Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2016-2017 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 10 : Chaînes de Markov, classification des états

Lundi 5 Décembre

Exercice 1 (Petites questions sur la classification des états)
On notera génériquement $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q à valeurs dans un espace d'états dénombrable S. Pour $x \in S$, on notera $N_x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}$.

1. Donner un exemple où l'ensemble des points visités par la chaîne issue de x n'est pas déterministe.
2. Donner un exemple où, sous $\mathbb{P}_x$, l'ensemble des points visités par la chaîne est p.s. toujours le même, sans que x soit récurrent. Donner un exemple où, de plus, l'ensemble des 3 premiers points visités en partant de x n'est pas déterministe.
3. Pour $x, y \in S$, est-il vrai que si y est récurrent et il existe n tel que $Q^n(x, y) > 0$, alors $N_y = +\infty$ $\mathbb{P}_x$-p.s. ?
4. Donner un exemple où il existe n tel que $Q^n(x, y) > 0$ mais $Q^m(y, x) = 0$ pour tout $m \geq 0$.
5. Montrer que pour $x, y \in S$, si $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$, alors y est récurrent. La réciproque est-elle vraie ?
6. Peut-on avoir $0 < \mathbb{E}_x[N_y] < +\infty$, avec y récurrent ?
7. Si $\mathbb{E}_x[N_y] = +\infty$, quelles valeurs peut prendre $\mathbb{E}_y[N_x]$?
8. On suppose que pour tout $x \in S$, l'ensemble $V_x = \{y \in S \mid \exists n \text{ tel que } Q^n(x, y) > 0\}$ est fini. Montrer qu'il existe des états récurrents.

Exercice 2 (Chaînes irréductibles)
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace dénombrable S de matrice de transition Q. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible si et seulement si il n'existe pas de sous-ensemble strict non vide F de S tel que

$$\forall x \in F, \forall y \in S\backslash F, \quad Q(x, y) = 0\,.$$

Exercice 3 (Condition de Kolmogorov pour la réversibilité)
On considère une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état dénombrable S, de matrice de transition Q. Montrer que la chaîne admet une mesure réversible si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

— $\forall (x, y) \in S^2, \qquad Q(x, y) > 0 \implies Q(y, x) > 0,$

— Pour toute “boucle” $x_0, x_1, ..., x_n = x_0$ telle que $\prod_{i=1}^n Q(x_i, x_{i-1}) > 0$, on a

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{Q(x_{i-1}, x_i)}{Q(x_i, x_{i-1})} = 1 .$$

Exercice 4 (Chaîne de naissance et de mort)
Soit Q la matrice de transition sur $\mathbb{N}$ donnée par :

$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $p_0 > 0$, $p_0 + r_0 = 1$, ainsi que $p_i > 0$, $q_i > 0$ et $p_i + r_i + q_i = 1$ pour tout $i \geq 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de matrice de transition Q.

1. Montrer que X est irréductible.
2. On suppose que
$$\sum_{i\geq 1} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} < +\infty .$$
Montrer que X admet une mesure de probabilité réversible π qu'on déterminera. Que peut-on en déduire sur X ?
3. On se place dans le cas suivant : soit $p \in [0, 1]$. On prend $p_0 = 1$ et $r_0 = 0$ et, pour tout $i \geq 1$, on prend $p_i = p$ et $q_i = 1 - p$ ainsi que $r_i = 0$. Pour quelles valeurs de p la chaîne X est-elle récurrente ?

Exercice 5 (Temps de départ)
Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un espace dénombrable E, de matrice de transition Q. On suppose que $Q(x, x) < 1$ pour tout $x \in E$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration canonique et on définit

$$\tau = \inf\{n \geq 1,\ X_n \neq X_0\}.$$

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que pour tout $x \in E$, τ est fini $\mathbb{P}_x$-p.s. Calculer les lois de τ et de X_τ sous $\mathbb{P}_x$.
2. On définit une suite de variables $(\tau_k)_{k\geq 0}$ par
$$\tau_0 = 0,\ \tau_1 = \tau,\ \tau_{k+1} = \inf\{n \geq \tau_k,\ X_n \neq X_{\tau_k}\}.$$
Montrer que les τ_k sont des temps d'arrêt finis $\mathbb{P}_x$-p.s.
3. On définit un processus (Y_n) par $Y_n = X_{\tau_n}$. Montrer que (Y_n) est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
4. On suppose que (X_n) est irréductible récurrente. Montrer que (Y_n) est aussi irréductible récurrente.
5. Soit μ une mesure invariante pour (X_n). A partir de μ, construire une mesure ν invariante pour (Y_n).