

## Sur le théorème de Torelli pour les solides doubles quartiques

OLIVIER DEBARRE

Received 12 December 1988; final version accepted 19 June 1989

A la suite de Clemens, on appellera *solides doubles quartiques*, ou plus simplement *solides doubles*, les revêtements doubles  $X \rightarrow \mathbb{P}^3$  ramifiés le long d'une *quartique*  $F$  avec des points doubles ordinaires comme seules singularités. La jacobienne intermédiaire de  $X$  est par convention celle d'une désingularisation minimale  $\tilde{X}$ , c'est-à-dire:

$$JX = H^2(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}}^1) / H^3(\tilde{X}, \mathbb{Z}).$$

C'est une variété abélienne principalement polarisée de dimension  $(10 - s)$ , où  $s$  est le nombre de points singuliers de  $F$ .

Le travail fondamental de Clemens ([C]) est à l'origine de nombreux articles consacrés à la géométrie de ces jacobiniennes intermédiaires. Il faut citer les noms de Welters ([W1]), Griffiths ([C-G]), Tikhomirov, qui décrit dans [T] une paramétrisation du diviseur thêta, et Voisin, qui montre dans [V] l'irrationalité des solides doubles. Signalons que dans un travail en préparation, Clemens utilise la paramétrisation de Tikhomirov pour interpréter les résultats de cet article et ceux de [V] dans un cadre unifié.

On s'intéresse ici aux deux questions suivantes, considérées par Voisin ([V]) dans le cas lisse:

- (i) description des singularités d'un diviseur thêta  $\Theta$  de  $JX$
- (ii) problème de Torelli.

On part du fait que, lorsque  $F$  est singulière, le solide double  $X$  admet une ou plusieurs structures de fibré en coniques ([C]). La théorie générale ([B1], [C-G]) nous dit alors que  $JX$  est une variété de Prym et c'est par ce biais-là qu'on attaque la question (i). Notre résultat principal est que *le lieu singulier de  $\Theta$  est de codimension 5 dans  $JX$*  (pour  $s = 0, 1$  ou  $5$ , il faut supposer  $X$  générique). Pour  $s = 2, 3$  ou  $4$ , on obtient une description complète de  $\text{Sing } \Theta$ . Pour  $s = 5$ , on retrouve un résultat de Smith et Varley ([S-V]): le diviseur thêta a (génériquement) deux points singuliers opposés.

En ce qui concerne la question (ii), on suit les idées de [V]. L'espace cotangent à  $JX$  en  $0$  est isomorphe à l'espace des quadriques de  $\mathbb{P}^3$  passant par le lieu singulier de  $F$  et on note  $\Psi: \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}T_0 JX$  l'application rationnelle induite par ce

système linéaire de quadriques. On construit une sous-variété distinguée  $U$  de dimension maximale de  $\text{Sing } \Theta$  telle que, pour  $s \leq 4$ , l'intersection des cônes tangents à  $\Theta$  en les points de  $U$  de multiplicité 2 sur  $\Theta$  est la surface  $\Psi(F)$ . Ceci entraîne le théorème de Torelli lorsqu'on sait distinguer a priori la sous-variété  $U$  de  $\text{Sing } \Theta$ . C'est le cas pour  $0 \leq s \leq 1$ ,  $X$  générique, ou pour  $2 \leq s \leq 4$ :  $U$  est égal à la réunion des composantes de dimension maximale de  $\text{Sing } \Theta$ .

Signalons enfin qu'afin d'éviter des détails techniques inutiles, nous n'avons traité ici que le cas des solides doubles *ordinaires* (cf. Définition (2.3)), nous bornant à mentionner les modifications à apporter dans le cas général.

L'organisation de cet article est la suivante. Les deux premières parties sont consacrées à des définitions et à des rappels sur des propriétés des solides doubles montrées dans [C]. Dans les Chapitres 3, 4, 5 et 6 on donne des descriptions du lieu singulier du diviseur thêta des jacobiniennes intermédiaires des solides doubles avec 2, 3, 4 ou 5 points singuliers. On étend dans le chapitre suivant ces descriptions au cas des solides doubles génériques avec un point singulier. Dans le Chapitre 8, on fait le lien avec les travaux de Voisin sur les solides doubles lisses. Le Chapitre 9 est consacré au problème de Torelli. Enfin, on a regroupé dans un appendice quelques résultats techniques utilisés dans cet article.

