DOMAINE : Combinatoire
NIVEAU : Avancé
CONTENU : Cours et exercices

AUTEUR : Margaret BILU
STAGE : Montpellier 2013

Séries génératrices

- Définition et premiers exemples -

Les séries génératrices sont on outil algébrique qui permet de reformuler des problèmes de combinatoire afin de les transformer en des problèmes de manipulation d'expressions algébriques. En particulier, en combinatoire, il s'agit souvent de déterminer le nombre d'objets d'un certain type qui sont de taille n, ce qui donne lieu à une suite $(a_n)_n$ dont on cherche à déterminer le n-ième terme. La fonction génératrice associée à la suite a_n est la série ("somme infinie") formelle

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{k \geqslant 0} a_k x^k.$$

En particulier, la série génératrice d'une suite finie est un polynôme.

Exemple 1. Soit n un entier strictement positif. La suite (finie) des coefficients binomiaux $\left(\binom{n}{k}\right)_{k \in \{0,\ldots,n\}}$ a pour série génératrice le polynôme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Cela a-t-il vraiment un sens de parler de "somme infinie" ? C'est une vaste question, et on ne va pas trop l'aborder ici. Il y a deux points de vue pour voir une série : d'une part le point de vue algébrique et formel que nous utilisons ici, où x n'est qu'une variable sans aucun sens particulier, de sorte que finalement, une série génératrice, c'est juste une autre manière de noter une suite, de sorte à ce que les opérations que nous allons définir plus bas apparaissent naturellement. C'est dans ce cadre que nous nous plaçons, et il n'y a aucun souci à se faire de ce côté, tant que x reste une variable formelle à laquelle on ne fait pas prendre de valeurs réelles. D'autre part, on peut voir une série du point de vue analytique, et regarder pour quelles valeurs réelles de x la série "converge", c'est-à-dire que la suite de ses sommes partielles

$$\sum_{k=0}^{n} a_n x^n$$

converge, ce qui est équivalent à dire que la suite des "restes"

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_n x^n$$

tend vers 0. On voit clairement que $x = 0$ est toujours une telle valeur. S'il existe un intervalle autour de 0 où la série converge, alors elle y coïncide avec une fonction dérivable autant de fois que nous voulons, et les dérivées coïncident avec les dérivées de la série au sens formel que nous allons voir plus bas. Bref, il y a une forte interaction entre les points de vue algébrique et analytique, mais pour ce qu'on fait aujourd'hui, on peut tout à fait rester dans le point de vue algébrique en n'utilisant le point de vue analytique que comme aide pour comprendre certains résultats formels. Dans tous les cas, il faut être très prudent quand on veut évaluer une série en un réel non nul

Un exemple fondamental de série génératrice est la série génératrice de la suite constante égale à 1. D'une part, elle est clairement égale à

$$A(x) = \sum_{n \geqslant 0} x^n$$

On l'appelle la série géométrique (car c'est la somme des termes d'une suite géométrique). On remarque alors que $A(x) - 1 = xA(x)$, donc $(1-x)A(x) = 1$. Cela signifie que la série formelle $A(x)$ a un inverse : la série formelle $1 - x$. On notera cela d'une manière un peu plus suggestive :

$$\sum_{n \geqslant 0} x^n = \frac{1}{1-x}. \tag{1}$$

où $\frac{1}{1-x}$ est ce qu'on appelle une fraction rationnelle, c'est-à-dire un quotient de deux polynômes. Comment comprendre d'où vient cette formule ? Revenons une seconde au point de vue analytique, et prenons un x réel différent de 1. La formule de la somme des termes d'une suite géométrique nous dit que pour tout $N \geqslant 0$,

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}$$

Lorsque $x > 1$ ou $x \leqslant -1$, cette somme diverge quand N tend vers l'infini, donc nous ne pouvons pas en faire grand chose. Mais que se passe-t-il si $x \in]-1, 1[$? Alors x^{N+1} tend vers 0, donc le côté droit de la formule ci-dessus tend vers $\frac{1}{1-x}$. Nous venons de voir que la série $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ converge sur l'intervalle $]-1, 1[$ et que sur cet intervalle la fonction $x \mapsto \sum_{n \geqslant 0} x^n$ coïncide avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

On cherchera souvent à trouver ce genre de "formes closes" pour les séries génératrices, c'est-à-dire les écrire comme un quotient $\frac{P}{Q}$ de deux polynômes avec $Q(0) = 0$. C'est loin d'être toujours possible, mais ça l'est dans l'immense majorité des cas pouvant intervenir dans un contexte olympique. En particulier, si une suite vérifie une récurrence linéaire, sa série génératrice vérifie une équation du premier degré, et on obtient donc toujours une forme close.

