on étudiera des applications de la méthode probabiliste à des sujets plus "originaux".

Remarques générales

- **Contact** : Vous pouvez me joindre par mail à thomas.budzinski@ens.fr ou venir me voir au bureau V2 (je ne suis pas là les jeudis).
- **Préparation d'un exposé** : Je vous demande de venir me voir au moins une fois dans la semaine précédant l'exposé, en ayant travaillé un peu avant, pour parler de ce que vous voulez traiter et répondre à vos questions. Si vous le souhaitez, vous pouvez faire l'exposé en entier devant moi (par exemple le Lundi soir).
- **Bibliothèque** : Trois ou quatre exemplaires du livre sont disponibles à la bibliothèque. Si vous les empruntez, merci de les rendre après votre exposé pour que les autres puissent les utiliser.
- **Éditions** : Il existe plusieurs éditions différentes du livre. La numérotation dans ce programme est basée sur la 3ème (celle de 2008) mais il est possible d'utiliser n'importe laquelle. Seuls l'exposé 12 et un paragraphe facultatif de l'exposé 11 nécessitent une édition récente.
- **Contenu des exposés** : Pour chaque chapitre, les • ci-dessous indiquent ce qui doit être traité dans l'exposé et les ★ indiquent ce qui peut être traité selon vos goûts personnels et le temps disponible. Il faut compter 1h15 par exposé pour laisser le temps pour des questions.

Remarques sur le livre

- Les chapitres sont en général trop longs pour être traités entièrement en une séance, mais il n'est jamais nécessaire d'avoir traité un chapitre en entier pour comprendre les suivants. Il vaut donc mieux traiter peu de résultats dans un exposé, mais prendre son temps pour que les idées et les démonstrations soient bien claires.
- N'hésitez pas à lire le livre au-delà de ce qui est traité en groupe de lecture. En particulier, des intermèdes souvent très courts et élémentaires et très jolis sont glissés entre les chapitres sous le titre "The Probabilistic lens".
- Si vous voulez traiter un chapitre ou un résultat qui n'est pas prévu dans les lignes qui suivent, n'hésitez pas à me demander, le programme est négociable!
- Si vous craignez que les maths contenues dans ce livre ne soient pas "sérieuses" ou si vous voulez une mise en perspective "philosophique" de certains résultats et techniques traités, je vous conseille le passionnant texte de Timothy Gowers "Two cultures in mathematics".

I Applications simples

0 Introduction (28 Septembre)

- Bases de théorie de Ramsey
- Borne inférieure sur les nombres de Ramsey (1.1)
- Tournois k -indécis (1.2.1)
- Sous-ensembles "sum-free" (1.4)
- ★ Coloriage d'hypergraphes (1.3)

1 Méthode du premier moment (5 Octobre)

- Bases, linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}[|A|] = \sum_x \mathbb{P}(x \in A)$.
- Chemins hamiltoniens (2.1)
- Graphes bipartis (2.2.1, 2.2.2)
- Parties "denses" d'un graphe (1.2.3)
- ★ Equilibrer des vecteurs (2.4.1 et éventuellement 2.4.2)
- ★ Matrice de lampes (2.5)

2 Altérations (12 Octobre)

- Borne inférieure sur les nombres de Ramsey (3.1)
- Sous-ensemble indépendant (3.2)
- Graphes sans petits cycles avec un grand nombre chromatique (probabilistic lens 3)
- ★ Géométrie combinatoire (3.3)
- ★ Empilements compacts (3.4)
- ★ Coloriage d'hypergraphes (3.5)

3 Méthode du second moment (19 Octobre)

- Les bases (4.1, 4.3)
- Théorie des nombres (4.2.1)
- Sous-graphes des graphes aléatoires (4.4.1, 4.4.2)
- ★ Plus grande clique d'un graphe aléatoire (4.5)
- ★ Ensembles à sommes distinctes (4.6)

II Outils probabilistes

4 Lemme local de Lovasz (26 Octobre)

- Lemme local de Lovasz : version générale et version symétrique (5.1)
- Borne inférieure pour les nombres de Ramsey (5.3)
- ★ Coloriages de \mathbb{R} (5.2.2, si le théorème de Tychonov a été vu en cours)
- ★ Décomposition de recouvrements de \mathbb{R}^3 (5.4)
- ★ Cycles de longueur divisible par k (probabilistic lens 5)

5 Inégalités de corrélation (2 Novembre)

- Théorème des quatre fonctions (6.1)
- Inégalité FKG (6.2)
- Evénements monotones (6.3)
- ★ Ensembles partiellement ordonnés (6.4)

6 Inégalités de concentration (9 Novembre)

- Martingales
- Inégalité d'Azuma
- Nombre chromatique des graphes aléatoires : borne inférieure (7.3.1, 7.3.2, début de 10.3.1)
- ★ Nombre chromatique des graphes aléatoires : borne supérieure (10.3.1)
- ★ Nombre chromatique de graphes aléatoires plus dilués (7.3.3, 7.3.4)

III Graphes aléatoires

7 Loi du 0-1 : graphes aléatoires et logique (16 Novembre)

- Nombre chromatique des graphes aléatoires : borne supérieure (10.3.1, si pas fait à l'exposé précédent)
- Loi du 0-1 pour les propriétés exprimables au premier ordre (10.4.1-3-4-5)
- ★ Deuxième loi du 0-1 (10.4.2-6-7)

8 Grandes composantes connexes et transition de phase (23 Novembre)

D'après le chapitre 10 de "Probability on graphs" de Grimmett.

- Processus de Galton-Watson (classique, référence à préciser)
- Taille de la plus grande composante connexe d'un graphe d'Erdős-Rényi (Probability on graphs, 11.2)

IV Sujets plus originaux

9 Circuits logiques (30 Novembre)

- Introduction (12.1)
- ★ Un exemple issu de l'arithmétique (12.3)
- ★ Circuits monotones (12.4)
- ★ Formules (12.5)
- ★ Restrictions aléatoires et circuits de hauteur bornée (12.2, déconseillé)

10 Au choix : "Discrepancy" ou Géométrie (7 Décembre)

Discrepancy :

- Une borne supérieure facile (13.1)
- Une borne supérieure meilleure (13.2)
- ★ Une borne supérieure plus générale (13.3)
- ★ Bornes inférieures (13.4)

Géométrie :

- Un calcul rigolo (14, introduction)
- Ensembles de points ne formant que des angles aigus (14.1.1)
- Triangles vides (14.2)
- ★ Réalisation d'une matrice par des points et des hyperplans (14.3)
- ★ Empilements compacts (probabilistic lens 14)

11 Codes correcteurs et jeux (14 Décembre)

- Codes correcteurs (15.1)
- Le jeu du menteur (15.2)
- ★ Le jeu de la promotion (15.3)
- ★ Un jeu avec des vecteurs (15.4)
- ★ Le jeu du demi-menteur (15.6)

12 Tester des propriétés de graphes (4 Janvier)

- Introduction (17.1)
- ★ Tester la colorabilité par 3 couleurs (17.2)
- ★ Lemme de régularité de Szemerédi (17.3)
- ★ Tester l'absence de triangles (17.4, il est nécessaire d'avoir traité 17.3)