On travaille uniquement sur le corps des nombres complexes.

## 1. Variétés de Prym

Soit  $P$  la variété de Prym attachée à un revêtement double étale  $\pi: \tilde{N} \rightarrow N$  de courbes lisses. Si  $g$  est le genre de  $N$ , la dimension de  $P$  est  $p = g - 1$ . Dans la translatée:

$$P^* = \{\tilde{L} \in J^{2g-2}\tilde{N} \mid Nm \tilde{L} = \omega_N \text{ et } h^0(\tilde{N}, \tilde{L}) \text{ pair}\},$$

de  $P$ , le diviseur:

$$\Xi = \{\tilde{L} \in P^* \mid h^0(\tilde{N}, \tilde{L}) \geq 2\}$$

représente la polarisation principale de  $P$ .

Les points singuliers de  $\Xi$  sont de deux types; les points singuliers *exceptionnels*:

$$\text{Sing}_{\text{ex}}^\pi \Xi = \{\tilde{L} = (\pi^*L)(\tilde{M}) \in P^* \mid h^0(N, L) \geq 2 \text{ et } \tilde{M} \geq 0\}$$

et les points singuliers *stables*:

$$\text{Sing}_{\text{st}}^\pi \Xi = \{\tilde{L} \in P^* \mid h^0(\tilde{N}, \tilde{L}) \geq 4\}.$$

Un point singulier peut bien sûr être à la fois stable et exceptionnel. On notera:

$$\text{Sing}_{\text{ex,ns}}^\pi \Xi = \text{adhérence de } \{\text{Sing}_{\text{ex}}^\pi \Xi - \text{Sing}_{\text{st}}^\pi \Xi\}.$$

Rappelons aussi qu'il existe sur  $\text{Sing}_{\text{st}}^\pi \Xi$  une structure de schéma naturelle ([W2]).

L'involution de  $\tilde{N}$  associée à  $\pi$  sera notée  $\sigma$ , ainsi que le morphisme qu'elle induit sur  $P$  (qui est l'opposé de l'identité). On aura aussi à utiliser la surface suivante, contenue dans  $P$ :

$$\sum(\tilde{N}) = \{\mathcal{O}_{\tilde{N}}(\tilde{x} + \tilde{y} - \sigma\tilde{x} - \sigma\tilde{y}) \mid \tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{N}\},$$

dont la propriété principale est l'inclusion:

$$\sum(\tilde{N}) + \text{Sing}_{\text{st}}^\pi \Xi \subset \Xi.$$

Toutes ces notions s'étendent avec des modifications mineures au cas des revêtements admissibles des courbes stables ([B2]).

## 2. Structures de fibré en coniques sur les solides doubles

Les constructions suivantes sont dues à Clemens ([C]).

Soit  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^3$  le revêtement double ramifié le long d'une quartique  $F \subset \mathbb{P}^3$  ayant comme seules singularités  $s$  points doubles ordinaires  $p_1, \dots, p_s$  (avec  $1 \leq s \leq 5$ ), dont *trois quelconques ne sont pas alignés*.

(2.1) A chaque point singulier  $p_i$  de  $F$  est associée une structure (birationnelle) de fibré en coniques sur  $X$ , à savoir la composition  $\varphi_i: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  de  $\varphi$  avec la projection  $\pi'_i: \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  depuis  $p_i$ .

La courbe discriminante  $C_i$  de  $\varphi_i$  est une *sextique plane* et l'image par  $\pi'_i$  du cône tangent à  $F$  en  $p_i$  est une conique lisse  $Q_i$  partout tangente à  $C_i$ .

(2.2) Les  $(s - 1)$  points  $\pi'_i(p_j)$  pour  $j \neq i$  sont singuliers sur la courbe  $C_i$ . On note  $N_i$  la normalisée de  $C_i$  en ces points; c'est une courbe stable de genre  $11 - s$ . A la structure de fibré en coniques  $\varphi_i$  est associé un revêtement double admissible  $\pi_i: \tilde{N}_i \rightarrow N_i$  dont la variété de Prym est isomorphe à la jacobienne intermédiaire  $JX$  de  $X$  (leur dimension commune est  $10 - s$ ).

