

# SUR LES FONCTIONS THETA DU SECOND ORDRE

Arnaud Beauville et Olivier Debarre

Mathématique , Université Paris - Sud

F - 91 405 Orsay Cedex (France)

## Introduction

Nous discutons dans cet exposé deux conjectures liées au problème de Schottky, dues à Van Geemen et Van der Geer [7] et précisées par Donagi [6]. Ces auteurs proposent de caractériser les jacobiniennes (parmi toutes les variétés abéliennes) en termes de l'espace des fonctions thêta d'ordre 2. Nous énonçons ces conjectures au §1; dans le §2 (inspiré de [6]), nous discutons leur relation avec d'autres approches du problème de Schottky. Au §3, nous traitons, dans le style de [4], quelques exemples où les calculs peuvent être faits explicitement. Enfin au §4, nous prouvons la conjecture 2 et une version affaiblie de la conjecture 1 pour une variété abélienne principalement polarisée *générique*.

## 1. Enoncé des conjectures

Soit  $A$  une variété abélienne complexe, et  $\vartheta$  une polarisation principale sur  $A$ . Par définition,  $\vartheta$  est la classe dans  $H^2(A, \mathbb{Z})$  d'un diviseur ample  $\Theta$ , vérifiant  $\dim \Gamma(A, \mathcal{O}_A(\Theta)) = 1$ . Le diviseur  $\Theta$  est uniquement déterminé à translation près. On peut de plus lui imposer d'être symétrique (c'est-à-dire stable par l'involution  $a \mapsto -a$ ), ce que nous ferons systématiquement dans la suite; il est dès lors bien déterminé à translation près par un point d'ordre 2 de  $A$ . En vertu du théorème du carré, le faisceau  $\mathcal{O}_A(2\Theta)$  est alors indépendant du choix de  $\Theta$ : il est canoniquement associé à la variété abélienne principalement polarisée  $(A, \vartheta)$ . Il en est de même de l'espace  $\Gamma = \Gamma(A, \mathcal{O}_A(2\Theta))$  de ses sections globales, ainsi que du système linéaire  $|2\Theta|$ . Nous identifierons  $\Gamma$  à l'espace des fonctions thêta du second ordre sur le revêtement universel de  $A$ .

Les éléments de  $\Gamma$  sont symétriques; cela entraîne que la multiplicité en

0 d'un tel élément est paire. Nous noterons  $\Gamma_0$  l'hyperplan de  $\Gamma$  formé des sections s'annulant avec multiplicité  $\geq 2$ , et  $\Gamma_{00}$  le sous-espace des sections qui s'annulent avec multiplicité  $\geq 4$ . Nous désignerons par  $|\Theta|_0$  et  $|\Theta|_{00}$  les sous-espaces projectifs correspondants de  $|\Theta|$ . Enfin, soit  $V(\Gamma_{00})$  le lieu de base du système linéaire  $|2\Theta|_{00}$ , c'est-à-dire l'ensemble des points de  $A$  où toutes les sections de  $\Gamma_{00}$  s'annulent. Pour éviter des complications sans intérêt, nous supposerons toujours que la variété abélienne principalement polarisée  $(A, \Theta)$  est *indécomposable*, c'est-à-dire qu'elle ne peut s'écrire comme produit de deux variétés abéliennes principalement polarisées non nulles.

**Conjecture 1.** - *Si  $(A, \Theta)$  n'est pas une jacobienne, l'ensemble  $V(\Gamma_{00})$  est réduit à 0.*

La conjecture 2 est une version infinitésimale de la conjecture 1. Soit  $T = T_0(A)$  l'espace tangent à l'origine de  $A$ ; en associant à chaque élément de  $\Gamma_{00}$  le terme de degré 4 de son développement de Taylor, on obtient un homomorphisme  $\alpha$  de  $\Gamma_{00}$  dans l'espace  $H^0(\mathbb{P}(T), \mathcal{O}(4))$  des polynômes homogènes de degré 4 sur  $T$ , bien défini à un scalaire près. En particulier,  $\alpha(\Gamma_{00})$  est un système linéaire de quartiques dans  $\mathbb{P}(T)$ ; on désigne par  $V_{\text{inf}}(\Gamma_{00})$  l'ensemble des points de base de ce système linéaire.

