Processus aléatoires
ENS Paris, 2016-2017

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 5 : Espérance conditionnelle
Corrigé

Lundi 17 Octobre

Exercice 1 (Petits contre-exemples) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, et $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ deux sous-tribus de $\mathscr{F}$ telles que $\sigma(\mathscr{G}, \mathscr{H}) = \mathscr{F}$. Trouver des contre-exemples aux affirmations suivantes :

1. Si $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$, alors X et Y sont indépendantes.
2. Si $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] = 0$ et $\mathbb{E}[X|\mathscr{H}] = 0$, alors $X = 0$.
3. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ et $\mathbb{E}[Y|\mathscr{G}]$ le sont aussi.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1. X uniforme sur $\{-2, -1, 1, 2\}$ et $Y = |X|$.
2. Soient X et Y deux variables i.i.d. avec $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$ et $\mathscr{F} = \sigma(X, Y)$. Soit $Z = XY$. Il est facile de vérifier que $\mathbb{E}[Z|X] = \mathbb{E}[Z|Y] = 0$, mais $Z \neq 0$.
3. Prendre X et Y variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$ et $\mathscr{G} = \sigma(X + Y)$.

Exercice 2 Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ à valeurs respectivement dans E et F. Soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. On suppose que X est indépendante de $\mathscr{G}$ et que Y est $\mathscr{G}$-mesurable. Montrer que pour toute fonction mesurable $g : E \times F \to \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbb{E}[g(X, Y)|\mathscr{G}] = \int_E g(x, Y) P_X(\mathrm{d}x)$$

où P_X désigne la loi de X. Le terme de droite est la composée de la variable aléatoire Y par l'application $\phi : y \to \int g(x, y) P_X(dx)$ (où ϕ est mesurable grâce au théorème de Fubini).

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> La variable aléatoire $\phi(Y)$ est $\sigma(Y)$-mesurable, donc $\mathscr{G}$-mesurable. Pour montrer l'égalité p.s. $\mathbb{E}[g(X, Y)|\mathscr{G}] = \phi(Y)$, il suffit donc de vérifier que pour toute variable aléatoire Z positive $\mathscr{G}$-mesurable,

$$\mathbb{E}[g(X, Y)Z] = \mathbb{E}[\phi(Y)Z].$$

Notons $P_{(X,Y,Z)}$ la loi du triplet (X, Y, Z), qui est une mesure de probabilité sur $E \times F \times \mathbb{R}^+$. Comme X est indépendante de (Y, Z), on a

$$P_{(X,Y,Z)} = P_X \otimes P_{(Y,Z)}$$

et donc, en utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X,Y)Z] &= \int_{E\times F\times\mathbb{R}^+} g(x,y)zP_{(X,Y,Z)}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\\
&= \int_{E\times F\times\mathbb{R}^+} g(x,y)zP_X(\mathrm{d}x)P_{(Y,Z)}(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\\
&= \int_{F\times\mathbb{R}^+} z\left(\int_E g(x,y)P_X(\mathrm{d}x)\right)P_{(Y,Z)}(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\\
&= \int_{F\times\mathbb{R}^+} z\phi(y)P_{(Y,Z)}(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\\
&= \mathbb{E}[\phi(Y)Z],
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 3 (Espérance conditionnelle et positivité) Soit X une variable aléatoire positive sur $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Montrer que $\{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]>0]\}$ est le plus petit ensemble $\mathscr{G}$-mesurable (aux ensembles négligeables près) qui contient $\{X>0\}$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> La variable aléatoire $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]$ est par définition $\mathscr{G}$-mesurable, et $]0,+\infty[$ est un borélien, donc $\{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]>0\}$ est un ensemble $\mathscr{G}$-mesurable. De plus, par définition de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]=0}\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\,\mathbb{1}_{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]=0}\right]=0.$$

Or $X\mathbb{1}_{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]=0}\geq 0$ p.s., donc $X\mathbb{1}_{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]=0}=0$ p.s.. Cela signifie que

$$\{X>0\}\subset\{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]>0\}$$

à un ensemble négligeable près. Soit A un ensemble $\mathscr{G}$-mesurable contenant $\{X>0\}$. Alors on a $X=0$ p.s. sur A^c. Toujours par définition de l'espérance conditionnelle on a donc

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\,\mathbb{1}_{A^c}\right]=\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{A^c}\right]=0.$$

De même $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]\geq 0$ donc sur A^c on a $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]=0$ p.s., soit $\{\mathbb{E}[X|\mathscr{G}]>0\}\subset A$ à un ensemble négligeable près.

Exercice 4 (Espérance conditionnelle et convergence en proba) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires positives sur $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-tribus de $\mathscr{F}$. On suppose que $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n]$ converge en probabilité vers 0.