(2.3) Dans la situation générique, les propriétés suivantes sont vérifiées (on dira alors que  $X$  est *ordinaire*):

- (i) la courbe  $N_i$  est lisse
- (ii) l'intersection  $Q_i \cdot C_i$  s'écrit  $2D_i$ , où  $D_i$  est un diviseur dont le support est contenu dans le lieu lisse de  $C_i$ . La demi-période de  $N_i$  correspondant alors

au revêtement double étale  $\pi_i$  est  $D_i - H_i$ , où  $H_i$  est un diviseur hyperplan sur  $N_i$  ([C] page 223).

(iii) aucune droite du plan tangente (resp. bitangente) à  $C_i$  ne passe par deux points singuliers (resp. un point singulier) de  $C_i$ .

(2.4) Lorsque  $s \geq 2$ , on peut associer à chaque couple  $(p_i, p_j)$ ,  $i \neq j$ , une autre structure (birationnelle) de fibré en coniques  $\varphi_{ij}: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ , donc aussi un revêtement admissible  $\pi_{ij}: \tilde{N}_{ij} \rightarrow N_{ij}$  de variété de Prym isomorphe à  $JX$  ([D - S] 4.3 page 97).

Rappelons d'autre part que Donagi a défini dans [Do] la *transformation tétragonale* qui, à toute paire  $(\pi: \tilde{N} \rightarrow N, f: N \rightarrow \mathbb{P}^1)$  avec  $\pi$  admissible et  $f$  fini de degré 4, associe deux autres telles paires  $(\pi', f')$  et  $(\pi'', f'')$  telles que les variétés de Prym des revêtements  $\pi, \pi'$  et  $\pi''$  soient isomorphes.

On laisse au lecteur le soin de vérifier le résultat suivant:

**PROPOSITION (2.5).** *Les deux transformées tétragonales du revêtement  $\pi_i: \tilde{N}_i \rightarrow N_i$  associées au morphisme de degré quatre  $N_i \rightarrow \mathbb{P}^1$  induit par la projection depuis le point double  $\pi'_i(p_j)$  de la sextique  $C_i$  sont les revêtements  $\pi_j: \tilde{N}_j \rightarrow N_j$  et  $\pi_{ij}: \tilde{N}_{ij} \rightarrow N_{ij}$ .*

**REMARQUES (2.6).** (1) La transformation tétragonale donne aussi des  $g_4^1$  sur  $N_j$  et  $N_{ij}$ . Celui de  $N_j$  est induit par la projection depuis le point  $\pi'_j(p_i)$  de la sextique  $C_j$ . En ce qui concerne la courbe  $N_{ij}$ , on montrera en 3.4 qu'elle est tracée sur un cône quadratique dont elle coupe la génératrice en 4 points: c'est le  $g_4^1$  qu'on obtient.

(2) Dans le cas ordinaire, les morphismes  $N_i \rightarrow \mathbb{P}^1$  n'ont pas de fibre double (propriété 2.3.(iii)) et les courbes  $N_{ij}$  sont lisses ([D1]).

### 3. Solides doubles avec deux points singuliers: singularités du diviseur thêta de la jacobienne intermédiaire.

Soit  $X$  un solide double avec deux points doubles ordinaires  $p_1$  et  $p_2$ . Il existe sur  $X$  trois structures de fibré en coniques ((2.1), (2.4)) qui induisent des isomorphismes entre  $JX$  et les variétés de Prym de trois revêtements admissibles de courbes de genre 9:

$$\begin{aligned} \pi_1: \tilde{N}_1 &\rightarrow N_1, \\ \pi_2: \tilde{N}_2 &\rightarrow N_2, \\ \pi_{12}: \tilde{N}_{12} &\rightarrow N_{12}. \end{aligned}$$

La courbe  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) est la normalisée en un point d'une sextique plane  $C_1$  (resp.  $C_2$ ). La projection depuis ce point induit un  $g_4^1$  sur  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) qui sera noté  $G_{12}$  (resp.  $G_{21}$ ).

Comme on l'a expliqué dans l'introduction, on se place ici dans le cas où  $X$  est ordinaire. En particulier, les courbes  $N_i$  et  $N_{ij}$  sont lisses.