**Conjecture 2.** - *Si  $(A, \Theta)$  n'est pas une jacobienne, l'ensemble  $V_{\text{inf}}(\Gamma_{00})$  est vide.*

Dans le cas des jacobienes, la situation est très différente :

**Théorème 1.** - *Soit  $(JC, \Theta)$  la jacobienne d'une courbe  $C$ . On a alors :*

- a)  $V(\Gamma_{00})$  est l'image  $C-C$  de l'application  $\delta : C \times C \rightarrow JC$  définie par  $\delta(x, y) = \Theta_C(x - y)$ ,
- b)  $V_{\text{inf}}(\Gamma_{00})$  est l'image de l'application canonique  $\kappa : C \rightarrow \mathbb{P}(T)$  (en identifiant  $T$  à  $H^0(C, K_C)^*$ ),

sauf dans les deux cas suivants :

- a')  $C$  est une courbe de genre 4, non hyperelliptique, avec deux  $g_3^1$  distincts; on a alors  $V(\Gamma_{00}) = (C - C) \cup \{\pm t\}$ , où  $t$  est la différence dans  $JC$  des deux  $g_3^1$  sur  $C$ .
- b')  $C$  est une courbe de genre 4 avec un seul  $g_3^1$ ; on a alors  $V_{\text{inf}}(\Gamma_{00}) = \kappa(C) \cup \{s\}$ , où  $s$  est le sommet du cône quadratique contenant  $\kappa(C)$ .

Les énoncés a) et a') ont été démontrés par Welters [8]. Les énoncés b) et b') résultent essentiellement du théorème de Green (sous une forme légèrement raffinée due au premier auteur), selon lequel  $\kappa(C)$  est l'intersection dans  $\mathbb{P}(T)$  des cônes osculateurs aux points doubles du diviseur  $\Theta$ .

## 2. Relation avec d'autres approches

### a) Trisécantes

Le système linéaire  $\Gamma$  est sans point base, donc définit un morphisme  $\psi$  de  $A$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}(\Gamma^*)$  (que nous noterons simplement  $\mathbb{P}^N$ , avec  $N = 2^g - 1$ ). L'image de ce morphisme est par définition la *variété de Kummer*  $K$  de  $(A, \Theta)$ ; sous l'hypothèse  $(A, \Theta)$  indécomposable, elle s'identifie au quotient de  $A$  par l'involution  $a \mapsto -a$ . Elle a  $2^{2g}$  points singuliers, image par  $\psi$  des points d'ordre 2 de  $A$ .

Notons en particulier  $s$  le point  $\psi(0)$ . Le système  $|2\Theta|_0$  est l'image réciproque par  $\psi$  du système des hyperplans de  $\mathbb{P}^N$  passant par  $s$ ; de même, les éléments de  $|2\Theta|_{00}$  sont les images réciproques par  $\psi$  des hyperplans de  $\mathbb{P}^N$  qui contiennent l'espace tangent  $T_s(K)$  à  $K$  en  $s$  (c'est-à-dire le sous-espace projectif de  $\mathbb{P}^N$  engendré par le cône tangent à  $K$  en  $s$ ). Le lieu de base de  $|2\Theta|_{00}$  est donc l'image réciproque par  $\psi$  de  $T_s(K) \cap K$ . Par suite la conjecture 1 signifie que *l'intersection  $T_s(K) \cap K$  est réduite à  $\{s\}$* , ou encore qu'il n'existe pas de droite passant par  $s$  et un autre point de  $K$  qui soit contenue dans  $T_s(K)$ . Appelons une telle droite une *fausse trisécante* (elle rencontre  $K$  avec multiplicité  $\geq 3$ ). La conjecture 1 dit que  $K$  n'admet pas de fausse trisécante si  $(A, \Theta)$  n'est pas une jacobienne. Cette formulation est bien sûr à rapprocher de l'énoncé analogue pour les trisécantes usuelles (conjecture de la trisécante), qui est l'analogue discret de la conjecture de Novikov (cf. par exemple [3]). Mise à part la similitude de leurs énoncés, la relation entre ces deux conjectures n'est pas claire.

