Processus aléatoires
ENS Paris, 2016-2017

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 11 : Convergence de chaînes de Markov
Corrigé

Lundi 12 Décembre

Exercice 1 (Les parapluies)
Michel possède k parapluies qu'il garde soit chez lui, soit dans son bureau à Ulm. Le matin, avant d'aller au travail, il regarde par la fenêtre le temps qu'il fait :

- s'il fait beau, il ne prend pas de parapluie.
- s'il pleut et qu'il a un parapluie chez lui, il prend le parapluie et va au travail.
- s'il pleut et qu'il n'y a plus de parapluie, il décide de rester chez lui.

Le soir, il fait la même chose (s'il pleut et qu'il n'a pas de parapluies, il décide de rentrer quand même). On suppose que chaque demi-journée, il pleut avec probabilité p et il fait beau avec probabilité $1-p$ avec $0 < p < 1$, et que de plus, les météos des demi-journées sont indépendantes. Michel souhaite ne rater en moyenne qu'une journée de travail par semaine. Combien de parapluies doit-il posséder pour cela ?

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Notons X_n le nombre de parapluies que Michel a chez lui le soir du n-ième jour. Chaque jour :

- avec proba $p(1-p)$, il pleut le matin mais pas l'après-midi, auquel cas X_n diminue de 1 (sauf si $X_n = 0$),
- avec proba $p(1-p)$, il pleut l'après-midi mais pas le matin, auquel cas X_n augmente de 1 (sauf si $X_n = k$),
- avec proba $p^2 + (1-p)^2$, il pleut toute la journée ou pas du tout, auquel cas X_n ne change pas (y compris si $X_n = 0$ ou k).

On en déduit que X est une chaîne de Markov sur $\{0, 1, \dots, k\}$ de matrice de transition Q avec

$$Q(i,j) = \begin{cases} p(1-p) & \text{si } |i-j| = 1, \\ p^2 + (1-p)^2 & \text{si } i = j \notin \{0,k\}, \\ 1 - p(1-p) & \text{si } i = j \in \{0,k\}, \\ 0 & \text{si } |i-j| \geq 2. \end{cases}$$

Cette chaîne de Markov est irréductible car $Q^{|i-j|}(i,j) > 0$ pour tous i, j et apériodique car $Q(0,0) > 0$. Elle admet donc une unique mesure de probabilité stationnaire et converge vers cette mesure stationnaire. On cherche une mesure μ réversible pour Q, i.e. telle que pour tous i et j,

$$\mu(i)Q(i,j) = \mu(j)Q(j,i). \tag{1}$$

La condition 1 est trivialement vérifiée pour $i = j$ (par symétrie) et pour $|i-j| \geq 2$ (les deux membres sont nuls), donc il suffit d'avoir

$$\mu(i)Q(i,i+1) = \mu(i+1)Q(i+1,i)$$

pour tout $0 \leq i \leq k-1$, soit $p(1-p)\mu(i) = p(1-p)\mu(i+1)$, soit $\mu(i+1) = \mu(i)$. Ainsi, la mesure uniforme μ sur $\{0, 1, \dots, k\}$ est réversible, donc stationnaire, pour Q, donc

$$\mathbb{P}(X_n = 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mu(0) = \frac{1}{k+1},$$

et

$$\mathbb{P}\left(\text{Michel reste chez lui le jour } n\right) = \mathbb{P}\left(X_n = 0 \text{ et il pleut le } n\text{-ième matin}\right) = p\,\mathbb{P}(X_n = 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{p}{k+1}.$$

Or, il pleut en moyenne 111 jours par an à Paris. On a donc $1-(1-p)^2 = \frac{111}{365}$, soit $p \approx 0,1658$. Pour ne rater qu'un jour de travail par semaine en moyenne, il faut donc $\frac{p}{k+1} \leq \frac{1}{7}$, donc Michel doit avoir au moins $7p \approx 1,16$ parapluies, donc au moins 2. Pour rater en moyenne moins d'un jour par mois, il doit en avoir 5.