Exemple 2. La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Déterminons sa série génératrice, notée $F(x)$. Pour cela, on multiplie sa relation de récurrence par x^{n+2} et somme pour $n \geqslant 0$. On obtient :

$$F(x) - x = (x + x^2)F(x),$$

d'où

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

- **Opérations sur les séries génératrices** -

La somme de deux séries génératrices se définit de manière assez évidente en sommant les suites correspondantes.

Pour le produit, c'est un peu plus compliqué. Il se fait par analogie avec le produit des polynômes :

$$\left(\sum_{m \geqslant 0} a_m x^m\right)\left(\sum_{n \geqslant 0} b_n x^n\right) = \sum_{m,n \geqslant 0} a_m b_n x^{m+n} = \sum_{n \geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

Le produit est donc également une série génératrice, correspondant à la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)_n$. D'une certaine manière, on peut donc dire qu'une série génératrice, c'est une manière de noter une suite de telle sorte que ce produit apparaisse naturellement grâce à la relation $x^k x^{n-k} = x^n$.

Remarque 3. Soit $(a_n)_n$ une suite. Alors d'après la définition du produit, la suite génératrice de la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ s'obtient simplement en multipliant celle de S_n par $\sum_{k \geqslant 0} x^k = \frac{1}{1-x}$. En particulier, une forme close pour $(a_n)_n$ donne directement une forme close pour $(S_n)_n$.

Pour ce qui est du quotient, l'analogie avec les polynômes ne fonctionne plus puisque l'inverse d'un polynôme de degré supérieur à 1 n'est plus un polynôme. En revanche, nous avons vu qu'en tant que série formelle, $1-x$ a un inverse, qui est une série formelle. Plus généralement, nous avons le lemme suivant :

Lemme 4. La série formelle $\sum_{i\geqslant 0} a_i x^i$ a un inverse si et seulement si $a_0 \neq 0$.

Démonstration. On veut trouver une série formelle $\sum_{j\geqslant 0} b_j x^j$ telle que

$$\left(\sum_{i\geqslant 0} a_i x^i\right)\left(\sum_{j\geqslant 0} b_j x^j\right) = \sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-1}\right) x^k = 1.$$

On identifie tout simplement les coefficients, ce qui donne une infinité d'équations avec les a_i et les b_i. La première est $a_0 b_0 = 1$. Cela nous dit que $a_0 \neq 0$ est effectivement une condition nécessaire. Dans ce cas, on choisit simplement $b_0 = \frac{1}{a_0}$. La deuxième équation est

$$a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0.$$

Cela nous donne, en réutilisant encore le fait que $a_0 \neq 0$, que $b_1 = -\frac{a_1 b_0}{a_0}$. On voit qu'on peut faire une récurrence : si on suppose $b_0, \ldots, b_{n-1}$ construits pour un certain n, l'équation $a_0 b_n + \ldots + a_n b_n = 0$ avec la condition $a_0 \neq 0$ nous donne b_n. □

En particulier, les fractions rationnelles de la forme $\frac{P}{Q}$ avec P et Q des polynômes et $Q(0) \neq 0$ peuvent s'écrire comme des séries formelles.

La dérivée au sens formel d'une série génératrice se définit sans trop de problèmes par analogie avec les polynômes :

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\right)' = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1}.$$

Exemple 5. Soit de nouveau $A(x)$ la série géométrique ci-dessus. Par définition, sa dérivée est $\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1}$, et en dérivant $\frac{1}{1-x}$, on obtient $\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Si on continue ainsi, on peut obtenir des formules pour $(1-x)^{-k}$ pour tout entier naturel k. En généralisant la notion de coefficient binomial, nous allons en fait pouvoir étendre la formule du binôme aux exposants quelconques.

Définition 6. Soient r un réel et k un entier naturel. Alors on définit le coefficient binomial généralisé $\binom{r}{k}$ par

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}.$$

Proposition 7. (Formule du binôme généralisée) Pour tout entier n, on a

$$(1+x)^n = \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{k} x^k.$$

En particulier, sachant que par définition pour tout k

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)\dots(-k)}{k!} = (-1)^k \text{ et } \binom{-2}{k} = \frac{(-2)(-3)\dots(-2-k+1)}{k!} = (-1)^k(k+1).$$

on retrouve les expressions de $(1-x)^{-1}$ et de $(1-x)^{-2}$ plus haut. Puisque les coefficients de la forme $\binom{-n}{k}$ avec n un entier naturel jouent un rôle particulièrement important quand on travaille avec les séries formelles, il peut être utile d'avoir la formule suivante, qui les relie aux coefficients binomiaux usuels.

