Processus aléatoires
ENS Paris, 2016-2017

Thomas Budzinski
Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 6 : Espérance conditionnelle, martingales
Corrigé

Lundi 24 Octobre

1 Espérance conditionnelle dans L^2

Exercice 1
On se donne deux variables aléatoires réelles positives X et Y, et on suppose que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] = X$.

1. Montrer que si X et Y sont dans L^2, alors $X = Y$ p.s.
2. Montrer que pour toute variable aléatoire positive Z et tout $a \geq 0$,
$$\mathbb{E}[Z|Z \wedge a] \wedge a = Z \wedge a.$$
3. Montrer que le couple $(X \wedge a, Y \wedge a)$ vérifie les mêmes hypothèses que le couple (X, Y) et en déduire que $X = Y$ p.s.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

1. On calcule
$$\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] + \mathbb{E}\left[Y^2\right] - 2E\left[XY\right].$$
Or $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\left[X\mathbb{E}[Y|X]\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right]$ et de même $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\left[Y^2\right]$, donc $\mathbb{E}\left[(X-Y)^2\right] = 0$ et $X = Y$ p.s.
2. Soit $a > 0$, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z|Z \wedge a] &= \mathbb{E}\left[Z\,\mathbb{1}_{Z<a}|Z \wedge a\right] + \mathbb{E}\left[Z\,\mathbb{1}_{Z\geq a}|Z \wedge a\right]\\ &= \mathbb{E}\left[(Z \wedge a)\,\mathbb{1}_{Z\wedge a<a}|Z \wedge a\right] + \mathbb{E}\left[Z\,\mathbb{1}_{Z\wedge a=a}|Z \wedge a\right]\\ &= (Z \wedge a)\,\mathbb{1}_{Z\wedge a<a} + \mathbb{E}\left[Z\,\mathbb{1}_{Z\wedge a\geq a}|Z \wedge a\right]\mathbb{1}_{Z\wedge a=a}.\end{aligned}$$
Il est donc clair que $\mathbb{E}[Z|Z \wedge a] = Z \wedge a$ si $Z \wedge a < a$ et que $\mathbb{E}[Z|Z \wedge a] \geq a$ si $Z \wedge a \geq a$ si $Z \wedge a = a$, donc $\mathbb{E}[Z|Z \wedge a] \wedge a = Z \wedge a$.
3. On applique l'inégalité de Jensen à la fonction concave $x \to x \wedge a$:
$$\mathbb{E}\left[X \wedge a|Y \wedge a\right] \leq \mathbb{E}\left[X|Y \wedge a\right] \wedge a.$$
Or $\mathbb{E}\left[X|Y \wedge a\right] \wedge a = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|Y\right]|Y \wedge a\right] \wedge a = \mathbb{E}\left[Y|Y \wedge a\right] \wedge a = Y \wedge a$. Par conséquent, on a
$$\mathbb{E}\left[X \wedge a|Y \wedge a\right] \leq Y \wedge a.$$
En particulier, en prenant l'espérance des deux côtés, $\mathbb{E}\left[X \wedge a\right] \leq \mathbb{E}\left[Y \wedge a\right]$ et, par symétrie, on a aussi l'inégalité opposée. On a donc $\mathbb{E}\left[X \wedge a\right] = \mathbb{E}\left[Y \wedge a\right]$, donc
$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \wedge a|Y \wedge a\right] - Y \wedge a\right] = 0,$$

d'où on conclut $\mathbb{E}[X \wedge a|Y \wedge a] = Y \wedge a$, car une variable aléatoire négative d'espérance nulle est nulle. Par symétrie, on a aussi $\mathbb{E}[Y \wedge a|X \wedge a] = X \wedge a$. Comme $X \wedge a$ et $Y \wedge a$ sont dans L^2, la première question donne $X \wedge a = Y \wedge a$ p.s. pour tout $a > 0$, d'où $X = Y$ p.s.

Exercice 2 (Convergence L^2 des martingales rétrogrades)
Soit $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$, avec $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$. Soit X une variable aléatoire de carré intégrable.