Exercice 2 (Rangement sur une étagère)
Chaque matin un étudiant prend un des trois livres (numérotés de 1 à 3) posés sur son étagère. La probabilité qu'il choisisse le livre i est α_i, pour $i \in \{1,2,3\}$, où $0 < \alpha_i < 1$ et $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, et les choix qu'il fait jour après jour sont indépendants. Le soir, il replace le livre qu'il a pris à gauche des autres, sans les déranger. Quel est le comportement asymptotique de p_n, la probabilité que le n-ième matin au réveil l'étudiant trouve ses livres rangés dans l'ordre $(1,2,3)$ de gauche à droite ?

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Pour tout $n \geq 0$, on note X_n l'ordre des livres au n-ième matin, avant que l'étudiant ne fasse son choix. La variable X_n est à valeurs dans l'espace des permutations

$$S = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}.$$

On note ξ_n le numéro du livre choisi par l'étudiant le n-ième matin. Les $(\xi_n)_{n\geq 0}$ sont des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\{1,2,3\}$, on note γ la loi de ξ_1. Pour tout n, la variable X_n est $\sigma(\xi_0, \cdots \xi_{n-1})$-mesurable, donc ξ_n est indépendante de X_n.

On en déduit que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans S de matrice de transition Q avec, pour toute permutation (a,b,c) de $(1,2,3)$,

$$\begin{cases} Q((a,b,c),(a,b,c)) = \alpha_a, \\ Q((a,b,c),(b,a,c)) = \alpha_b, \\ Q((a,b,c),(c,a,b)) = \alpha_c, \\ Q((a,b,c),(d,e,f)) = 0 \qquad \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Cette chaîne est irréductible et apériodique. Elle possède donc une unique mesure de probabilité invariante, que l'on note π. De plus, pour tout $x \in S$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \pi(x).$$

On détermine maintenant π. Soit $(a,b,c) \in S$. Comme $\pi Q = \pi$, on a $\pi(a,b,c) = \alpha_a\left[\pi(a,b,c) + \pi(b,a,c) + \pi(b,c,a)\right]$. En particulier, on a $\pi(a,b,c) + \pi(a,c,b) = \alpha_a \sum_{x\in S} \pi(x) = \alpha_a$. Par symétrie, on a donc aussi $\pi(b,a,c) + \pi(b,c,a) = \alpha_b$. On en déduit

$$\pi(a,b,c) = \alpha_a\left(\pi(a,b,c) + \pi(b,a,c) + \pi(b,c,a)\right) = \alpha_a\left(\pi(a,b,c) + \alpha_b\right),$$

donc $\pi(a,b,c) = \frac{\alpha_a\alpha_b}{1-\alpha_a}$. En particulier $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1}$.

Exercice 3 (Durée de vie des ampoules)
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

- $\mu = \mathbb{E}[Y_1] < +\infty$,
- pgcd $\{n \geq 1 : \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\} = 1$.

On définit le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$X_n \;=\; \inf\{m \geq n \,|\, \exists k \geq 1, Y_1 + \ldots + Y_k = m\} - n\,.$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible, et apériodique.
2. En déduire
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\exists k \geq 1,\, Y_1 + \ldots + Y_k = n) \;=\; \frac{1}{\mu}.$$

3. Quel est le rapport avec le titre de l'exercice ?

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

1. On remarque (faire un dessin !) que, pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 & \text{si } X_n \neq 0, \\ Y_{k+1} - 1 & \text{si } X_n = 0 \text{ et } n = Y_1 + ... + Y_k. \end{cases}$$

