Processus aléatoires
ENS Paris, 2016-2017

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 4 : Marches aléatoires et mouvement brownien
Corrigé

Lundi 10 Octobre

1 Exercice à préparer pour la séance

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, et $M_n = \max\{X_k|0 \le k \le n\}$.

1. Montrer que pour tous $a, n \in \mathbb{N}^*$ on a $\mathbb{P}(M_n \ge a, X_n < a) = \mathbb{P}(M_n \ge a, X_n > a)$.
2. En déduire une expression aussi simple que possible de la loi de M_n en fonction de celle de X_n.
3. Soit B un mouvement brownien et soit $S_t = \sup\{B_s|0 \le s \le t\}$ pour tout $t \ge 0$. Montrer que S_1 a la même loi que $|B_1|$.
4. En déduire que S_t a la même loi que $|B_t|$ pour tout $t \ge 0$.
5. Est-il vrai que $(S_t)_{t\ge0}$ a la même loi que $(|B_t|)_{t\ge0}$?

<u>*Indication :*</u> L'outil à utiliser pour la première question se nomme "principe de réflexion".
<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1. On appelle trajectoire *de type I* une trajectoire de marche aléatoire de longueur n qui atteint a et qui termine (strictement) en-dessous, et trajectoire *de type II* une trajectoire qui atteint a et termine (strictement) au-dessus. Il suffit de montrer qu'il y a autant de trajectoires de type I que de type II, ce qu'on va faire en construisant une bijection entre les deux. Soit t une trajectoire de type I, et k le premier instant où elle atteint a. On note t' la trajectoire t, réfléchie à partir du temps k par rapport à la droite d'équation $y = a$ (cf. figure). Il est facile de vérifier que t' est de type II, et que la transformation décrite est involutive donc bijective, ce qui permet de conclure.
2. Pour tout $a \ge 1$, en utilisant la question précédente, on a

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(M_n \ge a) & = & \mathbb{P}(M_n \ge a, X_n \ge a) + \mathbb{P}(M_n \ge a, X_n < a) \\ & = & \mathbb{P}(X_n \ge a) + \mathbb{P}(X_n > a) \\ & = & 2\mathbb{P}(X_n \ge a) - \mathbb{P}(X_n = a) \\ & = & \mathbb{P}(|X_n| \ge a) - \mathbb{P}(X_n = a). \end{array}$$

   On en déduit $\mathbb{P}(M_n = a) = \mathbb{P}(|X_n| = a) - \mathbb{P}(X_n = a) + \mathbb{P}(X_n = a+1)$ pour $a \ge 1$, et $\mathbb{P}(M_n = 0) = \mathbb{P}(|X_n| = 0) + \mathbb{P}(X_n = 1)$.
3. Soit $u \in \mathbb{R}$ et $f(x) = e^{iux}$. Il suffit de montrer que $\mathbb{E}[f(S_t)] = \mathbb{E}[f(|B_t|)]$. Or, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \sup\limits_{s\in[0,1]} x_s \end{array}$$

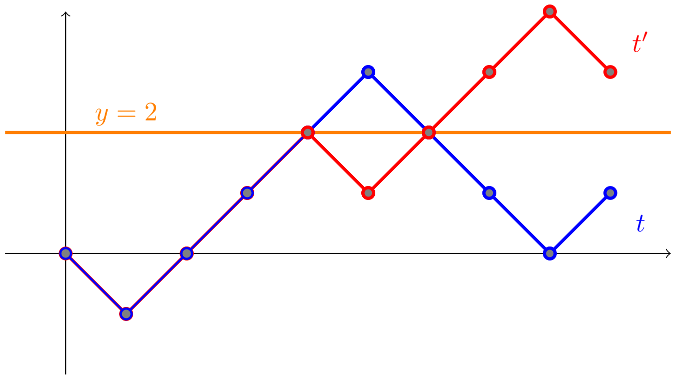

FIGURE 1 – Réflexion décrite dans la question 1 avec $a = 2$.