Proposition 8. Soient n et k des entiers naturels. Alors

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Une situation où on peut voir qu'il faut prendre des précautions en manipulant les séries formelles apparaît lorsqu'il s'agit de les composer. Si f et g sont des séries génératrices, il faut faire très attention au fait que $f(g(x))$ *n'est pas toujours défini*. En effet, le terme constant de $f(g(x))$ devrait être $f(g(0))$, ce qui n'a pas vraiment de sens puisque nous avons remarqué qu'une série formelle ne pouvait a priori être évaluée qu'en $x = 0$. Bien entendu, analytiquement, on pourrait définir $f(g(x))$ quand même à condition que f converge en $g(0)$, mais pour les séries formelles, nous allons dire que $f(g(x))$ n'est pas défini si $g(0) \neq 0$, c'est-à-dire si g a un terme constant non nul. En revanche, si $g(0) = 0$, $f(g(x))$ est bien définie : en effet, il suffit de montrer que pour tout n, on peut déterminer son coefficient de degré n après un nombre fini d'opérations (de même qu'on dit qu'on a bien défini une suite si on arrive à déterminer son n-ième terme après un nombre fini d'opérations). Pour cela, on écrit $f = \sum_{k \geqslant 0} a_k x^k$, et $g(x) = xh(x)$ avec $h(x)$ une autre série formelle, ce qui donne

$$f(g(x)) = a_0 + a_1 x h(x) + a_2 x^2 h(x)^2 + \ldots + a_n x^n h(x)^n + a_{n+1} x^{n+1} h(x)^{n+1} + \ldots$$

et toutes les contributions au coefficient de degré n interviennent donc dans les $n+1$ premiers termes ci-dessus, ce qui permet de les déterminer.

- Décomposition en éléments simples -

Supposons que l'on dispose d'une forme close de la série génératrice $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ d'une suite (a_n). Pour en déduire une formule pour a_n pour tout n, on va faire une *décomposition en éléments simples*. Autrement dit, on va écrire la série génératrice comme une somme d'un polynôme (appelé la partie entière) et de termes de la forme $b(1-ax)^{-k}$, appelés éléments simples, car pour ce type de termes, les coefficients sont facilement déterminables grâce à la formule du binôme ci-dessus. Pour cela, on commence par faire la division euclidienne de P par Q afin de mettre en évidence la partie entière : on écrit $P = EQ + R$ avec E et R des polynômes et $\deg R < \deg Q$, d'où $f = E + \frac{R}{Q}$. Ensuite , on factorise le dénominateur Q (bien entendu, cela peut être difficile en pratique dans le cas général, mais dans les cas particuliers que nous croiserons ce sera tout à fait faisable). À une constante multiplicative près, Q s'écrira sous la forme $\prod_i (1-a_i x)^{m_i}$. Les éléments simples qui peuvent intervenir seront alors les $(1-a_i x)^{-j}$ avec $1 \leqslant j \leqslant m_i$. On cherche donc à déterminer des constantes $b_{i,j}$ telles que

$$f(x) = E(x) + \sum_i \sum_{1 \leqslant j \leqslant m_i} \frac{b_{i,j}}{(1-a_i x)^j}.$$

Il y a plusieurs méthodes pour faire cela. Dans certains cas particuliers, cela se fait de tête, ou en trifouillant un peu l'expression à la main. On peut aussi tout remettre au même dénominateur, identifier les coefficients et résoudre le système linéaire que cela fait apparaître, ou alors d'évaluer pour diverses valeurs de x et résoudre un système linéaire également. Pour déterminer b_{i,m_i}, on peut multiplier le tout par $(1-a_i x_i)^{m_i}$ et évaluer en $x = \frac{1}{a_i}$. Multiplier le tout par x et faire tendre x vers l'infini peut donner une équation linéaire avec les $b_{i,1}$. Le but n'étant pas de faire un cours complet de décomposition en éléments simples, nous allons nous contenter de montrer comment cela fonctionne en pratique à l'aide des exemples et exercices qui vont suivre.