Remarquons au passage que la dimension de  $T_s(K)$  est celle de l'espace tangent (de Zariski) de  $\mathbb{C}^g/[\pm 1]$  à l'origine, soit  $\frac{1}{2}g(g+1)$ ; la dimension de  $\Gamma_{00}$  est donc  $2^g - \frac{1}{2}g(g+1) - 1$ .

b) "Big Schottky"

La forme classique du problème de Schottky (caractérisation des jacobiniennes par les équations de Schottky-Jung) a été reformulée géométriquement par Mumford; Donagi en a donné une généralisation audacieuse, la "big Schottky conjecture" (conj. 2.11 de [6]). *Cette conjecture implique la conjecture 1* (loc. cit.); Donagi le démontre en interprétant  $V(\Gamma_{oo})$  en termes du cône tangent à la variété de Schottky-Jung en un point du bord de l'espace des modules  $\mathcal{A}_g$ . Plus précisément, la conjecture de Donagi en dimension  $g$  entraîne la conjecture 1 en dimension  $g-1$ . Donagi annonce dans [6] les grandes lignes d'une démonstration de sa conjecture en dimension 5; ce résultat impliquerait la conjecture 1 pour  $g=4$ .

c) Equation K-P

Passons à la conjecture 2. Soient  $D$  un vecteur non nul de  $T$ , et  $\bar{D}$  son image dans  $\mathbb{P}(T)$ . Soit  $\varphi$  un élément de  $\Gamma_{oo}$ , considéré comme une fonction thêta du second ordre sur  $T$ ; par la formule de Taylor, la valeur de  $\alpha(\varphi)$  en  $D$  est à une constante près  $D^4\varphi(0)$ , où  $D$  est vu comme un champ de vecteurs constant sur  $T$ . Dire que  $\bar{D}$  est un point base du système  $\alpha(\Gamma_{oo})$  signifie donc que la forme linéaire  $\varphi \mapsto D^4\varphi(0)$  sur  $\Gamma$  s'annule sur  $\Gamma_{oo}$ ; si  $(D_1, \dots, D_g)$  est une base de  $T$ , cela revient à dire qu'il existe des constantes  $a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq j \leq g$ ) et  $b$  telles qu'on ait

$$(1) \quad D^4\varphi(0) = \sum a_{ij} D_i D_j \varphi(0) + b \varphi(0) \quad \text{pour tout } \varphi \in \Gamma.$$

Ainsi, la conjecture 2 signifie que si  $(A, \theta)$  n'est pas une jacobienne, il n'existe aucun opérateur différentiel  $P$  de la forme  $P = [D^4 + \text{termes de degré plus bas}]$  satisfaisant à  $P\varphi(0) = 0$  pour tout  $\varphi \in \Gamma$ . Il est maintenant classique qu'un énoncé de ce type se traduit en termes d'équation aux dérivées partielles, de la manière suivante. Il existe une base  $(\varphi_\alpha)$  de  $\Gamma$  satisfaisant à la formule d'addition de Riemann

$$\theta(z+u)\theta(z-u) = \sum \varphi_\alpha(z)\varphi_\alpha(u)$$

L'équation  $P\varphi(0) = 0$  pour tout  $\varphi \in \Gamma$  équivaut donc à l'équation aux dérivées partielles  $P_u [\theta(z+u)\theta(z-u)]_{u=0} = 0$ . L'équation (1) devient ainsi

$$(2) \quad \theta D^4\theta - 4 D\theta D^3\theta + 3 (D^2\theta)^2 = \sum a_{ij} (\theta D_i D_j \theta - D_i \theta D_j \theta) + \frac{b}{2} \theta^2.$$

En divisant par  $\theta^2$  et différentiant deux fois, cela signifie que la fonction

méromorphe périodique  $u = D^2 \log \theta$  vérifie l'équation non linéaire

$$(3) \quad D [D^3 u + 12u Du] = \sum a_{ij} D_i D_j u$$

Supposons que  $(A, \theta)$  soit la jacobienne d'une courbe algébrique  $C$ . Le th.1 (§1) nous assure que la fonction  $\theta$  satisfait à une équation du type (1) (ou (2), ou (3)), et ce pour chaque point  $\bar{D}$  de la courbe canonique. On sait qu'on obtient ainsi l'équation de Kadomtsev-Petviashvili (K-P), de la forme

$$D [D^3 u + 12u Du] = DD_1 u + D_2^2 u$$

La conjecture de Novikov, démontrée par Shiota, affirme que cette équation caractérise les jacobiniennes. La conjecture 2 est donc une généralisation de la conjecture de Novikov, peut-être plus naturelle géométriquement.