Sur l'événement $\{Y_1 + ... + Y_k = n\}$ (qui est évidemment dans $\sigma(Y_1, ..., Y_k)$), les variables $X_0, ..., X_n$ sont $\sigma(Y_1, ..., Y_k)$-mesurables, et donc indépendantes de $X_{n+1} = Y_{k+1} - 1$. Sur l'événement $\{X_n \geq 1\}$, $X_{n+1} = X_n - 1$ p.s. Cela implique que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q définie par

$$\begin{array}{lcll} Q(i, i-1) & = & 1 & \text{pour } i \geq 1 \\ Q(0, j) & = & \mathbb{P}(Y_1 = j+1) & \text{pour } j \geq 0 \\ Q(i, j) & = & 0 & \text{dans les autres cas}. \end{array}$$

En effet, on a pour tous $(x_0, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{N}$, si $x_n > 0$:

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_{n+1} = x_{n+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_{n+1} \neq x_n - 1, \\ \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = x_n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $x_n = 0$, d'après l'indépendance énoncée ci-dessus,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_{n+1} = x_{n+1}) &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n, X_{n+1} = x_{n+1}) \\ &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n, Y_{k+1} = x_{n+1} + 1) \\ &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n)\, \mathbb{P}(Y_{k+1} = x_{n+1} + 1) \\ &= \left(\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = 0, Y_1 + ... + Y_k = n) \right) \\ &\qquad \times \mathbb{P}(Y_1 = x_{n+1} + 1) \\ &= \mathbb{P}(X_0 = x_0, ..., X_n = 0)\, \mathbb{P}(Y_1 = x_{n+1} - 1). \end{aligned}$$

L'espace d'états de $(X_n)_{n\geq 0}$ est $S = \{0, \ldots, m\}$ si $m = \sup\{i \geq 0 | \mathbb{P}(Y_1 = i+1) > 0\} < +\infty$ et $S = \mathbb{N}$ sinon. On vérifie que $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible. Soient $i, j \in S$. Si $i > j$, alors $Q^{i-j}(i, j) = 1 > 0$. Si $i \leq j$, soit $\ell \geq j$ tel que $\mathbb{P}(Y_1 = \ell + 1) > 0$. Alors

$$Q^{i+\ell-j+1}(i, j) \geq Q^i(i, 0) Q(0, \ell) Q^{\ell-j}(\ell, j) > 0.$$

Enfin, pour tout $n \geq 1$,

$$Q^n(0, 0) \geq \mathbb{P}(Y_1 = n),$$

donc

$$L_0 := \{n \geq 1 \,|\, Q^n(0, 0) > 0\} \supset \{n \geq 1 \,|\, \mathbb{P}(Y_1 = n) > 0\},$$

où ce dernier ensemble est de PGCD 1, donc 0 est de période 1, donc la chaîne est apériodique.

2. D'après la question précédente Q admet une unique mesure stationnaire ν et X converge en loi vers ν. La limite qui nous intéresse est donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \nu(0).$$

On a donc calculer ν. Pour tout i, on a

$$\nu(i) = \nu(i+1) + \nu(0)\mathbb{P}\left(Y_1 = i+1\right),$$

d'où on déduit facilement par récurrence

$$\nu(i) = \nu(0)\mathbb{P}\left(Y_1 > i\right).$$

On a donc

$$1 = \nu(0)\sum_{i\geq 0}\mathbb{P}\left(Y_1 > i\right) = \nu(0)\sum_{i\geq 1}\mathbb{P}\left(Y_1 \geq i\right) = \nu(0)\mu,$$

donc $\nu(0) = \frac{1}{\mu}$, d'où le résultat.

3. Imaginons que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ représente la durée de vie d'ampoules. Quand la k-ième ampoule ne fonctionne plus, on la remplace par la $(k+1)$-ième dont la durée de vie est Y_{k+1}. L'exercice montre qu'asymptotiquement, la probabilité d'avoir à changer une ampoule à l'instant n est l'inverse de la durée de vie moyenne des ampoules.