Exemple 9. Décomposons en éléments simples la série génératrice de la suite (F_n) des nombres de Fibonacci. D'après l'exemple ci-dessus, la fonction génératrice est $\frac{x}{1-x-x^2}$. On a bien que le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur. Le polynôme du second degré $1-x-x^2$ s'écrit $(1-\alpha x)(1-\beta x)$ avec $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On cherche donc à écrire

$$\frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \frac{A}{1-\alpha x} + \frac{B}{1-\beta x}$$

pour des constantes réelles A et B. Pour déterminer A, il suffit de tout multiplier par $(1-\alpha x)$, puis d'évaluer en $x = \frac{1}{\alpha}$. Cela donne

$$A = \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

De même, en multipliant par $(1-\beta x)$ et en évaluant en $\frac{1}{\beta}$, on trouve $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Ainsi,

$$\sum_{n\geqslant 0} F_n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n\geqslant 0}(\alpha^n - \beta^n)x^n,$$

et par identification des coefficients, on retrouve la formule bien connue

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

- Comment associer une série génératrice à un problème de comptage -

La manière dont on utilise les séries génératrices pour les problèmes de comptage repose sur un principe que vous connaissez déjà. Regardons la formule bien connue $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Dans chaque parenthèse, on a choisi x, <u>ou</u> pas : le + correspond donc au connecteur logique « ou », et le produit au connecteur logique « et » : j'ai choisi x dans la première parenthèse <u>et</u> je n'ai pas choisi x dans la deuxième parenthèse <u>et</u>. . . . Le coefficient du terme de degré k correspond au nombre de manières que l'on a de faire cela en ayant choisi k fois x à la fin.

Exemple 10. Combien de manières a-t-on de repartir 80 glaces parmi les 62 stagiaires du stage Animath ? Chaque stagiaire a 0 <u>ou</u> 1, <u>ou</u> 2... glaces, donc la série génératrice qui compte le nombre de manières de donner des glaces à un stagiaire est $\sum_{k\geqslant 0} x^k$: le coefficient devant chaque x^k est égal à 1 puisqu'il y a une seule manière de faire en sorte que le stagiaire ait k glaces. Ensuite, il y a 62 stagiaires, donc la série génératrice qui compte le nombre de manières de donner des glaces au stagiaire 1 et au stagiaire 2, etc. est $(1+x+x^2+\dots)^{62}$. Choisir un nombre de glaces à donner à chaque stagiaire pour que le total des glaces distribuées soit 80 revient à choisir un terme dans chaque parenthèse de sorte à ce que la somme des degrés des termes choisis vaille 80, qui est aussi le nombre de termes de degré 80 (avec un coefficient 1 devant) que l'on obtient en développant ce produit, qui est aussi le coefficient final que l'on obtient devant le terme de degré 80 une fois que l'on aura regroupé tous les termes. Autrement dit, nous voulons déterminer le coefficient de degré 80 de notre série génératrice. Or d'après les formules que nous avons vues

$$(1+x+x^2+\dots)^{62} = \frac{1}{(1-x)^{62}} = \sum_{n\geqslant 0} \binom{-62}{n} (-1)^n x^n.$$

Le nombre cherché est donc

$$\binom{-62}{80} = \binom{62+80+1}{80} = \binom{143}{80},$$

ce qui correspond bien au résultat que l'on trouve en résolvant l'exercice directement sans séries génératrices.

Remarque 11. A priori, il suffirait de développer $(1+x+\ldots+x^{62})^{62}$. Cependant, avec les séries génératrices, on a tout intérêt à garder tous les termes, vu que cela simplifie notablement les calculs (voire les rend faisables).

Essayons de comprendre de manière un peu plus théorique ce qui se passe pour le produit. Soient A et B deux ensembles disjoints. Supposons que le nombre de manières de choisir k objets dans A (respectivement B) vaut a_k (respectivement b_k). La série génératrice associée au choix d'objets dans A (respectivement B) est donc $f(x) = \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ (respectivement $g(x) = \sum_{k\geqslant 0} b_k x^k$). Alors la série génératrice associée au choix d'objets dans $A \cup B$ est le produit $f(x)g(x)$. En effet, choisir n objets dans $A \cup B$ revient à en choisir j dans A puis $n-j$ dans B, pour $j = 0, 1\dots, n$. Le nombre de manières de choisir n objets dans $A \cup B$ est donc

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0,$$

qui, par la définition du produit, est bien le coefficient du terme de degré n dans $f(x)g(x)$.