1. Montrer que X_n converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

1. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathbb{P}(X_n>\varepsilon)>\varepsilon$ pour un certain ε et pour une infinité de $n\geq 0$. On ne raisonne que sur ces n désormais. On pose $A_n=\left\{\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n]>\frac{\varepsilon^2}{10}\right\}$. Alors par hypothèse $\mathbb{P}(A_n)\to 0$ quand $n\to+\infty$. On en déduit que $\mathbb{P}(\{X_n>\varepsilon\}\setminus A_n)\geq\frac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang. Alors d'après les propriétés de l'espérance conditionnelle on a

$$\mathbb{E}\left[X_n\mathbb{1}_{A_n^c}\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n]\,\mathbb{1}_{A_n^c}\right]\leq\frac{\varepsilon^2}{10},$$

et d'un autre côté

$$\mathbb{E}\left[X_n\mathbf{1}_{A_n^c}\right]\geq\mathbb{E}\left[X_n\mathbb{1}_{\{X_n>\varepsilon\}\setminus A_i}\right]\geq\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

C'est une contradiction.

2. Il suffit de prendre $\mathcal{F}_n=\{\varnothing,\Omega\}$ et (X_n) une suite qui converge en probabilité vers 0 mais pas dans L^1. Par exemple, on peut prendre $\mathbb{P}(X_n=0)=1-\frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(X_n=n^2)=\frac{1}{n}$.

Exercice 5 Soit X une variable intégrable sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. Soit Y une v.a. $\mathscr{G}$-mesurable, on veut montrer que $\mathbb{E}[X|\mathscr{G}] = Y$. Montrer que si Π est un ensemble de parties de Ω qui contient Ω, stable par intersections finies et dont la tribu engendrée est $\mathscr{G}$, il suffit de montrer

$$\forall \pi \in \Pi \ , \ \mathbb{E}[X \mathbb{1}_\pi] = \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_\pi].$$

Solution de l'exercice 5 C'est une application du lemme de classe monotone : en effet, il est facile de vérifier que l'ensemble des $A \in \mathscr{G}$ tels que $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_A]$ est une classe monotone, donc contient la classe monotone engendrée par Π, qui est $\mathscr{G}$ d'après le lemme de classe monotone.

Exercice 6 (Indépendance conditionnelle) On dit que deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans un espace $(E, \mathscr{E})$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathscr{G}$ si pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurables,

$$\mathbb{E}[f(X)\, g(Y)|\mathscr{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathscr{G}]\, \mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathscr{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? Si $\mathscr{G} = \mathscr{F}$?
2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire Z positive $\mathscr{G}$-mesurable, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurables,

   $$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}]].$$

   et aussi à : pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurable positive,

   $$\mathbb{E}[g(Y)|\sigma(\mathscr{G}, X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}].$$

Solution de l'exercice 6

1. Si $\mathscr{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, l'egalité s'écrit

   $$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\, \mathbb{E}[g(Y)]$$

   pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives c'est à dire que X et Y sont indépendantes. Si $\mathscr{G} = \mathscr{F}$, l'égalité est triviale et on ne peut rien dire sur les variables X et Y.
2. On suppose que pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ mesurables,

   $$\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathscr{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathscr{G}]\, \mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}].$$

   Soit Z une variable aléatoire $\mathscr{G}$-mesurable positive. Alors

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathscr{G}]\, Z] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X)|\mathscr{G}]\, \mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}]\, Z] \\ &= \mathbb{E}[f(X)\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}]\, Z], \end{aligned}$$

   car $\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}]\, Z$ est $\mathscr{G}$-mesurable. Réciproquement, on suppose que pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives, et pour toute variable aléatoire $\mathscr{G}$-mesurable positive Z,

   $$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}]Z].$$

   Alors comme $Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}]$ est $\mathscr{G}$-mesurable positive, on a

   $$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}]Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X)|\mathscr{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}]Z],$$

   et par la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle, comme $\mathbb{E}[f(X)|\mathscr{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}]$ est $\mathscr{G}$-mesurable, on obtient

   $$\mathbb{E}[f(X)|\mathscr{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}] = \mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathscr{G}].$$

Pour la seconde équivalence, supposons X et Y indépendantes conditionnellement à $\mathscr{G}$. On veut montrer que pour tout $A \in \sigma(\mathscr{G}, X)$, on a

$$\mathbb{E}\left[g(Y)\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[g(Y)|\mathscr{G}\right]\mathbb{1}_A\right].$$

D'après l'exercice précédent, il suffit de le montrer pour des A de la forme $X^{-1}(B) \cap G$. avec $G \in \mathscr{G}$ et $B \in \mathscr{E}$, ce qui est un cas particulier de l'équivalence précédente avec $f(X) = \mathbb{1}_{X \in B}$ et $Z = \mathbb{1}_G$. Pour la réciproque, si $\mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G} \vee \sigma(X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathscr{G}]$ pour toute fonction g mesurable positive, alors pour toutes g mesurable positive et U variable $(\sigma(X) \vee \mathscr{G})$-mesurable :

$$\mathbb{E}\left[g(Y)U\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[g(Y)|\mathscr{G}\right]U\right],$$

et il suffit d'appliquer ce résultat aux variables U de la forme $Zf(X)$ avec f mesurable positive et Z une variable $\mathscr{G}$-mesurable.