1. Montrer que les variables $\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}]$ sont orthogonales dans L^2, et que la série
$$\sum_{n\geq 0} (\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}])$$
converge dans L^2.
2. Montrer que si $\mathscr{F}_\infty = \bigcap_{n\geq 0} \mathscr{F}_n$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_\infty] \quad \text{dans } L^2.$$

Solution de l'exercice 2

1. On calcule, pour $m < n$:
$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n])\,(\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{m+1}] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_m])\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}]\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{m+1}] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}]\mathbb{E}[Y|\mathscr{F}_m] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n]\mathbb{E}[Y|\mathscr{F}_{m+1}] + \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n]\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_m]\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{m+1}]^2 - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_m]^2 - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{m+1}]^2 + \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_m]^2\right] \\
&\quad = 0,
\end{aligned}$$
ce qui montre que la famille $(\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}])_{n\geq 0}$ est orthogonale. De plus, pour $m = n$, on a
$$\mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}] - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n])^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n]^2 - \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_{n+1}]^2\right],$$
donc par téléscopage $\sum \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}(X|\mathscr{F}_{n+1}) - \mathbb{E}(X|\mathscr{F}_n))^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_0]^2\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] < +\infty$, d'où la convergence de la série dans L^2, par critère de Cauchy dans L^2.
2. On déduit de la question précédente que $\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n]$ converge, on note Y la variable aléatoire limite. On n'a plus qu'à montrer que $Y = \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_\infty]$. Soit Z une variable $\mathscr{F}_\infty$-mesurable bornée. En particulier, pour tout n, elle est $\mathscr{F}_n$-mesurable donc
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n]\,Z] = \mathbb{E}[XZ].$$
Quand n tend vers $+\infty$, le membre de gauche tend vers $\mathbb{E}[YZ]$ (en utilisant la convergence de $\mathbb{E}[X|\mathscr{F}_n]$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz), d'où $\mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[XZ]$, d'où $Y = \mathbb{E}[X|\mathscr{F}_\infty]$.

Remarque Il est aussi possible de résoudre entièrement l'exercice en utilisant seulement le fait que L^2 est un espace de Hilbert. On vérifie facilement que le sous-espace des variables $\mathscr{F}_\infty$-mesurables est l'intersection décroissantes des sous-espaces des variables $\mathscr{F}_n$-mesurables. Il suffit donc de montrer que dans un espace de Hilbert, les projections orthogonales sur une suite décroissante de sous-espaces fermés convergent vers la projection orthogonale sur l'intersection de ces sous-espaces.

2 Temps d'arrêt

Exercice 3 (Vrai ou faux)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ et $\mathscr{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$. Lesquelles des variables suivantes sont des temps d'arrêt pour $(\mathscr{F}_n)$?

1. $T_1 = \min\{n \geq 0 | S_n = 2016\}$,

2. $T_2 = \min\{n \geq 2016 | S_n = S_{n-2016}\}$,
3. $T_3 = \min\{n \geq 0 | S_n = S_{n+2016}\}$,
4. $T_4 = \min\{n \geq T_1 | S_n = 0\}$,
5. $T_5 = \max\{n \in [\![0, 2016]\!] | S_n = 0\}$,
6. $T_6 = \min\{n \in [\![0, 2016]\!] | \forall m \in [\![0, 2016]\!], S_m \leq S_n\}$.

Solution de l'exercice 3 Les temps T_1, T_2 et T_4 sont des temps d'arrêts, car à chaque fois l'événement $\{T \leq n\}$ ne dépend que de $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$. En revanche, T_3, T_5 et T_6 n'en sont pas puisque les événements $\{T_3 = 0\}$, $\{T_5 = 0\}$ et $\{T_6 = 0\}$ ne sont pas $\mathscr{F}_0$-mesurables.

Exercice 4 (Ce qui peut arriver, arrivera)
Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq 0$, on a p.s.

$$\mathbb{P}(T \leq n + n_0 | \mathscr{F}_n) > \varepsilon.$$

Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

Solution de l'exercice 4 On montre par récurrence sur k que pour tout $k \geq 0$:

$$\mathbb{P}(T \geq kn_0) \leq (1 - \varepsilon)^k.$$

C'est vrai pour $k = 0$ et on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \geq (k+1)n_0) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T \geq kn_0} \mathbb{1}_{T \geq (k+1)n_0}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T \geq kn_0} \mathbb{P}\left(T \geq kn_0 + n_0 \mid \mathcal{F}_{kn_0}\right)\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T \geq kn_0}(1 - \varepsilon)\right] \\ &\leq (1 - \varepsilon)^{k+1}, \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. On en déduit aisément que $\mathbb{E}[T] < +\infty$ et en particulier que T est presque sûrement fini.