Exemple 12. la série génératrice correspondant à l'ensemble des entiers naturels est $\sum_{k\geqslant 0} x^k$: choisir un entier naturel, c'est choisir 0, ou 1, ou 2, etc. La série génératrice des entiers pairs est $\sum_{i\geqslant 0} x^{2i}$, celle des entiers impairs est $\sum_{j\geqslant 0} x^{2j+1}$. Le nombre de manières d'écrire un entier n comme la somme d'un entier pair et d'un entier impair sera la coefficient de degré n du produit de ces deux séries. En effet, on veut $n = 2a + b$, d'où $x^n = x^{2a}x^b$. Le nombre de manières d'écrire n sous la forme $2a + b$ correspond donc au nombre de manières d'obtenir un terme x^n en développant

$$\left(\sum_{a\geqslant 0} x^{2a}\right)\left(\sum_{b\geqslant 0} x^b\right),$$

qui est aussi le coefficient du terme de degré n dans ce développement, car tous les termes entre parenthèses ont des coefficients 1.

Exercice 1 Les élèves ayant mangé un peu trop de glaces, Igor va au marché pour acheter des fruits pour les 62 stagiaires du stage Animath. Combien de paniers de 62 fruits différents peut-il assembler sachant que

– Les pommes se vendent par lots de 2 ;
– Les bananes se vendent par lots de 5 ;
– Il ne reste plus que 4 oranges ;
– Il ne reste plus qu'une poire.

- Partitions -

Une partition d'un entier strictement positif n est une représentation de n comme somme d'autres entiers strictement positifs, regardée à permutation des termes près. Par exemple 4 peut être partitionné en $1+1+1+1$, $1+1+2$, $2+2$, $1+3$, 4. Les séries génératrices constituent un outil très puissant pour traiter des problèmes sur les partitions.

Exercice 2 Pour tout n, trouver le nombre a_n de manières de payer n euros avec des pièces de 1 et de 2 euros (sans tenir compte de l'ordre).

Exercice 3 Soit a_n le nombre de manières de partitionner n en des entiers deux à deux distincts, et b_n le nombre de manières de partitionner n en des entiers impairs. Montrer que $a_n = b_n$.

Exercice 4 Soit $b \geqslant 2$ un entier. Redémontrer en utilisant une série génératrice, le fait que tout entier naturel admet une décomposition unique en base b.

Le problème suivant n'est pas un problème de partitions à proprement parler, mais se résout avec le même genre de principes.

Exercice 5 Combien de triplets (a, b, c) d'entiers y a-t-il satisfaisant à l'équation $a + b + c = 6$ ainsi qu'aux conditions $-1 \leqslant a \leqslant 2$ et $1 \leqslant b, c \leqslant 4$?

Exercice 6 (Shortlist 1998) Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite croissante d'entiers naturels telle que tout entier naturel peut être représenté de manière unique sous la forme $a_i + 2a_j + 4a_k$, où i, j, k ne sont pas nécessairement distincts. Déterminer a_{1998}.

Exercice 7 Soit n un entier strictement positif. Combien y a-t-il de polynômes P à coefficients dans $\{0, 1, 2, 3\}$ tels que $P(2) = n$?

- Autres exemples -

Exercice 8 Peut-on partitionner l'ensemble $\mathbb{N}^*$ en un nombre fini (supérieur strictement à un) de progressions arithmétiques de raisons deux à deux distinctes ?

Exercice 9 Un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$ est égoïste s'il contient son propre cardinal, et si tous ses autres éléments sont plus grands que ce dernier, autrement dit, si son cardinal est égal à son plus petit élément. Calculer le nombre $b(n)$ de sous-ensembles égoïstes de $\{1, \ldots, n\}$.

- Solutions des exercices -

Solution de l'exercice 1 Nous allons résoudre le problème plus généralement pour n stagiaires. Il s'agit de déterminer le nombre de manières d'écrire n sous la forme $n = 2a + 3b + c + d$ avec a, b, c, d des entiers naturels et $c \leqslant 4$, $d \leqslant 1$, donc d'écrire x^n sous la forme $x^{2a}x^{2b}x^c x^d$, qui est aussi le coefficient de x^n dans le développement de :

$$\underbrace{\left(\sum_{k\geqslant 0} x^{2k}\right)}_{\text{pommes}}\underbrace{\left(\sum_{k\geqslant 0} x^{5k}\right)}_{\text{bananes}}\underbrace{(1+x+x^2+x^3+x^4)}_{\text{oranges}}\underbrace{(1+x)}_{\text{poires}}.$$

Cette série génératrice vaut

$$\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}\frac{1-x^5}{1-x}(1+x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

et le coefficient de degré n est donc $n+1$. En particulier, la solution du problème est 63.

