Processus aléatoires
ENS Paris, 2016-2017

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 6 : Espérance conditionnelle, martingales

Lundi 24 Octobre

1 Espérance conditionnelle dans L^2

Exercice 1
On se donne deux variables aléatoires réelles positives X et Y, et on suppose que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] = X$.

1. Montrer que si X et Y sont dans L^2, alors $X = Y$ p.s.
2. Montrer que pour toute variable aléatoire positive Z et tout $a \geq 0$,
$$\mathbb{E}[Z|Z \wedge a] \wedge a = Z \wedge a.$$
3. Montrer que le couple $(X \wedge a, Y \wedge a)$ vérifie les mêmes hypothèses que le couple (X, Y) et en déduire que $X = Y$ p.s.

Exercice 2 (Convergence L^2 des martingales rétrogrades)
Soit $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$, avec $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$. Soit X une variable aléatoire de carré intégrable.

1. Montrer que les variables $\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}]$ sont orthogonales dans L^2, et que la série
$$\sum_{n\geq 0} (\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}])$$
converge dans L^2.
2. Montrer que si $\mathscr{F}_\infty = \bigcap_{n\geq 0} \mathscr{F}_n$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_\infty] \quad \text{dans } L^2.$$

2 Temps d'arrêt

Exercice 3 (Vrai ou faux)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ et $\mathscr{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$. Lesquelles des variables suivantes sont des temps d'arrêt pour $(\mathscr{F}_n)$?

1. $T_1 = \min\{n \geq 0 | S_n = 2016\}$,
2. $T_2 = \min\{n \geq 2016 | S_n = S_{n-2016}\}$,
3. $T_3 = \min\{n \geq 0 | S_n = S_{n+2016}\}$,
4. $T_4 = \min\{n \geq T_1 | S_n = 0\}$,
5. $T_5 = \max\{n \in [\![0, 2016]\!] | S_n = 0\}$,
6. $T_6 = \min\{n \in [\![0, 2016]\!] | \forall m \in [\![0, 2016]\!], S_m \leq S_n\}$.

Exercice 4 (Ce qui peut arriver, arrivera)
Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a p.s.

$$\mathbb{P}(T \leq n + n_0 | \mathscr{F}_n) > \varepsilon.$$

Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

3 Martingales et marches aléatoires

Exercice 5 (À la pêche aux martingales)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$, et $\mathscr{F}_n = \sigma(S_1, \cdots S_n)$.

1. Montrer que (S_n) est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)$.
2. Montrer que $(S_n^2 - n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)$.
3. Montrer que $(S_n^3 - 3nS_n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)$.
4. Soit $P(X, Y)$ un polynôme à deux variables. Montrer que $(P(S_n, n))$ est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)$ si pour tous $s, n \in \mathbb{Z}$, on a
$$P(s + 1, n + 1) - 2P(s, n) + P(s - 1, n + 1) = 0.$$
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, trouver $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(\alpha S_n - \beta n)$ est une martingale pour $(\mathscr{F}_n)$.

Exercice 6 (Temps de sortie II, le retour)
Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$. Soient $a, b \geq 0$ et $T = \min\{n \in \mathbb{N}, S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}$. On rappelle que $T < +\infty$ p.s.

1. En utilisant la première martingale de l'exercice précédent et le théorème d'arrêt, redémontrer
$$\mathbb{P}\left(S_T = b\right) = \frac{a}{a + b}.$$

2. En utilisant la seconde martingale de l'exercice précédent et le théorème d'arrêt, redémontrer
$$\mathbb{E}[T] = ab.$$

<u>*Indication :*</u> Le temps d'arrêt T n'est pas borné. Il faut donc passer par des temps d'arrêt de la forme $T \wedge t$.

Exercice 7 (Martingales et marche biaisée)
Soit $p \neq \frac{1}{2}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$, i.e. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec X_i i.i.d. et $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$.

1. Trouver α tel que α^{S_n} soit une martingale.
2. Soient a, b et T comme dans l'exercice précédent. Calculer $\mathbb{P}(S_T = b)$.

Exercice 8 (Un contre-exemple)
Trouver un processus $(M_n)_{n\geq 0}$ avec $E[|M_n|] < \infty$ pour tout n et tel que $E[M_{n+1} \mid M_n] = M_n$ pour tout n sans que M soit une martingale.

4 Martingales, chimpanzés et vaisseaux spatiaux

Exercice 9 (Singe savant)
Un chimpanzé est assis devant une machine à écrire et commence à taper une lettre par seconde. Il tape à chaque fois une lettre choisie uniformément parmi les 26 lettres de l'alphabet, indépendamment des lettres précédentes. On note T le premier temps auquel les 11 dernières lettres écrites par le singe forment le mot "ABRACADABRA". Pour calculer $\mathbb{E}[T]$, on va définir une martingale. On suppose que le singe a juste à côté de lui un sac rempli de beaucoup (beaucoup, beaucoup) de bananes. On joue alors au jeu suivant : juste *avant* chaque seconde $n = 1, 2, 3, \ldots$ un joueur arrive derrière le singe et parie 1 banane avec lui sur l'événement

$$\{\text{la } n\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "A"}\}.$$

Si il perd, il part (et le singe met 1 banane dans son sac). Si il gagne, il reçoit 26 euros du singe qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } n+1\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "B"}\}.$$

Si il perd, il part. Si il gagne, il reçoit 26^2 bananes qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } n+2\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "R"}\}.$$

Et ainsi de suite jusqu'à ce que "ABRACADABRA" sorte de la machine. Notez qu'il peut y avoir jusqu'à trois joueurs en train de miser derrière le singe...

1. Montrer que le nombre de bananes dans le sac du chimpanzé au temps n est une martingale pour $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$, où $\mathscr{F}_n$ est la tribu engendrée par les n premières lettres tapées par l'animal.

2. En déduire
$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$
3. Refaire le même exercice en remplaçant “ABRACADABRA” par “ABCDEFGHIJK”. Commenter.

Exercice 10 (Vaisseau spatial perdu)
Le *Millenium Falcon* se trouve à une distance D_0 du Soleil mais ses commandes ne répondent plus : toutes les heures, Han Solo ne peut qu'entrer une distance r_n inférieure à la distance au Soleil dans l'ordinateur de bord, qui effectue alors un saut dans l'hyperespace de longueur r_n et de direction choisie uniformément dans la sphère S^2. On note D_n la distance du vaisseau au Soleil après n sauts et $\mathscr{F}_n$ la tribu engendrée par les n premiers sauts. Han Solo veut revenir dans le système solaire, c'est-à-dire à distance au plus d du soleil.

1. En utilisant des souvenirs de physique de prépa (théorème de Gauss), montrer que $\left(\frac{1}{D_n}\right)$ est une martingale.
2. En déduire que la probabilité que Han Solo revienne un jour dans le système solaire est inférieure ou égale à $\frac{d}{D_0}$.
3. A la place du pilote, feriez-vous plutôt de grands ou de petits sauts ?