Exercice 7 On se donne deux réels $a, b > 0$, et (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ dont la loi est caractérisée par

$$\mathbb{P}(X = n, Y \leq t) \;=\; b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a+b)y)\,\mathrm{d}y.$$

Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)|X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $h(Y)$ soit intégrable, puis $\mathbb{E}[\frac{Y}{X+1}]$. Calculer ensuite $\mathbb{P}(X = n|Y)$ et enfin $\mathbb{E}[X|Y]$.

Solution de l'exercice 7 Pour tout $n \geq 0$, on a par le théorème de convergence dominée

$$\mathbb{P}(X = n) = \lim_{t \to \infty} \mathbb{P}(X = n, Y \leq t) = b \int_0^\infty \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a+b)y)\,\mathrm{d}y = \frac{b}{a+b}\left(\frac{a}{a+b}\right)^n > 0.$$

Donc, puisque $P(X = n) > 0$,

$$\mathbb{E}[h(Y)|X = n] = \frac{\mathbb{E}[h(Y)\mathbb{1}_{X=n}]}{\mathbb{P}(X = n)}.$$

On remarque que :

$$\mathbb{E}[h(Y)\mathbb{1}_{X=n}] \;=\; b \int_0^\infty h(y)\frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a+b)y)\,\mathrm{d}y.$$

Pour justifier cette égalité assez intuitive, on peut la vérifier sur une fonction indicatrice d'un intervalle, puis l'étendre aux fonctions en escalier par linéarité de l'intégrale, puis aux fonctions mesurables positives par convergence monotone et enfin à une fonction mesurable quelconque en la décomposant selon ses parties positives et négatives. On obtient :

$$\mathbb{E}[h(Y)|X = n] = \frac{\mathbb{E}[h(Y)\mathbb{1}_{X=n}]}{\mathbb{P}(X = n)} = (a+b)^{n+1} \int_0^\infty h(y)\frac{y^n}{n!} \exp(-(a+b)y)\,\mathrm{d}y := \phi(n),$$

et par définition

$$\mathbb{E}[h(Y)|X] = \phi(X).$$

En particulier,

$$\mathbb{E}[Y|X = n] = (a+b)^{n+1} \int_0^\infty \frac{y^{n+1}}{n!} \exp(-(a+b)y)\,\mathrm{d}y = \frac{n+1}{a+b}.$$

On a ensuite

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X+1}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X+1}\Big|X\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{X+1}\mathbb{E}\left[Y|X\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\mathbb{E}\left[Y|X=n\right]\mathbb{1}_{\{X=n\}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\mathbb{E}[Y|X=n]\mathbb{P}(X=n) \\
&= \frac{1}{a+b}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=n) \;=\; \frac{1}{a+b}.
\end{aligned}
$$

Puis, pour toute fonction h mesurable telle que $h(Y)$ soit intégrable, on a

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(Y)] &= \sum_{n=0}^{\infty} b\int_0^{\infty} h(y)\frac{(ay)^n}{n!}\exp(-(a+b)y)\,\mathrm{d}y \\
&= b\int_0^{\infty} h(y)\exp(-by)\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

donc la densité de la loi de Y est la fonction

$$
q(y) = be^{-by}\mathbb{1}_{\{y>0\}}.
$$

Ainsi, pour toute fonction h bornée,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X=n}h(Y)\right] &= b\int_0^{\infty} h(y)\frac{(ay)^n}{n!}\exp(-(a+b)y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\infty} h(y)q(y)\frac{(ay)^n}{n!}\exp(-ay)\,\mathrm{d}y \\
&= \mathbb{E}\left[h(Y)\frac{(aY)^n}{n!}\exp(-aY)\right].
\end{aligned}
$$

Cela implique que

$$
\mathbb{P}\left(X=n|Y\right) = \frac{(aY)^n}{n!}\exp(-aY).
$$

On en déduit finalement

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|Y] &= \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}\left(X=n|Y\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(aY)^n}{(n-1)!}\exp(-aY) \\
&= aY.
\end{aligned}
$$