Exercice 4 (Un mélange de cartes)
Soit $n > 0$. On cherche à mélanger un jeu de n cartes numérotées de 1 à n. À l'instant 0, les cartes sont rangées dans l'ordre (la carte 1 est en haut du paquet, la carte n en bas). À chaque instant, on choisit uniformément une carte dans le paquet et on la replace en haut. À l'instant k, le paquet est décrit par une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ qu'on note X_k (plus précisément $X_k(i)$ est le numéro sur la i-ème carte du paquet en partant du haut). On note μ_k la loi de X_k et μ la mesure uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. Le but de l'exercice est d'estimer combien de fois il faut répéter cette opération pour que le jeu soit bien mélangé. Si μ et ν sont deux mesures sur $\mathfrak{S}_n$, on notera

$$d(\mu,\nu) = \max_{A\subset\mathfrak{S}_n} |\mu(A) - \nu(A)|$$

la *distance en variation totale* entre μ et ν.

1. Montrer que $d(\mu,\mu_k) \to 0$ quand $k \to +\infty$ à n fixé.
2. On note A_k l'ensemble des cartes qui ont été déplacées au moins une fois en haut du paquet entre l'instant 0 et l'instant k, et $T_i = \min\left\{k \geq 0 \middle| |A_k| \geq i\right\}$. Montrer que pour tous $\varepsilon > 0$ et $j > 0$ fixés, on a
$$\mathbb{P}\big((1-\varepsilon)n\ln n \leq T_{n-j} \leq (1+\varepsilon)n\ln n\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
3. En déduire que si $k = (1-\varepsilon)n\ln n$, alors
$$d(\mu_k,\mu) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
4. On place à côté de notre jeu un deuxième jeu, déjà mélangé de manière uniforme. À chaque instant k, si on place la carte numérotée i en haut du premier paquet, on place également la carte numérotée i en haut du second paquet. On note $\widetilde{X}_k$ la permutation qui décrit le second jeu au temps k. Montrer que $\widetilde{X}_k$ est uniforme pour tout k et que, pour $k = (1+\varepsilon)n\ln n$,
$$\mathbb{P}\left(X_k = \widetilde{X}_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
5. En déduire que si $k = (1+\varepsilon)n\ln n$, alors
$$d(\mu_k,\mu) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Solution de l'exercice 4 Dans tout ce qui suit, la dépendance en n sera implicite.

1. On voit que X est une chaîne de Markov de matrice de transition Q avec

$$Q(\sigma,\pi) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \pi = c \circ \sigma \text{ où } c \text{ est un cycle de la forme } (1\,2\,\cdots\,i), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, pour toute permutation π, il existe exactement n permutations σ telles que $Q(\sigma,\pi) = \frac{1}{n}$ et on a $Q(\sigma,\pi) = 0$ pour toutes les autres. On en déduit

$$\frac{1}{n!} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{n!} Q(\sigma,\pi),$$

donc la mesure uniforme μ est stationnaire pour Q. Pour assurer la convergence de X vers μ, il suffit donc de montrer que Q est irréductible et apériodique. L'apériodicité est évidente car $Q(\sigma,\sigma) = \frac{1}{n} > 0$ pour tout σ. De plus, en partant de σ on peut toujours obtenir la permutation π en plaçant successivement en haut du paquet les cartes $\pi(n), \pi(n-1), \dots, \pi(1)$, donc Q est irréductible.

2. Si $|A_k| = i$, alors conditionnellement à $\mathcal{F}_k$, la probabilité de placer une "nouvelle" carte en haut du paquet vaut $\frac{n-i}{n}$. En utilisant la propriété de Markov forte, on en déduit que les $T_{i+1} - T_i$ sont indépendantes, avec $T_{i+1} - T_i$ géométrique de paramètre $\frac{n-i}{n}$. On a donc

$$\mathbb{E}[T_{n-j}] = \sum_{i=0}^{n-j-1} \mathbb{E}\left[T_{i+1} - T_i\right] = n \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{1}{n-i} = n \ln n + O(n)$$

et, par indépendance,

$$\mathrm{Var}(T_{n-j}) = \sum_{i=0}^{n-j-1} \mathrm{Var}\left(T_{i+1} - T_i\right) = \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{ni}{(n-i)^2} \leq n^2 \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{1}{(n-i)^2} \leq \frac{\pi^2}{6} n^2.$$