### 3. Exemples

Nous allons étudier les ensembles  $V(\Gamma_{oo})$  et  $V_{inf}(\Gamma_{oo})$  dans quelques cas simples. Cette étude est basée sur la remarque suivante. Pour tout  $a \in A$ , la fonction  $\theta(z+a) \theta(z-a)$  est une fonction thêta du second ordre. Si  $a \in \Theta$ , elle appartient à  $\Gamma_o$ ; si en outre  $a \in \text{Sing } \Theta$ , elle appartient à  $\Gamma_{oo}$ . Soit de plus  $D$  un champ de vecteurs constant sur  $T$ ; toujours pour  $a \in \text{Sing } \Theta$ , la fonction thêta du second ordre

$$D_a [\theta(z+a) \theta(z-a)] = \theta(z-a) D\theta(z+a) - \theta(z+a) D\theta(z-a)$$

s'annule en 0 avec multiplicité  $\geq 3$ , donc appartient à  $\Gamma_{oo}$ . Ce moyen est essentiellement le seul que nous possédions pour fabriquer explicitement des diviseurs de  $|2\Theta|_{oo}$ ; nous allons voir qu'il permet dans certains cas de tester les conjectures 1 et 2. Il ne s'applique bien sûr qu'aux variétés abéliennes principalement polarisées dont le diviseur  $\Theta$  possède suffisamment de singularités.

Rappelons d'autre part (§2,a) que la dimension de  $\Gamma_{oo}$  est

$$(4) \quad \dim \Gamma_{oo} = 2^g - \frac{1}{2}g(g+1) - 1.$$

#### a) $g=3$

Dans ce cas la formule (4) montre que  $|2\Theta|_{oo}$  est formé d'un seul diviseur. Si  $C$  n'est pas hyperelliptique, il est facile de voir que le diviseur (réduit)  $C-C$  appartient à  $|2\Theta|$ , et a multiplicité 4 à l'origine : c'est donc le diviseur cherché.

Si  $C$  est hyperelliptique, le diviseur  $\Theta$  a un unique point singulier, qui est d'ordre 2 et que l'on peut donc prendre comme origine de  $A$ ; le diviseur  $2\Theta$  appartient alors à  $|2\Theta|_{oo}$ . On en déduit aisément le th.1 dans ce cas.

#### b) Jacobiennes de genre 4

Soit  $C$  une courbe de genre 4, que nous supposerons non hyperelliptique (le cas hyperelliptique est facile, et laissé en exercice). Le modèle canonique de  $C$  est intersection d'une quadrique  $Q$  et d'une cubique de  $\mathbb{P}^3$ . Supposons d'abord  $Q$  lisse. Alors  $C$  a deux  $g_3^1$  distincts, qui définissent deux points singuliers  $\pm a$  de  $\Theta$ . Soit  $(D_1, \dots, D_4)$  une base de  $T$ ; la méthode ci-dessus fournit les éléments suivants de  $\Gamma_{oo}$  :

$$\varphi_0(z) = \theta(z+a)\theta(z-a); \quad \varphi_i(z) = \theta(z-a)D_i\theta(z+a) - \theta(z+a)D_i\theta(z-a) \quad (i=1, \dots, 4).$$

Ces éléments sont linéairement indépendants : cela résulte du fait bien connu que les fonctions  $D_1\theta, \dots, D_4\theta$  forment une base de  $\Gamma(\Theta; \mathcal{O}_\Theta(\Theta))$ . Comme  $\Gamma_{oo}$  est de dimension 5 (formule (4)),  $\varphi_0, \dots, \varphi_4$  forment une base de  $\Gamma_{oo}$ .