Solution de l'exercice 2 Chaque manière de payer n euros avec r pièces de 1 et s pièces de 2 peut être encodée sous la forme $x^r x^{2s} = x^n$ Les entiers r et s peuvent être des entiers naturels quelconques. La série génératrice de la suite (a_n) s'écrit donc

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n = \left(\sum_{r\geqslant 0} x^r\right)\left(\sum_{s\geqslant 0} x^{2s}\right) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)}.$$

Essayons d'écrire cette fraction rationnelle sous la forme $\frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1+x}$ avec une décomposition en éléments simples. Une multiplication par $(1-x)^2$ suivie d'une évaluation en $x=1$ donne $B=\frac{1}{2}$. Une multiplication par $1+x$ suivie d'une évaluation en $x=-1$ donne $C=\frac{1}{4}$. Pour finir, si on multiplie par x et qu'on fait tendre x vers l'infini, on obtient $-A+C=0$, d'où $A=\frac{1}{4}$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i\geqslant 0}(i+1)x^i + \sum_{j\geqslant 0} x^{2j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k\geqslant 0}(2k+2)(x^{2k}+x^{2k+1})\right) \\
&= \sum_{k\geqslant 0}(k+1)(x^{2k}+x^{2k+1}) \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)x^n,
\end{aligned}$$

où les crochets représentent la partie entière. On a donc $a_n = \left[\frac{n}{2}\right]+1$.

Remarque : Bien entendu, cet exercice se fait aussi en calculant les premiers termes à la main, en conjecturant la formule et en la prouvant par récurrence. Cependant, la méthode des séries génératrices a l'avantage de se généraliser à tous les problèmes de ce type, même quand la formule est beaucoup moins devinable.

Solution de l'exercice 3 La série génératrice des a_n est $\prod_{i\geqslant 1}(1+x^i) = \prod i \geqslant 1\frac{1-x^{2i}}{1-x^i}$, celle des b_n est $\prod_{i\geqslant 1}\frac{1}{1-x^{2i+1}}$, on voit donc qu'elles sont égales.

Solution de l'exercice 4 On veut écrire chaque nombre comme somme d'un élément dans chacun des ensembles $A_i = \{0, b^i, 2 \cdot b^i, \dots, (b-1)b^i\}$. La série génératrice donnant les nombres s'écrivant sous cette forme est

$$\prod_{i \geqslant 0} \left(1 + x^{b^i} + \dots + x^{(b-1)b^i}\right) = \prod_{i \geqslant 0} \frac{1 - x^{b^{i+1}}}{1 - x^{b^i}} = \frac{1}{1-x} = \sum_{k \geqslant 0} x^k,$$

d'où le résultat.

Solution de l'exercice 5 On commence par généraliser le problème en cherchant la série génératrice de la suite des nombres de solutions de l'équation $a + b + c = n$ avec les mêmes conditions sur a, b, c (bien entendu, ce sera en fait un polynôme). Puisque $-1 \leqslant a \leqslant 2$, la contribution de la variable a est un facteur $x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2$. Quant à b et c, ils donnent chacun un facteur $x^1 + x^2 + x^3 + x^4$. La série génératrice cherchée est donc

$$f(x) = (x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)^2 = x(1 + x + x^2 + x^3)^3.$$

Ce qui nous intéresse, c'est le coefficient devant x^6 de ce polynôme. Développer directement l'expression ci-dessus est un peu long, et revient en fait quasiment au problème combinatoire initial. On a toujours intérêt à réécrire les choses sous une forme qui fait intervenir des termes du degré le plus grand possible. Ainsi, ici, on peut écrire

$$f(x) = x \left(\frac{1 - x^4}{1 - x}\right)^3 = x(1 - 3x^4 + 3x^8 - x^{12})(1 - x)^{-3}.$$

Les termes de degré 6 proviennent en choisissant soit 1 soit $-3x^4$ dans la première parenthèse, et donc respectivement le terme de degré 5 ou celui de degré 1 dans la deuxième parenthèse. D'après la formule du binôme, le coefficient qu'on cherche est donc

$$1 \times \left(-\binom{-3}{5}\right) + (-3) \times \left(-\binom{-3}{1}\right) = \binom{7}{5} - 3\binom{3}{1} = 21 - 9 = 12.$$

Solution de l'exercice 6 Cet exercice est un très bon exemple de la manière dont une solution avec les séries génératrices peut nous inspirer une solution n'utilisant pas les séries génératrices. Posons $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} x^{a_n}$. Par hypothèse, nous avons

$$f(x)f(x^2)f(x^4) = \sum_{n \geqslant 0} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