est continue (pour la norme uniforme), donc d'après le théorème de Donsker puis la question précédente :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f\left(S_1\right)\right] &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[f\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{a\geq 0} \mathbb{P}\left(M_n = a\right) f\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{a\geq 0} \mathbb{P}\left(|X_n| = a\right) f\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right) + \mathbb{P}\left(X_n = 1\right) f(0) + \sum_{a\geq 1} \left(\mathbb{P}\left(X_n = a+1\right) - \mathbb{P}\left(X_n = a\right)\right) f\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{E}\left[f\left(\frac{|X_n|}{\sqrt{n}}\right)\right] + \sum_{a\geq 1} \mathbb{P}\left(X_n = a\right)\left(f\left(\frac{a-1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left[f\left(|B_1|\right)\right] + \lim_{n\to+\infty} \sum_{a\geq 1} \mathbb{P}\left(X_n = a\right)\left(f\left(\frac{a-1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

On peut alors conclure car

$$
\begin{aligned}
\sum_{a\geq 1} \mathbb{P}\left(X_n = a\right)\left|f\left(\frac{a-1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)\right| &\leq \sum_{a\geq 1} \mathbb{P}\left(X_n = a\right) \frac{|u|}{\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{|u|}{\sqrt{n}} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.
\end{aligned}
$$

4. Il suffit d'utiliser l'invariance du mouvement brownien par changement d'échelle (exo 5 du TD 2) : S_t a la même loi que $\sqrt{t}S_1$, qui a la même loi que $\sqrt{t}|B_1|$ (d'après la question précédente), qui a la même loi que $|B_t|$.
5. Non. Par exemple $(S_t)_{t\geq 0}$ est p.s. croissant mais pas $(|B_t|)_{t\geq 0}$.

2 Loi du logarithme itéré pour le mouvement brownien

Exercice 2 Soit B un mouvement brownien. Le but de cet exercice est de montrer que presque sûrement :

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1,$$

avec $h(t) = \sqrt{2t \ln\ln t}$. On rappelle que $\mathbb{P}(B_1 > x) \sim \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}\, x}$ quand $x \to +\infty$.

1. Soit $\varepsilon > 0$ et S comme dans l'exercice précédent. En utilisant l'exercice précédent, estimer $\mathbb{P}\left(S_{(1+\varepsilon)^n} > (1+\varepsilon) h\left((1+\right.\right.$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire $\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{h(t)} \leq 1$ p.s.
3. Soit $r > 1$. Montrer qu'il existe une infinité de n tels que $B_{r^n} - B_{r^{n-1}} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}} h(r^n)$.
4. En déduire $\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1$ p.s.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

1. On utilise successivement l'exercice 1, le fait que B_t a la même loi que $\sqrt{t} B_1$ et la majoration $\mathbb{P}(B_1 \geq x) \leq e^{-x^2/2}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_{(1+\varepsilon)^n} > (1+\varepsilon) h\left((1+\varepsilon)^n\right)\right) &= \mathbb{P}\left(|B_{(1+\varepsilon)^n}| > (1+\varepsilon)\sqrt{2(1+\varepsilon)^n \ln\ln(1+\varepsilon)^n}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|B_1| > (1+\varepsilon)\sqrt{2\left(\ln n + \ln\ln(1+\varepsilon)\right)}\right) \\
&\leq 2e^{-(1+\varepsilon)^2(\ln n + \ln\ln(1+\varepsilon))} \\
&\leq \frac{1}{n^{(1+\varepsilon)^2}}.
\end{aligned}$$

2. D'après Borel-Cantelli, on a donc $S_{(1+\varepsilon)^n} \leq (1+\varepsilon) h\left((1+\varepsilon)^n\right)$ pour n assez grand. Soit donc $t > 1$ et n tel que $(1+\varepsilon)^{n-1} \leq t < (1+\varepsilon)^n$. Si t est assez grand, alors

$$S_t \leq S_{(1+\varepsilon)^n} \leq (1+\varepsilon)\, h\left((1+\varepsilon)^n\right) \leq (1+\varepsilon)\, h\left((1+\varepsilon) t\right) \sim_{t\to+\infty} (1+\varepsilon)^{3/2} h(t).$$

On en déduit $\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{h(t)} \leq (1+\varepsilon)^{3/2}$ p.s. Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient la borne supérieure voulue.