Remarque Il s'agit d'une généralisation de la question 1 de l'exercice 3 du TD 4.

3 Martingales et marches aléatoires

Exercice 5 (À la pêche aux martingales)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$, et $\mathscr{F}_n = \sigma(S_1, \cdots S_n)$.

1. Montrer que (S_n) est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)$.
2. Montrer que $(S_n^2 - n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)$.
3. Montrer que $(S_n^3 - 3nS_n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)$.
4. Soit $P(X, Y)$ un polynôme à deux variables. Montrer que $(P(S_n, n))$ est une martingale pour la filtration $(\mathscr{F}_n)$ si pour tous $s, n \in \mathbb{Z}$, on a

$$P(s + 1, n + 1) - 2P(s, n) + P(s - 1, n + 1) = 0.$$

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, trouver $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(\alpha S_n - \beta n)$ est une martingale pour $(\mathscr{F}_n)$.

Solution de l'exercice 5 On note $X_n = S_n - S_{n-1}$ les pas de la marche aléatoire.

1. On a

$$\mathbb{E}[S_{n+1} | \mathscr{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + X_{n+1} | \mathscr{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathscr{F}_n] = S_n$$

par indépendance des accroissements.

2. On a
$$\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2|\mathscr{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[S_n^2|\mathscr{F}_n\right] + 2S_n\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathscr{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2|\mathscr{F}_n\right] = S_n^2 + 1.$$
On a donc $\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2 - (n+1)|\mathscr{F}_n\right] = S_n^2 - n$, donc on a bien une martingale.
3. Le calcul est similaire :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(S_{n+1})^3 - 3(n+1)S_{n+1}|\mathscr{F}_n\right] &= S_n^3 + 3S_n^2\mathbb{E}\left[X_{n+1}|\mathscr{F}_n\right] + 3S_n\mathbb{E}\left[X_{n+1}^2|\mathscr{F}_n\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^3|\mathscr{F}_n\right]\\ &- 3(n+1)\mathbb{E}\left[S_{n+1}|\mathscr{F}_n\right]\\ &= S_n^3 + 3S_n - 3(n+1)S_n\\ &= S_n^3 - 3nS_n.\end{aligned}$$
4. On calcule
$$\mathbb{E}\left[P(S_{n+1}, n+1)|\mathscr{F}_n\right] = \frac{1}{2}P(S_n+1, n+1) + \frac{1}{2}P(S_n-1, n+1).$$
Il suffit donc de $P(X+1, n+1) - 2P(X, n) + P(X-1, n+1) = 0$.
5. On calcule
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{\alpha S_{n+1}}|\mathscr{F}_n\right] &= \mathbb{E}\left[e^{\alpha S_n}e^{\alpha X_{n+1}}|\mathscr{F}_n\right]\\ &= e^{\alpha S_n}\mathbb{E}\left[e^{\alpha X_{n+1}}|\mathscr{F}_n\right]\\ &= \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}e^{\alpha S_n}.\end{aligned}$$
Il faut donc choisir $\beta = \ln\left(\mathrm{ch}(\alpha)\right)$.

Exercice 6 (Temps de sortie II, le retour)
Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$. Soient $a, b \geq 0$ et $T = \min\{n \in \mathbb{N}, S_n = -a \text{ ou } S_n = b\}$. On rappelle que $T < +\infty$ p.s.