La famille  $\text{Sing}_{\text{ex}}^{\pi_1} \Xi$  est décrite en (A3.1) et (A3.2). Elle est réunion:

- de la surface irréductible  $T$ , de classe de cohomologie  $8 \cdot [\Xi]^6/6!$ .
- des 4 composantes irréductibles de la surface  $\text{Sing}_{\text{ex}, G_{12}}^{\pi_1} \Xi$ ,

décrites en (A3.3), qui seront notées  $A_{12}^+, A_{12}^- = \sigma A_{12}^+, B_{12}^+$  et  $B_{12}^- = \sigma B_{12}^+$ . Elles sont toutes de classe  $2 \cdot [\Xi]^6/6!$  et (A3.8):

$$B_{12} = B_{12}^+ \cup B_{12}^- = \text{Sing}_{\text{ex}, \text{ns}}^{\pi_1} \Xi, \tag{3.1}$$

$$A_{12} = A_{12}^+ \cup A_{12}^- \subset \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_1} \Xi. \tag{3.2}$$

Cette discussion reste valable pour le revêtement  $\pi_2$ . On notera  $A_{21}^\pm$  et  $B_{21}^\pm$  les sous-variétés de  $\text{Sing} \Xi$  correspondantes. Les surfaces  $B_{12}^\pm$  et  $B_{21}^\pm$  sont des composantes de  $\text{Sing} \Xi$ , distinctes deux à deux, puisque  $B_{21} \subset \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_1} \Xi$  (A2.2.(i)), ce qui n'est pas le cas pour  $B_{12}$  (3.1).

LEMME (3.3). *La surface  $T$  est contenue dans une composante  $U$  de  $\text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_1} \Xi$  de dimension 3.*

Il ressort de A1.1 que l'espace tangent au schéma  $\text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_1} \Xi$  en tout point de  $T$  est de dimension  $\geq 3$ . Comme la classe de cohomologie de  $T$  est  $8 \cdot [\Xi]^6/6!$ , on déduit du lemme A1.2 que:

- soit  $T$  est une composante connexe non réduite de  $\text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_1} \Xi$ ; mais c'est impossible puisque  $T$  rencontre  $A_{12}$
- soit  $T$  n'est pas une composante de  $\text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_1} \Xi$ , auquel cas le lemme est démontré. □

Rappelons que le revêtement  $\pi_{12}: \tilde{N}_{12} \rightarrow N_{12}$  est l'une des transformées tétraogonales de  $\pi_1$ . En particulier, la courbe  $N_{12}$  admet un  $g_4^1$ , qu'on notera  $L_{12}$ .

PROPOSITION (3.4). *On a  $h^0(N_{12}, 2L_{12}) = 4$ , de sorte que  $N_{12}$  est tracée sur un cône quadratique. De plus:*

$$U = \text{Sing}_{\text{ex}, L_{12}}^{\pi_{12}} \Xi.$$

Comme les familles  $\text{Sing}_{\text{ex}}^{\pi_1} \Xi$  et  $\text{Sing}_{\text{ex}}^{\pi_2} \Xi$  ne contiennent pas de composante de dimension 3 (A3.1), on a (A2.2.(i)):

$$U \subset \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_1} \Xi \cap \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_2} \Xi = \text{Sing}_{\text{ex}, L_{12}}^{\pi_{12}} \Xi.$$

On conclut avec le lemme A2.1. □

La structure du lieu singulier de  $\Xi$  est alors facile à déterminer. On a en effet (A2.2.(i)):

$$\begin{aligned} \text{Sing } \Xi &= U \cup \text{Sing}_{\text{ex,ns}}^{\pi_1} \Xi \cup \text{Sing}_{\text{ex,ns}}^{\pi_2} \Xi, \\ &= U \cup B_{12}^+ \cup B_{12}^- \cup B_{21}^+ \cup B_{21}^- \end{aligned}$$

et ces familles sont des composantes distinctes de  $\text{Sing } \Xi$ . On a montré:

**THÉORÈME (3.5).** *Soit  $(JX, \Xi)$  la jacobienne intermédiaire d'un solide double ordinaire avec deux points singuliers. Alors le lieu singulier de  $\Xi$  a 5 composantes irréductibles: une variété de dimension 3 et 4 surfaces.*

**REMARQUES (3.6).** (1) Une partie des conclusions du théorème subsiste lorsqu'on ne suppose plus  $X$  ordinaire. En particulier,  $\text{Sing } \Xi$  reste de dimension 3 et  $U = \text{Sing}_{\text{ex},L_{12}}^{\pi_{12}} \Xi$  reste sa seule composante irréductible de cette dimension. Elle correspond à des singularités stables, génériquement non exceptionnelles pour les revêtements  $\pi_i$ .