En effet, chaque terme à gauche est sous la forme $x^{a_i+2a_j+4a_k}$, et par unicité de la représentation, il y a un et un seul terme de chaque degré. Remplaçons x par x^2 : on obtient

$$f(x^2)f(x^4)f(x^8) = \frac{1}{1-x^2},$$

et combinant les deux équations, on a

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1-x} f(x^8) = (1+x)f(x^8).$$

En itérant ceci, on a

$$f(x) = \prod_{k \geqslant 0} (1 + x^{8^k}).$$

Les seuls termes de $f(x)$ ayant un coefficient non nul sont ceux dont l'écriture en base 8 ne comporte que les chiffres 0 ou 1. Le n-ième tel nombre se trouve en écrivant n en base 2 et en lisant le résultat en base 8. Ainsi, puisque $1998 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2$, on a

$$a_{1998} = 8^{10} + 8^9 + 8^8 + 8^7 + 8^6 + 8^3 + 8^2 + 8 = 1227096648.$$

Maintenant que nous avons le résultat grâce à la théorie des fonctions génératrices, essayons de trouver une solution qui ne les fait pas intervenir. Vu que la suite a_n est clairement unique, il suffit de montrer que la suite (b_n) dont le n-ième terme est l'écriture de n en base 2 lue en base 8, autrement dit, le $n+1$-ième nombre s'écrivant en base 8 avec seulement des 0 et des 1, satisfait la condition de l'énoncé.

Soit un entier naturel m. Considérons les entier c tel que $0 \leqslant c \leqslant 8^m - 1$, c'est-à-dire que l'écriture en base 2 de c comporte au plus $3m$ chiffres, et montrons que c s'écrit sous la forme $b_i + 2b_j + 4b_k$ avec $0 \leqslant b_i, b_j, b_k \leqslant 8^m - 1$, autrement dit $0 \leqslant i, j, k \leqslant 2^m - 1$. En base 2, nous avons $c = \sum_{i=0}^{3m-1} c_i 2^i$ avec pour tout i, $c_i \in \{0, 1\}$. Alors

$$c = \sum_{p=0}^{m-1} \left(c_{3p} 2^{3p} + c_{3p+1} 2^{3p+1} + c_{3p+2} 2^{3p+2} \right) = \sum_{p=0}^{m-1} c_{3p} 8^p + 2 \sum_{p=0}^{m-1} c_{3p+1} 8^p + 4 \sum_{p=0}^{m-1} c_{3p+2} 8^p,$$

d'où le résultat, en posant $i = \sum_{p=0}^{m-1} c_{3p} 2^p$, $j = \sum_{p=0}^{m-1} c_{3p+1} 2^p$ et $k = \sum_{p=0}^{m-1} c_{3p+2} 2^p$. Ainsi, les 8^m entiers entre 0 et $8^m - 1$ admettent une écriture sous la forme $a_i + 2a_j + 4a_k$ avec $0 \leqslant i, j, k \leqslant 2^m - 1$. D'autre part, tous les nombres de la forme $a_i + 2a_j + 4a_k$ avec $0 \leqslant i, j, k \leqslant 2^m - 1$ sont entre 0 et $8^m - 1$, et il y en a au plus $2^m \times 2^m \times 2^m = 8^m$, donc l'écriture est en fait unique. Ainsi, les suites (a_n) et (b_n) coïncident, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7 Appelons a_n le nombre cherché, et $f(t)$ la série génératrice de la suite (a_n). Pour $i \geqslant 0$ on appelle $A_i = \{2^i, 2^{i+1}, 3 \cdot 2^i\}$, a_n est le nombre de manières différentes d'obtenir n en choisissant au plus un nombre dans chacun des A_i et en sommant tous les nombres choisis. La série génératrice correspondante est

$$f(t) = \prod_{i \geqslant 0}(1 + t^{2^i} + t^{2^{i+1}} + t^{3 \cdot 2^i}) = \prod_{i \geqslant 0} \frac{1 - t^{2^{i+2}}}{1 - t^{2^i}} = \frac{1}{1-t}\frac{1}{1-t^2}.$$

On trouve la même série génératrice que dans l'exercice 2, donc $a_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Pour une solution sans séries génératrices, nous renvoyons vers le polycopié de Grésillon 2011 (Exercice 9 de combinatoire pour les avancés).

