DOMAINE : Algèbre
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Cours

AUTEUR : Antoine TAVEVEAUX
STAGE : Grésillon 2011

Inégalités : multiplicateurs de Lagrange

Dans ce cours nous allons présenter sommairement (souvent à partir d'exemples simples, des exemples plus élaborés seront vus en TD et TND) quelques techniques pour établir des inégalités par des techniques de calculs. Cette approche n'est pas traditionnelle pour les inégalités d'olympiades mais peut aider à résoudre bon nombres d'inégalités avec un ensemble limité de techniques. Ces quelques notes ne sont pas réellement un cours mais plutôt un aide-mémoire pour les participants au stage. Pour un cours plus classique et complet sur les inégalité nous conseillons au lecteur de se référer au polycopié sur la question écrit par Pierre Bornsztein, disponible en téléchargement sur le site d'Animath.

- Une seule variable -

Comme on le fait souvent au lycée pour trouver les extremums d'une fonction, il est souvent utile de la dériver afin de trouver ses extremums. Donnons un exemple simple de l'utilisation de cette technique.

Exercice 1 Quelle est le volume maximum pour un cylindre d'aire 1 ?

Solution de l'exercice 1 L'aire d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est :

$$\mathcal{A} = 2\pi r^2 + 2\pi h r$$

et son volume :

$$\mathcal{V} = \pi h r^2.$$

Ainsi si l'aire est 1, on a $h = \frac{1-2\pi r^2}{\pi r}$. Ainsi on peut substituer h :

$$\mathcal{V}(r) = \pi r^2 \frac{1-2\pi r^2}{\pi r} = \frac{r}{2}(1-2\pi r^2).$$

Si on dérive cette fonction on obtient la fonction :

$$V'(r) = \frac{1}{2}(1 - 6\pi r^2)$$

dont le seul zéro positif est

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{6\pi}}$$

et de plus on remarque que V' est positive sur $[0, r_0]$ et négative ensuite et donc r_0 est un maximum de la fonction V.

Donc le cylindre maximisant le volume a un rayon $\frac{1}{\sqrt{6\pi}}$ et une hauteur $\frac{4}{\sqrt{6\pi}}$.

Nous allons montrer quelques éléments de recherche d'extremums pour des fonction de plusieurs variables.

- Plusieurs variables -

Pour les fonctions de plusieurs variables (à valeurs réelles) nous allons utiliser les dérivées "variable par variable" que l'on appelle plus souvent les dérivées partielles. Ainsi dans la suite, si $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction "suffisamment dérivable" (dans la suite on supposera que les fonctions considérées le sont toujours) :

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

désigne la dérivée par rapport à la $i^{\text{ième}}$ variable (ce qui signifie qu'on fait comme si les autres variables sont des constantes).

Un **point stationnaire** d'une fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est un point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ où pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on a

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0.$$

Une propriété importante est que **si une fonction atteint un extremum local en un point** a (c'est à dire que la fonction est bien définie pour tout point assez proche, et la fonction atteint son maximum (ou minimum) sur un ensemble de points suffisamment proches) sur un ouvert (c'est à dire une partie de l'espace où autour de chaque point l'ensemble des point voisins sont aussi dans l'ensemble, par exemple $]0, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$) **alors** a **est un point stationnaire** de la fonction.

Exemple 1. Le minimum global de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ se trouve en $(0, 0)$ car la fonction tend vers l'infini quand (x, y) tend vers l'infini (pour la distance euclidienne) et comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y + x = 0 \end{cases}$$

a comme seule solution $(0, 0)$ alors le minimum est atteint en ce point.

- Multiplicateurs de Lagrange -

Cette technique permet de rechercher des maximums de fonctions à plusieurs variables sous contraintes.

Théorème 2. (Multiplicateurs de Lagrange) Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et $f, c_1, c_2, \dots, c_k : D \to \mathbb{R}$ des fonctions différentiables (l'équivalent de dérivable pour les fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$). Si un point de D est un extremum de la fonction parmi les points de D tels que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Alors il existe des nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tel que a est un point stationnaire de la fonction

$$F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) + \lambda_1 c_1(x) + \cdots + \lambda_k c_k(x).$$

Ainsi avec cette technique on transforme un problème de recherche d'extremums avec des contraintes en un problème de recherche de maximum sans contraintes (mais avec plus de variables). Nous allons reprendre l'exemple de l'exercice 1 que nous allons traiter avec cette méthode.

Exemple 3. La fonction de volume est

$$V(r, h) = \pi h r^2$$

et la contrainte est alors

$$c(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h - 1 = 0.$$

Comme le maximum ne se situe clairement pas aux limites du domaine de définition, on cherche alors à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r}(r, h, \lambda) = 2\pi h r + \lambda(4\pi r + 2\pi h) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial h}(r, h, \lambda) = \pi r^2 + \lambda 2\pi r = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(r, h, \lambda) = 2\pi r^2 + 2\pi r h - 1 = 0 \end{cases}$$

Après résolution on obtiens les mêmes valeurs que dans l'exercice 1.

L'apport de cette méthode sur le précédent exemple ne semble nette mais nous allons donner un autre exemple d'application.

Exemple 4. La méthode du multiplicateur de Lagrange permet de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique. On définit les applications φ et ψ de $\mathbb{R}_+^n$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x_i) \in \mathbb{R}_+^n, \quad \varphi(x_1, \cdots x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \psi(x_1, \cdots x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - s, \quad s \in \mathbb{R}_+^*.$$

On remarque que tous les n-uplets vérifiant la contrainte sont de coordonnées positives et de somme égale à s. Nous allons majorer φ sous cette contrainte. Les limites de définition sont les points de la forme $(0, \ldots, 0, s, 0, \ldots, 0)$ et donc clairement ce n'est pas sur ces bord que le maximum de φ est atteint. On vas donc chercher les points critiques de L définis comme suit :

$$\forall (x_i) \in \mathbb{R}_+^n, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad L(x_1, \cdots, x_n, \lambda) = \varphi(x_1, \cdots, x_n) + \lambda \psi(x_1, \cdots, x_n).$$

Une solution vérifie les équations :

$$\forall i \in [1, n] \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} L(x_1, \cdots x_n, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \prod_{k \neq i} x_k = -\lambda \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = s.$$

On en déduit l'existence d'une unique solution, obtenue pour tous les x_i égaux à $\frac{s}{n} = \bar{x}$ et λ égal à $-(s/n)^{n-1}$. Ce qui s'exprime, en remplaçant s par sa valeur :

$$\forall (x_i) \in \mathbb{R}_+^n \quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

La moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique, l'égalité n'ayant lieu que si les x_i sont tous égaux.

Le multiplicateur de Lagrange offre une démonstration alternative de l'inégalité arithmético-géométrique.