(2) La classe de cohomologie de  $U$  est  $2 \cdot [\Xi]^5/5!$  (A2.1).

(3) La répartition en singularités stables et exceptionnelles est la suivante (ST signifie "stable" et EX, "exceptionnelle, génériquement non stable"):

	$B_{12}$	$B_{21}$	$U$
$\pi_1$	EX	ST	ST
$\pi_2$	ST	EX	ST
$\pi_{12}$	ST	ST	EX

(4) Les familles  $A_{12}$  et  $A_{21}$  coïncident, sont contenues dans  $U$ , et:

$$\text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_{12}} \Xi = B_{12} \cup B_{21} \cup A_{12},$$

qui est de codimension pure 6. La multiplicité du schéma  $\text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_{12}} \Xi$  le long de  $A_{12}$  est deux. La classe de  $\text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_{12}} \Xi$  est  $2^4 \cdot [\Xi]^6/6!$  (c'est la classe "générique").

#### 4. Solides doubles avec trois points singuliers: singularités du diviseur thêta de la jacobienne intermédiaire.

Soit  $X$  un solide double avec trois points doubles ordinaires  $p_1, p_2$  et  $p_3$ . Il existe sur  $X$  six structures de fibré en coniques ((2.1), (2.4)), qui induisent des

isomorphismes entre  $JX$  et les variétés de Prym de six revêtements admissibles de courbes de genre 8:

$$\pi_i: \tilde{N}_i \rightarrow N_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3,$$

$$\pi_{ij}: \tilde{N}_{ij} \rightarrow N_{ij} \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq 3.$$

La courbe  $N_i$  est la normalisée en deux points d'une sextique plane  $C_i$  (qui sont, avec les notations de 2.1, les points  $\pi'_i(p_j)$  pour  $j \neq i$ ). La projection depuis  $\pi'_i(p_j)$  induit un  $g_4^1$  sur  $N_i$  qui sera noté  $G_{ij}$ .

De nouveau, on suppose  $X$  ordinaire, de sorte que les courbes  $N_i$  et  $N_{ij}$  sont lisses.

La famille  $\text{Sing}_{\text{ex}}^{\pi_i} \Xi$  est décrite en (A3.1) et (A3.2). Elle est réunion:

- des courbes irréductibles  $T_i^+$  et  $T_i^- = \sigma T_i^+$ , isomorphes à  $\tilde{N}_i$ . Leur classe de cohomologie est  $2 \cdot [\Xi]^6/6!$ .
- des 4 composantes irréductibles de la courbe  $\text{Sing}_{\text{ex}, G_{ij}}^{\pi_i} \Xi$  décrites en (A3.3), qui seront notées  $A_{ij}^+, A_{ij}^- = \sigma A_{ij}^+, B_{ij}^+$  et  $B_{ij}^- = \sigma B_{ij}^+$ . Elles sont toutes de classe  $2 \cdot [\Xi]^6/6!$ . De plus, si on note:

$$\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$$

$$A_{ij} = A_{ij}^+ \cup A_{ij}^- \quad \text{et} \quad B_{ij} = B_{ij}^+ \cup B_{ij}^-,$$

on a (A3.8, A2.2.(i)):

$$B_{ij} \cup B_{ik} = \text{Sing}_{\text{ex}, \text{ns}}^{\pi_i} \Xi, \tag{4.1}$$

$$A_{ij} \subset \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_i} \Xi, \tag{4.2}$$

$$A_{ij} \cup B_{ij} \subset \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_j} \Xi. \tag{4.3}$$

(4.4) En particulier, les courbes  $B_{ij}^\pm$  sont des composantes de  $\text{Sing} \Xi$  et  $B_{ij}$  et  $B_{ki}$  n'ont pas de composante commune.

Il résulte de la Proposition (3.4) et d'un argument de dégénérescence que la courbe  $N_{ij}$  est la normalisée d'une courbe  $C_{ij}$  située sur un cône quadratique. Plus précisément, si on note  $L_{ij}$  le  $g_4^1$  sur  $N_{ij}$  fourni par la transformation tétragonale, on a  $h^0(N_{ij}, 2L_{ij}) = 4$ , de sorte que (A2.1):

$$U_{ij} = \text{Sing}_{\text{ex}, L_{ij}}^{\pi_{ij}} \Xi$$

est une surface irréductible.