Comme $\mathrm{Var}(T_{n-j}) = o\left(\mathbb{E}[T_{n-j}]^2\right)$ quand $n \to +\infty$, on en déduit le résultat par Bienaymé-Chebychev.

3. Soit $j > 0$, et S_j l'ensemble des permutations σ telles que $\pi(n) > \pi(n-1) > \cdots > \pi(n-j+1)$. On a d'une part $\mu(S_j) = \frac{1}{j!}$. D'autre part, avec proba tendant vers 1 quand $n \to +\infty$ on a $T_{n-j} \geq (1-\varepsilon) n \ln n$ d'après la question précédente. Or, on remarque que les cartes qui n'ont jamais été "remontées" se trouvent en-dessous de toutes les autres. Par conséquent, si $T_{n-j} \geq k$, alors au temps k les j cartes les plus basses du paquet n'ont jamais été remontées, donc les j cartes les plus basses du paquet sont encore dans l'ordre croissant, donc $X_k \in S_j$. On a donc

$$\mu_k(S_j) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

pour j fixé et $k = (1-\varepsilon) n \ln n$. On a donc $|\mu(S_j) - \mu_k(S_j)| \geq 1 - \frac{2}{j!}$ pour n assez grand, donc $d(\mu_k, \mu) \geq 1 - \frac{2}{j!}$. Comme cela est vrai pour tout j, on en déduit le résultat.

4. À chaque instant, la carte qu'on remonte en haut du premier jeu est uniforme, donc son numéro est uniforme dans $\{1, \dots, n\}$, donc la carte qu'on remonte en haut du second jeu est uniforme, donc $\widetilde{X}$ est une chaîne de Markov avec les mêmes transitions que X. Elle admet donc la mesure uniforme comme mesure stationnaire. Comme $\widetilde{X}_0$ est déjà uniforme, la permutation $\widetilde{X}_k$ est donc uniforme pour tout k.

   Par ailleurs, considérons deux cartes i et j. Une fois que i et j ont toutes les deux été remontées au moins une fois, leur position relative est la même dans les deux paquets (la plus haute est la dernière à avoir été remontée). Par conséquent, dès que toutes les cartes ont été remontées au moins une fois, les positions relatives de i et j sont les mêmes dans les deux paquets pour tous i et j, donc les deux paquets sont rangés identiquement. Par conséquent, on a $\widetilde{X}_k = X_k$ dès que $k \geq T_n$. On conclut en utilisant la question 2.

5. Pour tout $A \subset \mathfrak{S}_n$, on a, en utilisant le fait que $\widetilde{X}_k$ est uniforme,

$$\begin{aligned} |\mu_k(A) - \mu(A)| &= \left| \mathbb{P}\left(X_k \in A\right) - \mathbb{P}\left(\widetilde{X}_k \in A\right) \right| \\ &\leq \mathbb{P}\left(X_k \in A, \widetilde{X}_k \notin A\right) + \mathbb{P}\left(X_k \notin A, \widetilde{X}_k \in A\right) \\ &\leq 2\,\mathbb{P}\left(X_k \neq \widetilde{X}_k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Remarque Cet exercice est un problème de *temps de mélange*. Un phénomène un peu surprenant se produit ici : alors qu'on pourrait s'attendre à ce que le jeu se mélange "progressivement", il est en fait très mal mélangé après un temps $0.99\,n\ln n$ et très bien mélangé après un temps $1.01\,n\ln n$. Ce phénomène, assez courant dans les problèmes de mélanges de cartes, est appelé "cutoff".