3. On raisonne de manière similaire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(B_{r^n} - B_{r^{n-1}} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}} h(r^n)\right) &= \mathbb{P}\left(B_{(r-1)r^{n-1}} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}} \sqrt{2r^n \ln\ln r^n}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(B_1 \geq \sqrt{2\left(\ln n + \ln\ln r\right)}\right) \\
&\sim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ln\ln r} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.
\end{aligned}$$

Comme $\sum_n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ diverge et les événements $\left\{B_{r^n} - B_{r^{n-1}} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}} h(r^n)\right\}$ sont indépendants (par indépendance des incréments de B), on peut conclure par Borel-Cantelli.

4. D'après la question 2, pour n assez grand on a $B_{r^{n-1}} \geq -2h\left(r^{n-1}\right)$. En combinant cette observation avec la question 3, il existe une infinité de n tels que

$$\begin{aligned}
B_{r^n} &\geq \sqrt{\frac{r-1}{r}} h\left(r^n\right) - 2h\left(r^{n-1}\right) \\
&\sim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{r-1}{r}} - \frac{2}{r}\right) h\left(r^n\right).
\end{aligned}$$

On a donc $\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{h(t)} \geq \sqrt{\frac{r-1}{r}} - \frac{2}{r}$ p.s., et ce pour tout $r > 1$, d'où le résultat en faisant tendre r vers $+\infty$.

3 Marches aléatoires et fonctions harmoniques

Exercice 3 Soit S une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ et $a, b \geq 0$. On note

$$T_{a,b} = \inf\{n \in \mathbb{N} | S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}.$$

1. Montrer qu'il existe $A, c > 0$ tel que $\mathbb{P}(T_{a,b} \geq n) \leq Ae^{-cn}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\mathbb{E}[T_{a,b}] < +\infty$.
2. En s'inspirant de la méthode vue en cours pour calculer la loi de $S_{T_{a,b}}$, calculer $\mathbb{E}[T_{a,b}]$.
3. En déduire que si $T_b = \inf\{n \in \mathbb{N} | S_n = b\}$, alors $\mathbb{E}[T_b] = +\infty$ pour tout $b \neq 0$.

Solution de l'exercice 3

1. L'idée est de montrer qu'avec très grande probabilité, on a à un moment $a+b$ pas consécutifs vers le haut. On note $X_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Soit $n \geq a+b$. Si $X_{n+1} = X_{n+2} = \cdots = X_{n+a+b} = +1$, alors $S_{n+a+b} - S_n = a+b$ donc $S_n \leq -a$ ou $S_{n+a+b} \geq b$, et dans les deux cas $T_{a,b} \leq n+a+b$. On a donc
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_{a,b} \geq k(a+b)) &\leq \mathbb{P}\left(\forall i \in [\![0, k-1]\!], \left(X_{i(a+b)+1}, \ldots, X_{i(a+b)+a+b}\right) \neq (1, \ldots, 1)\right) \\
&= \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}\left(\left(X_{i(a+b)+1}, \ldots, X_{i(a+b)+a+b}\right) \neq (1, \ldots, 1)\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right)^k.
\end{aligned}$$
On en déduit le résultat en prenant $e^{-c} = \left(1 - \frac{1}{2^{a+b}}\right)^{1/(a+b)}$ et A assez grand. Le fait que $\mathbb{E}[T_{a,b}] < \infty$ en découle immédiatement. On obtient même la (très mauvaise) borne
$$\mathbb{E}[T_{a,b}] \leq (a+b)4^{a+b}.$$
2. Pour tout $-a \leq x \leq b$, on note $f(x) = \mathbb{E}_x[T_{a,b}]$, l'espérance de $T_{a,b}$ pour une marche aléatoire simple issue de x. On a $f(-a) = f(b) = 0$ et, pour $-a < x < b$:
$$f(x) = 1 + \frac{f(x-1) + f(x+1)}{2}.$$
Autrement dit, la dérivée seconde discrète de f est constante, égale à -2. Une solution particulière de cette équation est $-x^2$. Il est donc naturel d'introduire $g(x) = f(x) + x^2$. La fonction g est alors harmonique, donc il existe u et v tels que $g(x) = ux + v$ pour tout x, soit $f(x) = -x^2 + ux + v$. En utilisant les conditions aux bord, on obtient
$$f(x) = (b-x)(x+a),$$
d'où $\mathbb{E}[T_{a,b}] = ab$.
3. Par symétrie, il suffit de traiter le cas $b > 0$. Pour tout $a > 0$, on a $T_b \geq T_{a,b}$ donc
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_b] &\geq \mathbb{E}[T_{a,b}] \\
&= ab \\
&\xrightarrow[a \to +\infty]{} +\infty,
\end{aligned}$$
donc $\mathbb{E}[T_b] = +\infty$.