LEMME (4.5). *Les surfaces  $U_{ij}$  sont toutes égales à une surface qu'on notera  $U$ .*

La Proposition (A2.2.(i)) donne:

$$\begin{aligned}\text{Sing } \Xi &= U_{12} \cup \text{Sing}_{\text{ex,ns}}^{\pi_1} \Xi \cup \text{Sing}_{\text{ex,ns}}^{\pi_2} \Xi, \\ &= U_{12} \cup B_{12} \cup B_{13} \cup B_{21} \cup B_{23},\end{aligned}$$

ce qui montre que  $\text{Sing } \Xi$  contient une seule surface.  $\square$

LEMME (4.7). *Pour  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , on a  $B_{ij} = B_{kj}$ . On notera  $B_j$  cette courbe.*

On commence par montrer:

(4.8) La seule surface contenue dans  $\{a \in P \mid (B_{ij} \cup U) \subset \Xi_a\}$  est  $\Sigma(\tilde{N}_j)$ .

Les inclusions (4.2) et (4.3) et la Proposition (A2.2.(i)) donnent:

$$A_{ij} \subset \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_i} \Xi \cap \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_j} \Xi = U_{ij} = U.$$

La Proposition (A2.2.(ii)) donne d'autre part:

$$\{a \in P \mid (B_{ij} \cup A_{ij}) \subset \Xi_a\} = \Sigma(\tilde{N}_j) \cup \Sigma(\tilde{N}_{ij}).$$

Or la surface  $U = U_{ij}$  ne consiste pas en des singularités stables pour  $\pi_{ij}$  (sinon on aurait, par A2.2.(i),  $U \subset \text{Sing}_{\text{ex},G_{ij}}^{\pi_i} \Xi$ ), de sorte que:

$$\{a \in P \mid (B_{ij} \cup U) \subset \Xi_a\} \not\subset \Sigma(\tilde{N}_{ij}),$$

ce qui prouve (4.8).

D'autre part, il ressort de [D1] Théorème (4.1) que les surfaces  $\Sigma(\tilde{N}_j)$  et  $\Sigma(\tilde{N}_k)$  sont distinctes. On déduit alors de (4.8) que:

$$(B_{ij} \cup U) \not\subset \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_k} \Xi.$$

Comme  $\text{Sing}_{\text{ex}}^{\pi_k} \Xi$  ne contient pas de surface, on a en fait  $U \subset \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_k} \Xi$ , de sorte que:

$$B_{ij} \subset \text{Sing}_{\text{ex,ns}}^{\pi_k} \Xi.$$

On conclut avec (4.1) et (4.4).  $\square$

On remarque alors qu'il résulte de (A3.3) qu'on a:

$$\text{soit } B_{ij}^+ \simeq \tilde{N}_k \quad \text{et} \quad A_{ij}^+ \simeq \tilde{N}_{ik},$$

$$\text{soit } B_{ij}^+ \simeq \tilde{N}_{ik} \quad \text{et} \quad A_{ij}^+ \simeq \tilde{N}_k.$$

(4.9) Il résulte du lemme précédent que c'est la deuxième éventualité qui a lieu. La structure du lieu singulier de  $\Xi$  est alors bien déterminée par (4.6), (4.7) et (4.4).

**THÉORÈME (4.10).** *Soit  $(JX, \Xi)$  la jacobienne intermédiaire d'un solide double ordinaire avec trois points singuliers. Alors le lieu singulier de  $\Xi$  a 7 composantes irréductibles: une surface et 6 courbes.*

**REMARQUES (4.11).** (1) Une partie des conclusions du théorème subsiste lorsqu'on ne suppose plus  $X$  ordinaire. En particulier,  $\text{Sing } \Xi$  reste de dimension 2 et  $U = \text{Sing}_{\text{ex}, L_{12}}^{\pi_{12}} \Xi$  reste sa seule composante irréductible de cette dimension.

(2) La classe de cohomologie de  $U$  est  $2 \cdot [\Xi]^5/5!$  (A2.1).