Solution de l'exercice 8 Supposons que $\mathbb{N}$ est partitionné en $S_1, \ldots, S_k$, avec $S_i = \{a_i + nr_i,\ n \in \mathbb{N}\}$, et $r_1 < \ldots < r_k$. Alors par hypothèse nous avons

$$\sum_{n \geqslant 1} x^n = \sum_{n \geqslant 0} x^{a_1 + nr_1} + \ldots + \sum_{n \geqslant 0} x^{a_k + nr_k},$$

ce qui donne

$$\frac{x}{1-x} = \frac{x^{a_1}}{1 - x^{r_1}} + \ldots + \frac{x^{a_k}}{1 - x^{r_k}}.$$

Cette relation est valable pour tout x complexe tel que $|x| < 1$. Si on fait tendre x vers $e^{\frac{2i\pi}{r_k}}$, le côté gauche a une limite finie, tandis que le côté droit diverge à cause de son dernier terme. Nous avons donc une contradiction.

Solution de l'exercice 9 Le calcul des premiers termes suggère que $b(n) = F_n$ où F_n est le n-ième terme de la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Nous allons présenter deux méthodes pour y arriver :

1. Avec une bijection : il s'agit d'établir la relation de récurrence $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$. Soit $B(n)$ l'ensemble des sous-ensembles égoïstes de $\{1 \ldots, n\}$. Parmi les éléments de $B(n+2)$, ceux qui ne contiennent pas $n+2$ sont clairement en bijection avec $B(n+1)$. Il nous reste à établir une bijection entre les éléments de $B(n+2)$ contenant $n+2$ et $B(n)$. Étant donné sous-ensemble égoïste de $\{1, \ldots, n\}$, augmentons de 1 tous ses éléments, puis, pour le rendre égoïste de nouveau, ajoutons-lui $n+2$ (qui ne lui appartient pas à l'origine, vu que tous ses éléments, après augmentation, ne dépassent pas $n+1$). Nous obtenons bien un élément de $B(n+2)$ contenant

$n+2$. Réciproquement, si on part d'un élément de $B(n+2)$ contenant $n+2$, il ne contient pas 1, car le seul élément de $B(n+2)$ contenant 1 est $\{1\}$. Nous pouvons donc lui enlever $n+2$ et soustraire 1 à tous ses éléments, obtenant ainsi un élément de $B(n)$. Les deux opérations que nous avons décrites sont clairement inverses l'une de l'autre, donc nous avons $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$, et le calcul des premiers termes conclut.

2. Avec les séries génératrices : Comment "représenter" un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ comme un terme d'une série génératrice ? Si on l'écrit $\{k, k+a_1, k+a_1+a_2, \ldots, k+a_1+\ldots+a_{l-1}\}$, il suffit de le coder à l'aide de son plus petit élément k, et des différences $a_1, \ldots, a_l$ successives entre le premier élément et le deuxième, puis entre le deuxième et le troisième, etc. Ainsi, l'ensemble en question sera "représenté" par le terme $x^k x^{a_1} \ldots x^{a_l}$, de degré égal à son plus grand élément. Un ensemble égoïste de plus petit terme k ayant pour cardinal k, les termes qui nous intéressent vérifient $l = k$, et seront obtenus par développement de la série $x^k(x+x^2+\ldots)^{k-1}$. Pour tout entier $m \geqslant k-1$, le coefficient du terme de degré $k+m$ dans le développement de cette dernière est en effet clairement égal au nombre d'ensembles égoïstes de cardinal k et de plus grand élément $k+m$. Les termes de degré inférieur à n comptent les ensembles égoïstes de cardinal k ne contenant que des entiers inférieurs à n, donc avec les sous-ensemble égoïstes de cardinal k de $\{1, \ldots, n\}$. En sommant sur k afin d'inclure les ensembles égoïstes de toutes les tailles, on obtient la série

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geqslant 1} x^k(x+x^2+x^3+\ldots)^{k-1} &= \sum_{k \geqslant 1} \frac{x^{2k-1}}{(1-x)^{k-1}} \\
&= x \sum_{k \geqslant 1} \left(\frac{x^2}{1-x}\right)^{k-1} \\
&= x \frac{1}{1-\frac{x^2}{1-x}} \\
&= \frac{x(1-x)}{1-x-x^2}.
\end{aligned}$$

Il nous suffit maintenant d'extraire la somme des n premiers coefficients de cette série, en prenant le terme de degré n de

$$\frac{1}{1-x} \times \frac{x(1-x)}{1-x-x^2} = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Or dans cette dernière série on reconnaît bien la série génératrice de F_n.