Remarque Le résultat de la dernière question pouvait aussi s'obtenir en utilisant l'exercice 1. En effet, on a $\mathbb{P}(T_b \leq n) = \mathbb{P}(M_n \geq b)$, donc on peut calculer la loi de T_b.

Exercice 4 (Marche aléatoire biaisée)

On se donne $p > \frac{1}{2}$. Soient $(X_i)_{i \geq 0}$ i.i.d. avec $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1-p$ et $\mathbb{P}(X_i = +1) = p$. Pour tout $n \geq 0$, on écrit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soient $a, b \geq 0$. On note $T_{a,b} = \inf\{n \in \mathbb{N} | S_n = -a \text{ ou } S_n = b.\}$.

1. Déterminer la loi de $S_{T_{a,b}}$.
2. En déduire la loi de $\min\{S_n | n \geq 0\}$.
3. Reprendre l'exercice 3 pour la marche aléatoire biaisée.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

1. On sait que $S_{T_{a,b}}$ ne peut valoir que $-a$ ou b. Il suffit donc de calculer $\mathbb{P}\left(S_{T_{a,b}} = b\right)$. On pose donc $f(x) = \mathbb{P}_x\left(S_{T_{a,b}} = b\right)$. De même que pour la marche simple, on a $f(-a) = 0$ et $f(b) = 1$ et, pour tout $-a < x < b$:
$$f(x) = pf(x+1) + (1-p)f(x-1),$$
soit
$$f(x+1) - f(x) = \frac{1-p}{p}\left(f(x) - f(x-1)\right).$$
Si on pose $c = f(-a+1)$, on a donc
$$f(x+1) - f(x) = c\left(\frac{1-p}{p}\right)^{x+a}.$$
A partir de là, on peut exprimer les $f(x)$ en fonction de c et, en utilisant $f(b) = 1$, obtenir $c = \frac{2p-1}{p}\left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}\right)^{-1}$. On trouve finalement
$$\mathbb{P}\left(S_{T_{a,b}} = b\right) = f(0) = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}.$$
2. Soit $a > 0$. Si $T_{-a} < +\infty$, alors il existe $b > 0$ tel que S tape $-a$ avant b, donc tel que $S_{T_{a,b}} = -a$. L'événement $\{T_{-a} < +\infty\}$ est donc l'union croissante des événements $\{S_{T_{a,b}} = -a\}$ pour $b > 0$, d'où
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(T_{-a} < +\infty\right) &= \lim_{b\to+\infty} \mathbb{P}\left(S_{T_{a,b}} = -a\right)\\ &= \lim_{b\to+\infty} 1 - \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a+b}}\\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{a}.\end{aligned}$$
On en déduit que $-\min\{S_n | n \in \mathbb{N}\}$ est une variable géométrique de paramètre $\frac{1-p}{p}$.
3. La propriété $\mathbb{E}\left[T_{a,b}\right] < +\infty$ se prouve de la même manière que dans le cas non biaisé. En posant $f(x) = \mathbb{E}_x\left[T_{a,b}\right]$, on obtient cette fois la relation
$$f(x) = 1 + pf(x+1) + (1-p)f(x-1)$$
pour $-a < x < b$, soit
$$p\left(f(x+1) - f(x) + \frac{1}{2p-1}\right) = (1-p)\left(f(x) - f(x-1) + \frac{1}{2p-1}\right).$$
On peut donc calculer f comme dans la question 1. On obtient
$$\mathbb{E}\left[T_{a,b}\right] = f(0) = \frac{a+b}{2p-1}\frac{1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{a}}{1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{a+b}} - \frac{a}{2p-1}.$$
Par convergence monotone, on en déduit
$$\mathbb{E}\left[T_b\right] = \frac{b}{2p-1} < +\infty.$$