1. En utilisant la première martingale de l'exercice précédent et le théorème d'arrêt, redémontrer
$$\mathbb{P}\left(S_T = b\right) = \frac{a}{a+b}.$$
2. En utilisant la seconde martingale de l'exercice précédent et le théorème d'arrêt, redémontrer
$$\mathbb{E}[T] = ab.$$

Indication : Le temps d'arrêt T n'est pas borné. Il faut donc passer par des temps d'arrêt de la forme $T \wedge t$.
Solution de l'exercice 6

1. Soit $t > 0$. Alors $T \wedge t$ est un temps d'arrêt borné, auquel on peut appliquer le théorème d'arrêt :
$$\mathbb{E}[S_{T\wedge t}] = \mathbb{E}[S_0] = 0.$$
De plus, $T < +\infty$ p.s. donc $S_{T\wedge t}$ converge p.s. vers S_T, et on a $-a \leq S_{T\wedge t} \leq b$ pour tout t. Par convergence dominée, on a donc
$$\mathbb{E}[S_T] = \lim_{t\to+\infty}\mathbb{E}[S_{T\wedge t}] = 0.$$
D'autre part, en notant $p = \mathbb{P}\left(S_T = b\right) = \frac{a}{a+b}$, on a
$$\mathbb{E}[S_T] = (1-p)(-a) + pb,$$
d'où le résultat.

2. Soit $t > 0$. En appliquant le théorème d'arrêt à $S_n^2 - n$ et au temps d'arrêt $T \wedge t$, on obtient

$$\mathbb{E}[T \wedge t] = \mathbb{E}[S_{T\wedge t}^2].$$

Comme dans la première question, en utilisant $T < +\infty$ p.s., le membre de gauche converge vers $\mathbb{E}[T]$ par convergence monotone et le membre de droite vers $\mathbb{E}[S_T^2]$ par convergence dominée. On a donc, en utilisant la première question :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[S_T^2] \\ &= \frac{b}{a+b}(-a)^2 + \frac{a}{a+b}b^2 \\ &= ab.\end{aligned}$$

Remarque Si vous n'êtes pas fatigués par les calculs : en utilisant la troisième martingale de l'exercice précédent (ainsi que les deux questions précédentes), on peut calculer

$$\mathbb{E}[T|S_T = b] = \frac{1}{3}\left(2ab + b^2\right).$$

Exercice 7 (Martingales et marche biaisée)
Soit $p \neq \frac{1}{2}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire biaisée sur $\mathbb{Z}$, i.e. $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec X_i i.i.d. et $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$.

1. Trouver α tel que α^{S_n} soit une martingale.
2. Soient a, b et T comme dans l'exercice précédent. Calculer $\mathbb{P}(S_T = b)$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

1. On a $\mathbb{E}[\alpha^{S_{n+1}}|\mathscr{F}_n] = \alpha^{S_n}\mathbb{E}[\alpha^{X_{n+1}}] = \alpha^{S_n}\left(p\alpha + (1-p)\alpha^{-1}\right)$. Le processus (α^{S_n}) est donc une martingale ssi

$$p\alpha + (1-p)\alpha^{-1},$$

ce qui est une équation de degré 2 en α. En la résolvant, on obtient $\alpha = 1$ (ce qui n'est pas très intéressant) ou $\alpha = \frac{1-p}{p}$.

2. En reprenant exactement le raisonnement de l'exercice précédent (question 1), on trouve

$$\mathbb{P}(S_T = b) = \frac{1 - \alpha^a}{1 - \alpha^{a+b}}$$

avec $\alpha = \frac{1-p}{p}$.

Exercice 8 (Un contre-exemple)
Trouver un processus $(M_n)_{n\geq 0}$ avec $E[|M_n|] < \infty$ pour tout n et tel que $E[M_{n+1} \mid M_n] = M_n$ pour tout n sans que M soit une martingale.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> On considère une marche aléatoire simple démarrant de 0 avec des pas indépendants ± 1 mais au premier retour en 0 la marche est obligée de faire le même pas que son tout premier.

4 Martingales, chimpanzés et vaisseaux spatiaux

Exercice 9 (Singe savant)
Un chimpanzé est assis devant une machine à écrire et commence à taper une lettre par seconde. Il tape à chaque fois une lettre choisie uniformément parmi les 26 lettres de l'alphabet, indépendamment des lettres précédentes. On note T le premier temps auquel les 11 dernières lettres écrites par le singe forment le mot "ABRACADABRA". Pour calculer $\mathbb{E}[T]$, on va définir une martingale. On suppose que le singe a juste à côté de lui un sac rempli de beaucoup (beaucoup, beaucoup) de bananes. On joue alors au jeu suivant : juste *avant* chaque seconde $n = 1, 2, 3, \ldots$ un joueur arrive derrière le singe et parie 1 banane avec lui sur l'événement

$$\{\text{la } n\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "A"}\}.$$

Si il perd, il part (et le singe met 1 banane dans son sac). Si il gagne, il reçoit 26 euros du singe qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } n+1\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "B"}\}.$$

