Processus aléatoires
ENS Paris, 2016-2017

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 2 : Construction du mouvement brownien

Lundi 26 Septembre

1 Calculs autour de la construction du mouvement brownien

Exercice 1 On rappelle que les fonctions $g_{n,k}$ sont définies sur $[0,1]$ de la manière suivante :

$$g_{0,0}(t) = t \qquad \text{et} \qquad g_{n,k}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}} \left(t - \frac{k-1}{2^n}\right) & \text{si } t \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right] \\ 2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{k+1}{2^n} - t\right) & \text{si } t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

pour $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq 2^n$ avec k impair. Soient $(\xi_{n,k})_{n,k\geq 0}$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout t de la forme $\frac{i}{2^n}$ on pose

$$B_t = \sum_{n,k} \xi_{n,k}\, g_{n,k}(t).$$

Vérifier que pour tous s et t dyadiques on a bien $\mathbb{E}\left[B_s B_t\right] = \min(s,t)$.

Indication : On pourra raisonner par récurrence en exprimant $g_{n,k}$ en fonction de $g_{n-1,k}$ ou de $g_{n-1,k-2^{n-1}}$.

Exercice 2 Soit $\left((B_t^n)_{t\in[0,1]}\right)_{n\geq 0}$ une suite de mouvements browniens sur $[0,1]$ indépendants. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ on pose

$$\left(B_t = \sum_{n=0}^{\lfloor t\rfloor -1} B_1^n\right) + B_{t-\lfloor t\rfloor}^{\lfloor t\rfloor}.$$

Vérifier que pour tous s et t on a bien

$$\mathbb{E}\left[B_s B_t\right] = \min(s,t).$$

2 Comment identifier la loi d'un processus ?

Soit $T > 0$. On munit l'espace $\mathcal{C}([0,T])$ des fonctions continues de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ de la norme infinie, et de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathcal{C}([0,T]))$ associée à cette norme. On rappelle (TD de la semaine dernière, exercice 6) que la tribu borélienne est aussi la plus petite tribu sur $\mathcal{C}([0,T])$ qui rend mesurables les projections $x \to x_t$ pour $t \in [0,T]$.

Exercice 3 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}([0,T])$. On suppose que pour tout $k \geq 1$ et tous $t_1, \ldots, t_k \in [0,T]$, les vecteurs

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}) \qquad \text{et} \qquad (Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_k})$$

ont la même loi. Montrer que X et Y ont la même loi.

Exercice 4 En déduire que si X vérifie les trois conditions suivantes :
(i) pour tous $t_1, \ldots, t_k \geq 0$ le vecteur $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ est un vecteur gaussien,
(ii) pour tout $t \geq 0$ on a $\mathbb{E}[X_t] = 0$,
(iii) pour tous $s, t \geq 0$ on a $\mathbb{E}[X_s X_t] = \min(s,t)$,
alors X a la loi d'un mouvement brownien.

Remarque Dans la suite, on pourra admettre que ce résultat reste vrai en remplaçant $\mathcal{C}([0,T])$ par l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et de la tribu borélienne associée (ce n'est pas un résultat difficile, il suffit d'adapter l'exercice 6 du TD1 à ce cas).

3 Mouvements browniens

Exercice 5 Soit B un mouvement brownien et $a > 0$. Montrer que les processus suivants sont des mouvements browniens :

- $X = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} B_{at}\right)_{t \geq 0}$,
- $Y = \left(t B_{1/t}\right)_{t \geq 0}$,
- $Z = \left(B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s}\, \mathrm{d}s\right)_{t \geq 0}$.

4 Processus de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On rappelle que le *processus de Poisson* $(N_t)_{t \geq 0}$ *d'intensité* λ est défini par

$$N_t = \min\{n \in \mathbb{N} | X_0 + X_1 + \cdots + X_n \geq t\},$$

où $(X_i)_{i \geq 0}$ est une suite de variables i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ, c'est à dire de loi $\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x>0}\, \mathrm{d}x)$.

On rappelle également que la loi de Poisson de paramètre λ est définie par $🐟_\lambda(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 Montrer que pour tous s et t les variables N_t et $N_{s+t} - N_t$ sont indépendantes de lois respectives $🐟_{\lambda t}$ et $🐟_{\lambda s}$.

Montrer que pour tous $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$, les variables $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ pour $0 \leq i \leq k-1$ sont indépendantes de lois respectives $🐟_{\lambda(t_{i+1} - t_i)}$.

Exercice 7 Soient $N^{(1)}$ et $N^{(2)}$ deux processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Montrer que $N^{(1)} + N^{(2)}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.