Soit  $z \in V(\Gamma_{oo})$ . On a alors  $\theta(z+a)=0$  ou  $\theta(z-a)=0$ . Si par exemple on a  $\theta(z-a)=0$  mais  $\theta(z+a) \neq 0$ , on trouve  $D_i\theta(z-a)=0$  pour tout  $i$ , c'est-à-dire  $z \in \text{Sing } \Theta_a = \{0, 2a\}$ ; si de même on a  $\theta(z+a)=0$  mais  $\theta(z-a) \neq 0$ , on trouve  $z=0$  ou  $z=-2a$ . On conclut que  $V(\Gamma_{oo})$  est réunion de  $\Theta_a \cap \Theta_{-a}$  et des points  $2a, -2a$ . La surface  $\Theta_a \cap \Theta_{-a}$  contient  $C-C$ , et ces deux surfaces ont même classe de cohomologie  $\mathfrak{d}^2$ ; elles sont donc égales. D'autre part, il existe un diviseur  $\kappa$  sur  $C$  tel qu'on ait  $2\kappa \equiv K_C$  et que  $\Theta$  soit l'ensemble des classes de diviseurs de la forme  $E - \kappa$ , avec  $E$  effectif de degré 3; si l'on désigne par  $|D|, |D'|$  les deux  $g_3^1$  sur  $C$ , on a  $a \equiv D - \kappa$ , d'où  $2a \equiv D - D'$ . On a ainsi prouvé l'assertion a') du th.1.

Considérons maintenant  $V_{inf}(\Gamma_{oo})$ . Au voisinage de l'origine, la fonction  $\theta(z+a)$  admet un développement de Taylor

$$\theta(z+a) = q(z) + f(z) + \text{termes de degré } \geq 4,$$

où  $q$  et  $f$  sont des polynômes homogènes sur  $T$ , de degré 2 et 3 respectivement. La quadrique  $q=0$  dans  $\mathbb{P}(T)$  est le cône tangent à  $\Theta$  en  $a$ , qui s'identifie à l'unique quadrique  $Q$  contenant la courbe canonique. De même le cône osculateur  $q=f=0$  dans  $\mathbb{P}(T)$  s'identifie à la courbe canonique.

Comme  $\theta$  est paire, le développement de Taylor de  $\theta(z-a)$  en  $z=0$  s'écrit

$$\theta(z-a) = q(z) - f(z) + \text{termes de degré } \geq 4.$$

Les fonctions  $\varphi_0, \dots, \varphi_4$  ont donc respectivement comme terme initial à l'origine les polynômes de degré 4

$$q^2 \quad ; \quad q D_i f - f D_i q .$$

Ces polynômes sont linéairement indépendants, sans quoi  $q$  diviserait  $f$  (cela donne une autre démonstration du fait que  $\varphi_0, \dots, \varphi_4$  sont linéairement indépendantes dans  $\Gamma_{oo}$ ). Il est clair que l'ensemble de leurs zéros communs est la courbe  $q = f = 0$ . Cela prouve le th.1,b) dans ce cas.

Considérons maintenant le cas où la quadrique  $Q$  est singulière. Le diviseur  $\Theta$  a alors un point double unique, que l'on peut prendre comme origine. Avec les notations ci-dessus, il existe un champ de vecteurs constant non nul  $D$  sur  $T$  tel que  $Dq = 0$ . Posons  $\varphi_0 = \theta^2$  et, pour  $1 \leq i \leq 4$ ,

$$\varphi_i = \frac{1}{2} DD_i [\theta(z+u) \theta(z-u)]_{u=0} = \theta DD_i \theta - D\theta D_i \theta .$$

On vérifie comme ci-dessus que ces fonctions forment une *base* de  $\Gamma_{oo}$ . On en déduit que  $V(\Gamma_{oo})$  est la surface définie par les équations  $\theta = D\theta = 0$ , et l'on voit comme précédemment que cette surface coïncide avec  $C-C$ . Le développement à l'origine de  $\theta$  s'écrit cette fois

$$\theta(z) = q(z) + g(z) + \text{termes de degré } \geq 6,$$

où  $q$  et  $g$  sont des polynômes homogènes de degré 2 et 4 respectivement. Posons  $f = Dg$ ; on vérifie facilement que la surface  $f = 0$  dans  $\mathbb{P}(T)$  est une cubique irréductible contenant la courbe. Les termes initiaux des fonctions  $\varphi_0, \dots, \varphi_4$  sont les polynômes  $q^2$  et  $q D_i f - f D_i q$  ( $1 \leq i \leq 4$ ). L'ensemble de leurs zéros communs est formé de la courbe canonique et du sommet  $s$  du cône  $Q$  (d'où le th.1 b')). Ceci est l'unique cas où la fonction  $\theta$  d'une jacobienne vérifie une équation du type (3) distincte de l'équation  $K-P$ .