Si il perd, il part. Si il gagne, il reçoit 26^2 bananes qu'il remise immédiatement sur l'événement

$$\{\text{la } n+2\text{-ième lettre tapée par l'animal est un "R"}\}.$$

Et ainsi de suite jusqu'à ce que "ABRACADABRA" sorte de la machine. Notez qu'il peut y avoir jusqu'à trois joueurs en train de miser derrière le singe...

1. Montrer que le nombre de bananes dans le sac du chimpanzé au temps n est une martingale pour $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$, où $\mathscr{F}_n$ est la tribu engendrée par les n premières lettres tapées par l'animal.
2. En déduire
$$\mathbb{E}[T] = 26^{11} + 26^4 + 26.$$
3. Refaire le même exercice en remplaçant "ABRACADABRA" par "ABCDEFGHIJK". Commenter.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>

1. Cela est dû au fait que les paris sont à chaque étape "équilibrés" : conditionnellement à $\mathscr{F}_n$, l'espérance de gain de chacun des parieurs est nulle donc l'espérance de gain du singe aussi.
2. Supposons d'abord qu'on puisse appliquer le théorème d'arrêt à T : alors la variation du nombre de bananes dans le sac du singe au temps T est d'espérance nulle, donc l'espérance de ses gains est égale à l'espérance de ses pertes. Les pertes du singe sont faciles à calculer : au moment où ABRACADABRA sort, il y a 3 parieurs derrière le singe : un qui est arrivé juste avant le premier "A" et qui repart avec 26^11 bananes, un qui est arrivé juste avant le second "A" et qui repart avec 26^4 bananes, et un qui est arrivé juste avant le dernier "A" et qui repart avec 26 bananes. Les pertes du singe sont donc de $26^{11} + 26^4 + 26$ bananes. D'autre part, chacun des T parieurs qui est passé a donné une banane au singe (y compris les 3 parieurs qui gagnent à la fin), donc les gains du singe sont de T bananes.

   Pour écrire cela proprement, on peut appliquer le théorème d'arrêt à $T \wedge t$. Les gains du singe au temps $T \wedge t$ valent alors $T \wedge t$ et on a $\mathbb{E}[T \wedge t] \to \mathbb{E}[T]$ par convergence monotone. Les pertes du singe sont majorées par $26^{11} + 26^{10} + \cdots + 1$ et tendent p.s. vers $26^{11} + 26^4 + 26$ quand t tend vers $+\infty$, donc leur espérance tend vers $26^{11} + 26^4 + 26$ bananes par convergence dominée.
3. On obtient $\mathbb{E}[T] = 26^{11}$, soit une espérance strictement inférieure à celle du temps d'apparition de ABRACADABRA. Si cela peut paraître contre-intuitif, la raison est que les sous-mots qui se répètent ("A" et "ABRA") introduisent des corrélations positives entre l'apparition de "ABRACADABRA" à deux rangs différents, ce qui augmente les chances que l'événement se produise très tard.

Exercice 10 (Vaisseau spatial perdu)
Le *Millenium Falcon* se trouve à une distance D_0 du Soleil mais ses commandes ne répondent plus : toutes les heures, Han Solo ne peut qu'entrer une distance r_n inférieure à la distance au Soleil dans l'ordinateur de bord, qui effectue alors un saut dans l'hyperespace de longueur r_n et de direction choisie uniformément dans la sphère S^2. On note D_n la distance du vaisseau au Soleil après n sauts et $\mathscr{F}_n$ la tribu engendrée par les n premiers sauts. Han Solo veut revenir dans le système solaire, c'est-à-dire à distance au plus d du soleil.

1. En utilisant des souvenirs de physique de prépa (théorème de Gauss), montrer que $\left(\frac{1}{D_n}\right)$ est une martingale.
2. En déduire que la probabilité que Han Solo revienne un jour dans le système solaire est inférieure ou égale à $\frac{d}{D_0}$.
3. A la place du pilote, feriez-vous plutôt de grands ou de petits sauts ?

