Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2016-2017 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 9 : Chaînes de Markov

Lundi 28 Novembre

Exercice 1 (Vrai ou faux)
Soit (S_n) une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Lesquels des processus suivants sont des chaînes de Markov sur $\mathbb{Z}$? Pour ceux qui le sont, donner la matrice de transition.

1. $A = (S_n)_{n\geq 0}$,
2. $B = (S_n + n)_{n\geq 0}$,
3. $C = (S_n + n^2)_{n\geq 0}$,
4. $D = (S_n + 10^n)_{n\geq 0}$,
5. $E = (S_n + (-1)^n)_{n\geq 0}$,
6. $F = (|S_n|)_{n\geq 0}$,
7. $G = (S_n^2 - n)_{n\geq 0}$,
8. $H = (S_{2n})_{n\geq 0}$.

Exercice 2 (Chaîne de Markov et indépendance)
Soient S un ensemble dénombrable et $(G, \mathcal{G})$ un ensemble mesurable. Soient aussi $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $(G, \mathcal{G})$ et $\phi : S \times G \to S$ une application mesurable. On définit une suite de variables $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans S par $X_0 = x \in S$ et $X_{n+1} = \phi(X_n, Z_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et déterminer sa matrice de transition.

Exercice 3 Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ issue de 0. Pour tout $i \geq 0$, on pose $T_i = \min\{n \geq 0 | S_n = i\}$ (on rappelle que tous les T_i sont finis p.s. par récurrence de S).

1. Montrer que les variables $T_{i+1} - T_i$ sont i.i.d.
2. On suppose maintenant que S est une marche biaisée négativement, i.e. les $S_{n+1} - S_n$ sont i.i.d. et
$$\mathbb{P}(S_{n+1} - S_n = -1) = 1 - \mathbb{P}(S_{n+1} - S_n = +1) > \frac{1}{2}.$$
Montrer sans calcul que $M = \max\{S_n | n \geq 0\}$ est une variable géométrique.

Exercice 4 Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Pour $x \in \mathbb{Z}$ avec $x \neq 0$, montrer que l'espérance du nombre de visites de x avant le premier retour en 0 vaut 1.

Exercice 5 (h-transformée d'une chaîne de Markov)
Soit S un ensemble dénombrable et $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur S de matrice de transition Q. Soit $h : S \to \mathbb{R}_+$. Soit P la matrice définie sur $S_+ = \{x \in S | h(x) > 0\}$ par la formule

$$P(i,j) = \frac{h(j)}{h(i)} Q(i,j).$$

1. Donner une hypothèse sur h qui garantit que P est la matrice de transition d'une chaîne de Markov sur S^+. Que signifie cette hypothèse si X est la marche aléatoire simple sur un graphe ? *On dit alors que P est la h-transformée de Q.*
2. Soit Y une chaîne de Markov de matrice de transition P. Déterminer la dérivée de Radon-Nikodým de la loi de $(Y_i)_{0\leq i\leq n}$ par rapport à celle de $(X_i)_{0\leq i\leq n}$.
3. On considère la marche aléatoire simple S sur $\mathbb{Z}$. On note $T_i = \inf\{n \geq 0 | S_n = i\}$. Pour $N > 0$ et $k \in [\![0, N]\!]$, on définit

$$\mathbb{P}_k^{(N)} = \mathbb{P}_k(\,\cdot\,| T_N < T_0).$$

   (a) On rappelle que $\mathbb{P}_k(T_N < T_0) = \frac{k}{N}$. Montrer que sous $P_k^{(N)}$, $(S_{n\wedge T_N})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.

   (b) Trouver une fonction $h : [\![0, N]\!] \to \mathbb{R}_+$ telle que la matrice de transition de la question précédente soit la h-transformée de la matrice de transition de la marche aléatoire simple.

   (c) Proposer une définition de la "marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ conditionnée à rester positive".

Exercice 6 (La fourmi et la montre)
Une fourmi se promène sur une montre de la manière suivante : elle démarre sur le chiffre 0 et, toutes les minutes, elle se déplace avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la gauche et avec proba $\frac{1}{2}$ d'un chiffre vers la droite. On note C le dernier chiffre de la montre visité par la fourmi. Montrer que C est une variable uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 11\}$.