*Remarque.* - Soit  $(A, \theta)$  une variété abélienne principalement polarisée (indécomposable) de dimension 4, qui ne soit pas une jacobienne, et soit  $a$  un point singulier de  $\Theta$ . On sait alors [1] que  $a$  est un point d'ordre 2 de  $A$ , tel que la thêta-constante correspondante s'annule. Si  $a$  n'est pas un point double ordinaire de  $\Theta$ , on peut appliquer le raisonnement précédent pour obtenir que  $V(\Gamma_{oo})$  est une surface. La conjecture 1 pour  $g=4$  entraîne donc que les singularités de  $\Theta$  sont des points doubles ordinaires.

c) La jacobienne intermédiaire d'une hypersurface cubique dans  $\mathbb{P}^4$

Soit  $X$  une hypersurface cubique lisse dans  $\mathbb{P}^4$ . La jacobienne intermédiaire  $(A, \Theta)$  de  $X$  est une variété abélienne principalement polarisée de dimension 5, dont le diviseur  $\Theta$  admet comme seule singularité un *point triple*, que l'on peut prendre comme origine [2]. Soit  $(D_1, \dots, D_5)$  une base de  $T$ ; les fonctions  $\theta^2$  et  $\theta D_i D_j \theta - D_i \theta D_j \theta$  ( $1 \leq i < j \leq 5$ ) appartiennent à  $\Gamma_{oo}$ . On en déduit aussitôt  $V(\Gamma_{oo}) \subset \text{Sing } \Theta$ , c'est-à-dire  $V(\Gamma_{oo}) = \{0\}$ .

Notons  $f$  le terme initial du développement de  $f$  à l'origine; l'hypersurface  $f=0$  dans  $\mathbb{P}(T)$  s'identifie à  $X$  (*loc. cit.*). Les termes initiaux des éléments de  $\Gamma_{oo}$  ci-dessus sont alors  $f^2$  et les polynômes quartiques  $f_{ij} = f D_i D_j f - D_i f D_j f$ . Soit  $(X_1, \dots, X_5)$  la base de  $T^*$  duale de  $(D_1, \dots, D_5)$ ; on a  $\sum X_i X_j f_{ij} = -3 f^2$ . Il en résulte que  $V_{\text{inf}}(\Gamma_{oo})$  est contenu dans le lieu singulier de  $X$ , donc est vide. On a donc prouvé les conjectures 1 et 2 dans cet exemple.

On montre facilement que les fonctions  $\theta^2$  et  $\theta D_i D_j \theta - D_i \theta D_j \theta$  ( $1 \leq i < j \leq 5$ ) forment une base de  $\Gamma_{oo}$ ; les polynômes  $f_{ij}$  forment une base de  $\alpha(\Gamma_{oo})$ , tandis que  $\theta^2$  est (à un scalaire près) l'unique élément de  $\Gamma$  s'annulant avec multiplicité  $\geq 6$  à l'origine.

On peut traiter de la même manière l'exemple de la jacobienne d'une courbe hyperelliptique  $C$  de genre 5. Le  $g_4^2$  de  $C$  fournit un point triple de  $\Theta$  à l'origine; le cône tangent est l'hypersurface des bisécantes à  $\kappa(C)$ , qui est une quartique rationnelle normale dans  $\mathbb{P}^4$ . On en déduit facilement le th.1 dans ce cas.

