Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2016-2017 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 11 : Convergence de chaînes de Markov

Lundi 12 Décembre

Exercice 1 (Les parapluies)
Michel possède k parapluies qu'il garde soit chez lui, soit dans son bureau à Ulm. Le matin, avant d'aller au travail, il regarde par la fenêtre le temps qu'il fait :

— s'il fait beau, il ne prend pas de parapluie.
— s'il pleut et qu'il a un parapluie chez lui, il prend le parapluie et va au travail.
— s'il pleut et qu'il n'y a plus de parapluie, il décide de rester chez lui.

Le soir, il fait la même chose (s'il pleut et qu'il n'a pas de parapluies, il décide de rentrer quand même). On suppose que chaque demi-journée, il pleut avec probabilité p et il fait beau avec probabilité $1-p$ avec $0 < p < 1$, et que de plus, les météos des demi-journées sont indépendantes. Michel souhaite ne rater en moyenne qu'une journée de travail par semaine. Combien de parapluies doit-il posséder pour cela ?

Exercice 2 (Rangement sur une étagère)
Chaque matin un étudiant prend un des trois livres (numérotés de 1 à 3) posés sur son étagère. La probabilité qu'il choisisse le livre i est α_i, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, où $0 < \alpha_i < 1$ et $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, et les choix qu'il fait jour après jour sont indépendants. Le soir, il replace le livre qu'il a pris à gauche des autres, sans les déranger. Quel est le comportement asymptotique de p_n, la probabilité que le n-ième matin au réveil l'étudiant trouve ses livres rangés dans l'ordre $(1, 2, 3)$ de gauche à droite ?

Exercice 3 (Durée de vie des ampoules)
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

- $\mu = \mathbb{E}[Y_1] < +\infty$,
- pgcd $\{n \geq 1 : \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} = 1$.

On définit le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = \inf\{m \geq n \,|\, \exists k \geq 1, Y_1 + \ldots + Y_k = m\} - n\,.$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible, et apériodique.
2. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\exists k \geq 1,\, Y_1 + \ldots + Y_k = n) = \frac{1}{\mu}.$$

3. Quel est le rapport avec le titre de l'exercice ?

Exercice 4 (Un mélange de cartes)
Soit $n > 0$. On cherche à mélanger un jeu de n cartes numérotées de 1 à n. À l'instant 0, les cartes sont rangées dans l'ordre (la carte 1 est en haut du paquet, la carte n en bas). À chaque instant, on choisit uniformément une carte dans le paquet et on la replace en haut. À l'instant k, le paquet est décrit par une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ qu'on note X_k (plus précisément $X_k(i)$ est le numéro sur la i-ème carte du paquet en partant du haut). On note μ_k la loi de X_k et μ la mesure uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. Le but de l'exercice est d'estimer combien de fois il faut répéter cette opération pour que le jeu soit bien mélangé. Si μ et ν sont deux mesures sur $\mathfrak{S}_n$, on notera

$$d(\mu, \nu) = \max_{A \subset \mathfrak{S}_n} |\mu(A) - \nu(A)|$$

la *distance en variation totale* entre μ et ν.

1. Montrer que $d(\mu, \mu_k) \to 0$ quand $k \to +\infty$ à n fixé.
2. On note A_k l'ensemble des cartes qui ont été déplacées au moins une fois en haut du paquet entre l'instant 0 et l'instant k, et $T_i = \min\big\{k \geq 0 \big| |A_k| \geq i\big\}$. Montrer que pour tous $\varepsilon > 0$ et $j > 0$ fixés, on a
$$\mathbb{P}\big((1-\varepsilon)n \ln n \leq T_{n-j} \leq (1+\varepsilon)n \ln n\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$
3. En déduire que si $k = (1-\varepsilon)n \ln n$, alors
$$d(\mu_k, \mu) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$
4. On place à côté de notre jeu un deuxième jeu, déjà mélangé de manière uniforme. À chaque instant k, si on place la carte numérotée i en haut du premier paquet, on place également la carte numérotée i en haut du second paquet. On note $\widetilde{X}_k$ la permutation qui décrit le second jeu au temps k. Montrer que $\widetilde{X}_k$ est uniforme pour tout k et que, pour $k = (1+\varepsilon)n \ln n$,
$$\mathbb{P}\left(X_k = \widetilde{X}_k\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$
5. En déduire que si $k = (1+\varepsilon)n \ln n$, alors
$$d(\mu_k, \mu) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$