(3) La répartition en singularités stables et exceptionnelles est la suivante (ST signifie "stable" et EX, "exceptionnelle, génériquement non stable"):

	$B_1 \simeq \tilde{N}_{23}$	$B_2 \simeq \tilde{N}_{13}$	$B_3 \simeq \tilde{N}_{12}$	$U$
$\pi_1$	ST	EX	EX	ST
$\pi_2$	EX	ST	EX	ST
$\pi_3$	EX	EX	ST	ST
$\pi_{12}$	ST	ST	EX	EX
$\pi_{23}$	EX	ST	ST	EX
$\pi_{13}$	ST	EX	ST	EX

(4) Les familles  $A_{ij}$  et  $A_{ji}$  coïncident et sont isomorphes à deux copies opposées de  $\tilde{N}_k$ . On a:

$$A_{ij} \subset U$$

$$\text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_{ij}} \Xi = B_j \cup B_i \cup A_{ij},$$

qui est de codimension pure 6. La multiplicité du schéma  $\text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_{ij}} \Xi$  le long de  $A_{ij}$  est deux. La classe de  $\text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_{ij}} \Xi$  est  $2^4 \cdot [\Xi]^6/6!$  (c'est la classe "générique").

### 5. Solides doubles avec quatre points singuliers: singularités du diviseur thêta de la jacobienne intermédiaire.

Soit  $X$  un solide double avec quatre points doubles ordinaires  $p_1, p_2, p_3$  et  $p_4$ . Il existe sur  $X$  dix structures de fibré en coniques ((2.1), (2.4)), qui induisent des

isomorphismes entre  $JX$  et les variétés de Prym de dix revêtements admissibles de courbes de genre 7:

$$\begin{aligned} \pi_i: \tilde{N}_i &\rightarrow N_i \quad \text{pour } i = 1, 2, 3, 4 \\ \pi_{ij}: \tilde{N}_{ij} &\rightarrow N_{ij} \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq 4. \end{aligned}$$

La courbe  $N_i$  est la normalisée en trois points d'une sextique plane stable  $C_i$  (qui sont, avec les notations de 2.1, les points  $\pi'_i(p_j)$  pour  $j \neq i$ ). La projection depuis  $\pi'_i(p_j)$  induit un  $g_4^1$  sur  $N_i$  qui sera noté  $G_{ij}$ .

On suppose  $X$  ordinaire, de sorte que les courbes  $N_i$  et  $N_{ij}$  sont lisses.

Il résulte alors de la proposition A3.1 que la famille  $\text{Sing}_{\text{ex}}^{\pi_i} \Xi$  est finie, réunion des familles  $\text{Sing}_{\text{ex}, G_{ij}}^{\pi_i} \Xi$  pour  $j \neq i$ . Les Propositions (A3.8) et (A2.2.(i)) donnent aussi:

$$\begin{aligned} \text{Sing}_{\text{ex}, G_{ij}}^{\pi_i} \Xi &= A_{ij}^+ \cup A_{ij}^- \cup B_{ij}^+ \cup B_{ij}^-, \\ A_{ij}^+ &= \{a_{ij}, a_{ij}^*\} \quad A_{ij}^- = \sigma A_{ij}^+ \\ B_{ij}^+ &= \{b_{ij}, b_{ij}^*\} \quad B_{ij}^- = \sigma B_{ij}^+ \\ B_{ij} &= B_{ij}^+ \cup B_{ij}^- \subset \text{Sing}_{\text{ex}, \text{ns}}^{\pi_i} \Xi \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$A_{ij} = A_{ij}^+ \cup A_{ij}^- \subset \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_i} \Xi \tag{5.2}$$

$$A_{ij} \cup B_{ij} \subset \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_j} \Xi. \tag{5.3}$$

En particulier, les points de  $B_{ij}$  sont des *composantes* de  $\text{Sing} \Xi$ .

Comme dans le chapitre précédent, la courbe  $N_{ij}$  est munie d'un  $g_4^1$ , qu'on notera  $L_{ij}$  et qui vérifie  $h^0(N_{ij}, 2L_{ij}) = 4$ , de sorte que:

$$U_{ij} = \text{Sing}_{\text{ex}, L_{ij}}^{\pi_{ij}} \Xi$$

est une courbe, irréductible dans la situation générique (A2.1).