d) Variété de Prym des courbes planes

En dimension plus grande il n'est plus possible d'explicitier une base de  $\Gamma_{oo}$  comme nous l'avons fait dans les exemples ci-dessus. On peut dans quelques cas démontrer les conjectures 1 ou 2 à l'aide des remarques suivantes. Soit  $x$  un point de  $V(\Gamma_{oo})$ , et  $a$  un point de  $\text{Sing } \Theta$ . Comme la fonction  $\theta(z+a) \theta(z-a)$  appartient à  $\Gamma_{oo}$ , on a  $a \in \Theta_x \cup \Theta_{-x}$ . Soit maintenant  $Z$  une sous-variété irréductible de  $\text{Sing } \Theta$ . On a alors  $Z \subset \Theta_x$  ou  $Z \subset \Theta_{-x}$ ; si de plus  $Z$  est *symétrique*, chacune de ces inclusions est vérifiée. On a donc  $V(\Gamma_{oo}) \subset \{x \in A \mid Z \subset \Theta_x\}$ . D'autre part  $V_{\text{inf}}(\Gamma_{oo})$  est contenu dans l'intersection (dans  $\mathbb{P}(T)$ ) des cônes tangents à  $\Theta$  en ses points doubles.

Nous utilisons dans [4] la première remarque pour prouver la conjecture 1 pour les variétés de Prym associées à des courbes planes, grâce à la description explicite de  $\text{Sing } \Theta$  donnée dans ce cas par Mumford.

#### S4. Variétés abéliennes principalement polarisées génériques

Nous arrivons maintenant au résultat principal de cet exposé:

**Théorème 2.** - *Pour tout entier  $g \geq 4$ , il existe une variété abélienne principalement polarisée de dimension  $g$  pour laquelle  $V(\Gamma_{00})$  est réduit à  $\{0\}$  et  $V_{\text{inf}}(\Gamma_{00})$  est vide.*

Par semi-continuité, on en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire.** - *Soit  $(A, \theta)$  une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension  $\geq 4$ . Alors  $V(\Gamma_{00})$  est fini et  $V_{\text{inf}}(\Gamma_{00})$  est vide.*

Nous commencerons par quelques préliminaires sur les variétés abéliennes. Fixons d'abord quelques notations. Soient  $A$  une variété abélienne,  $L$  un fibré en droites sur  $A$ ,  $s$  un élément de  $H^0(A, L)$ ,  $a$  un point de  $A$ . Nous poserons  $L_a = (T_a)_* L$  et  $s_a = (T_a)_* s \in H^0(A, L_a)$ , où  $T_a$  désigne la translation  $z \mapsto z + a$  dans  $A$ . Nous noterons comme d'habitude  $H(L)$  le sous-groupe de  $A$  formé des éléments  $a$  tels que  $L$  soit isomorphe à  $L_a$ ; il est fini lorsque  $L$  est ample. Soient  $Z$  une sous-variété de  $A$ , définie par un idéal  $\mathcal{J}_Z$  de  $\mathcal{O}_A$ . Tout champ de vecteurs  $D$  sur  $A$  définit des applications  $\mathcal{O}_A$ -linéaires  $D : \mathcal{J}_Z \rightarrow \mathcal{O}_Z$  et  $D \otimes 1_L : \mathcal{J}_Z L \rightarrow L|_Z$ . Si toutes les sections de  $L$  s'annulent sur  $Z$  on en déduit un homomorphisme  $D_L : H^0(A, L) \rightarrow H^0(Z, L|_Z)$ .

**Lemme 1.** - *Soient  $X$  une variété abélienne de dimension  $\geq 2$  et  $M$  un fibré en droites ample sur  $X$ ; on suppose qu'on a  $h^0(M) = 2$  et que le pinceau  $|M|$  n'a pas de composante fixe. Notons  $B$  l'intersection des éléments de  $|M|$ .*

a) *Soit  $x$  un élément de  $X$  qui n'est pas dans  $H(M)$ . Alors l'homomorphisme de restriction  $H^0(X, M_x) \rightarrow H^0(B, M_x)$  est injectif.*

b) *L'homomorphisme  $(D, s) \mapsto D_L s$  de  $H^0(X, T_x) \otimes H^0(X, M)$  dans  $H^0(B, M)$  est injectif.*

L'assertion a) est une conséquence facile de la suite exacte

$$0 \rightarrow M_x \otimes M^{-2} \rightarrow (M_x \otimes M^{-1}) \oplus (M_x \otimes M^{-1}) \rightarrow M_x \rightarrow M_x|_B \rightarrow 0,$$

et de l'annulation des espaces de cohomologie  $H^0(X, M_x \otimes M^{-1})$  (pour  $x \notin H(M)$ ) et  $H^1(X, M_x \otimes M^{-2})$ . L'assertion b) est démontrée par exemple dans [5, lemme 12.3]. ■