Solution de l'exercice 10 Toutes les justifications des interversions seront laissées en exercice.

1. Soit X_n la variable aléatoire à valeurs dans S^2 qui indique la direction du n-ième saut. Alors on veut montrer que $\mathbb{E}\left[\|S_n + r_{n+1}X_{n+1}\|^{-1} | \mathscr{F}_n\right] = \|S_n\|^{-1}$. Pour tout x dans $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, on pose $f(x) = \|x\|^{-1}$. On veut donc montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}^3$ et $r < \|x\|$:
$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} f(x+ru)^{-1} \mathrm{d}u = f(x).$$
Il suffit pour cela de vérifier que la dérivée par rapport à r du membre de gauche est nulle (par convergence dominée, il tend bien vers 0 quand $r \to 0$). Notons que le membre de gauche a une discontinuité en $r = \|x\|$, c'est pourquoi on impose $r < \|x\|$. En intervertissant dérivée et intégrale puis en appliquant le théorème de Gauss, on obtient
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \int_{S^2} f(x+ru)^{-1} \mathrm{d}u &= \int_{S^2} r \, \nabla f(x+ru) \cdot u \, \mathrm{d}u \\ &= r^2 \int_{B_1} \mathrm{div}(\nabla f(x+y)) \, \mathrm{d}y \\ &= r^2 \int_{B_1} \Delta f, \end{aligned}$$
où B_1 est la boule de rayon 1 autour de l'origine dans $\mathbb{R}^3$. Un simple calcul (ou, à nouveau, des souvenirs de physique de prépa) montre que le Laplacien Δf est nul sur $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, donc $\frac{1}{D_n}$ est bien une martingale.
2. Soit $T = \inf\{n | D_n \leq d\}$. Le temps T est un temps d'arrêt (éventuellement infini), donc on peut appliquer le théorème d'arrêt à $T \wedge t$ et à la martingale $\frac{1}{D_n}$:
$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{D_{T\wedge t}}\right] = \frac{1}{D_0}.,$$
On en déduit
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T \leq t) &= \mathbb{P}(D_{T\wedge t} \leq d) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{D_{T\wedge t}} \geq \frac{1}{d}\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{d}\right)^{-1} \mathbb{E}\left[\frac{1}{D_{T\wedge t}}\right] \\ &= \frac{d}{D_0}. \end{aligned}$$
Ceci est valable pour tout $t > 0$ donc $\mathbb{P}(T < +\infty) \leq \frac{d}{D_0}$.
3. On veut que l'inégalité de la question précédente soit la plus serrée possible. Le seul endroit où on n'a pas égalité ci-dessus est dans l'inégalité de Markov (avant-dernière ligne du dernier calcul). Pour que l'inégalité de Markov soit serrée, il faut que $\frac{1}{D_{T\wedge t}}$ ne puisse pas être "beaucoup" plus grande que $\frac{1}{d}$. Il faut donc faire de petits sauts à l'approche du système solaire. On peut vérifier (exercice !) que pour tout $\varepsilon > 0$, si le saut à chaque étape n est inférieur ou égal à $D_n - d + \varepsilon$, alors on a $\mathbb{P}(T < +\infty) \geq \frac{d-\varepsilon}{D_0}$.

Remarque L'hypothèse "les sauts sont plus petits que la distance au Soleil" peut paraître arbitraire. En supprimant cette hypothèse, le processus $\left(\frac{1}{D_n}\right)_{n\geq 0}$ n'est plus forcément une martingale mais une *surmartingale*, c'est-à-dire que $E\left[\frac{1}{D_{n+1}} | \mathscr{F}_n\right] \leq \frac{1}{D_n}$. La raison est que, au sens des distributions, le

Laplacien de $x \to \|x\|^{-1}$ sur $\mathbb{R}^3$ est (à une constante) multiplicative près) $-\delta_0$, donc est négatif. Le théorème d'arrêt peut s'adapter aux surmartingales et donne

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{D_{T\wedge t}}\right] \leq \frac{1}{D_0}.$$

L'inégalité étant dans le bon sens, le résultat de la question 2 reste vrai. Cela montre que faire des sauts trop grands ne peut qu'aggraver la situation de notre vaisseau.