Comme dans le Lemme (4.5), la Proposition (A2.2) montre que les courbes  $U_{ij}$  sont toutes égales à une courbe qu'on notera  $U$  et qui est la seule courbe contenue dans  $\text{Sing} \Xi$ .

**LEMME (5.4).** *Pour tous  $i, j, k \in \{1, \dots, 4\}$  avec  $i \neq k$  et  $j \neq k$ , on a  $B_{ik} = B_{jk}$ . On notera  $B_k$  cet ensemble de 4 points.*

On commence par montrer:

(5.5) La seule surface contenue dans  $\{a \in P \mid (\{b_{ij}, -b_{ij}\} \cup U) \subset \Xi_a\}$  est  $\Sigma(\tilde{N}_j)$ . Les inclusions (5.2) et (5.3) et la Proposition (A2.2.(i)) donnent:

$$A_{ij} \subset \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_i} \Xi \cap \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_j} \Xi = U_{ij} = U.$$

Soit  $a$  un élément de  $P$  vérifiant:

$$(\{b_{ij}, -b_{ij}\} \cup A_{ij}) \subset \Xi_a.$$

Si de plus  $B_{ij} \subset \Xi_a$ , la Proposition (A2.2.(ii)) montre que  $a \in \Sigma(\tilde{N}_j) \cup \Sigma(\tilde{N}_{ij})$ .  
Si par contre  $b_{ij}^* \notin \Xi_a$ , on déduit du Lemme (A3.9) que:

$$(-b_{ij}^* - a) \in \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_i} \Xi.$$

Comme  $\text{Sing} \Xi$  est de dimension 1 ([M1]), on en déduit que les seules surfaces contenues dans  $\{a \in P \mid (\{b_{ij}, -b_{ij}\} \cup A_{ij}) \subset \Xi_a\}$  sont  $\Sigma(\tilde{N}_j)$  et  $\Sigma(\tilde{N}_{ij})$ . Comme la courbe  $U = U_{ij}$  n'est pas formée de singularités stables pour  $\pi_{ij}$ , la surface  $\Sigma(\tilde{N}_{ij})$  n'est pas contenue dans  $\{a \in P \mid U \subset \Xi_a\}$ , ce qui prouve (5.5).

On prendra  $i = 1, j = 3, k = 2$ . Comme  $\text{Sing}_{\text{ex}}^{\pi_3} \Xi$  est de dimension 0, on a  $U \subset \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_3} \Xi$ . On déduit alors de (5.5) que:

$$\{b_{12}, -b_{12}\} \subset \text{Sing}_{\text{ex,ns}}^{\pi_3} \Xi.$$

En procédant de façon analogue avec  $b_{12}^*, b_{14}$  et  $b_{14}^*$ , on en déduit:

$$(B_{12} \cup B_{14}) \subset \text{Sing}_{\text{ex,ns}}^{\pi_3} \Xi = B_{31} \cup B_{32} \cup B_{34}. \quad (5.6)$$

On a alors ((5.1), (5.3) et (5.6)):

$$B_{12} \subset \text{Sing}_{\text{ex,ns}}^{\pi_1} \Xi \cap \text{Sing}_{\text{ex,ns}}^{\pi_3} \Xi \cap \text{Sing}_{\text{ex,ns}}^{\pi_4} \Xi,$$

$$B_{31} \subset \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_1} \Xi,$$

$$B_{34} \subset \text{Sing}_{\text{st}}^{\pi_4} \Xi.$$

Il résulte alors de l'inclusion (5.6) qu'on a  $B_{12} = B_{32}$ , d'où le lemme.  $\square$

La structure du lieu singulier de  $\Xi$  se détermine alors facilement. La Proposition (A2.2.(i)) donne:

$$\begin{aligned} \text{Sing} \Xi &= U \cup \text{Sing}_{\text{ex,ns}}^{\pi_1} \Xi \cup \text{Sing}_{\text{ex,ns}}^{\pi_2} \Xi \\ &= U \cup B_{12} \cup B_{13} \cup B_{14} \cup B_{21} \cup B_{23} \cup B_{24} \\ &= U \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_1. \end{aligned}$$

On a montré:

**THÉORÈME (5.7).** *Soit  $(JX, \Xi)$  la jacobienne intermédiaire d'un solide double générique avec quatre points singuliers. Alors le lieu singulier de  $\Xi$  est réunion d'une courbe irréductible et de 16 points isolés.*