Considérons maintenant deux variétés abéliennes  $X_1$  et  $X_2$  de dimension  $\geq 2$ , munies de fibrés en droites amples  $M_1$  et  $M_2$ , satisfaisant à  $h^0(M_1) = h^0(M_2) = 2$ . Soient  $\alpha_1$  et  $\beta_1$  (resp.  $\alpha_2$  et  $\beta_2$ ) des générateurs de  $H(M_1)$  (resp.  $H(M_2)$ ). Il existe alors une variété abélienne principalement polarisée  $(A, \Theta)$  et une isogénie  $\pi : X_1 \times X_2 \rightarrow A$  dont le noyau est engendré par  $(\alpha_1, \alpha_2)$  et  $(\beta_1, \beta_2)$ . On peut trouver pour  $i = 1, 2$  une base  $(s_i, t_i)$  de  $H^0(X_i, M_i)$  de façon que le diviseur  $\pi^*\Theta$  sur  $X_1 \times X_2$  ait pour équation  $s_1 s_2 + t_1 t_2 = 0$ . On supposera que l'intersection  $B_i$  des diviseurs du pinceau  $|M_i|$  est *réduite* et de codimension 2. La sous-variété  $B = \pi(B_1 \times B_2)$  est contenue dans  $\text{Sing } \Theta$ .

Lemme 2. - a) On a

$$\{ a \in A \mid B \subset \Theta_a \} = \pi(X_1) \cup \pi(X_2).$$

b) L'intersection dans  $T_0(A)$  des cônes tangents à  $\Theta$  en les points de  $B$  est la réunion des espaces tangents à  $X_1$  et  $X_2$  en 0.

Prouvons a). L'inclusion  $B \subset \Theta_{\pi(x)}$  pour  $x \in X_i$  est immédiate. Inversement, soit  $a = \pi(a_1, a_2)$  un point de  $A$  satisfaisant à  $B \subset \Theta_a$ . Pour tout élément  $b_1$  de  $B_1$ , la restriction à  $B_2$  de l'élément  $s_{1,a_1}(b_1) s_{2,a_2} + t_{1,a_1}(b_1) t_{2,a_2}$  de  $H^0(X_2, M_{2,a_2})$  est alors nulle. Si  $a_2 \in H(M_2)$ , on a  $a \in \pi(X_1)$ ; dans le cas contraire, on déduit du lemme 1 qu'on a  $s_{1,a_1}(b_1) = t_{1,a_1}(b_1) = 0$ , et ce pour tout  $b_1 \in B_1$ . Comme  $B_1$  est réduit, une nouvelle application du lemme 1 entraîne alors  $a_1 \in H(M_1)$ , d'où  $a \in \pi(X_2)$ .

Prouvons b). Pour  $i = 1, 2$ , soit  $D_i$  un vecteur tangent à  $X_i$  en 0, que nous considérerons aussi comme un champ de vecteurs sur  $X_i$ . Pour que le vecteur  $(D_1, D_2)$  soit dans l'intersection des cônes tangents à  $\pi^*\Theta$  aux points de  $B_1 \times B_2$ , il faut et il suffit qu'on ait, pour tout  $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$ ,

$$D_1 s_1(b_1) D_2 s_2(b_2) + D_1 t_1(b_1) D_2 t_2(b_2) = 0,$$

ce qui signifie que pour tout  $b_1 \in B_1$  la section  $D_1 s_1(b_1) s_2 + D_1 t_1(b_1) t_2$  de  $H^0(X_2, M_2)$  est annulée par  $D_2$ . Compte tenu du lemme 1, cela entraîne  $D_2 = 0$  ou  $D_1 s_1(b_1) = D_1 t_1(b_1) = 0$  pour tout  $b_1 \in B_1$ . Comme  $B_1$  est réduit, la seconde condition implique  $D_1 = 0$  (lemme 1), d'où le lemme. ■

Nous allons maintenant démontrer le théorème en considérant un cas particulier de la construction précédente. Pour  $1 \leq i \leq g$ , soit  $E_i$  une courbe elliptique; notons  $o_i$  son origine et  $M_i$  le fibré en droites  $\mathcal{O}(2o_i)$ . Choisissons deux

