C. R. Acad. Sci. Paris, t. 311, Série I, p. 337-340, 1990

Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Le lieu de Noether-Lefschetz pour les variétés abéliennes

Olivier DEBARRE et Yves LASZLO

Résumé — On montre dans cette Note comment des constructions de Shimura permettent de décrire explicitement les composantes irréductibles du lieu des variétés abéliennes complexes dont le groupe de Néron-Severi n'est pas libre de rang 1.

Noether-Lefschetz locus for abelian varieties

Abstract — *In this Note, we show how certain constructions of Shimura yield explicit descriptions of the irreducible components of the locus of complex abelian varieties whose Néron-Severi group is not free of rank* 1.

1. INTRODUCTION. — Le groupe de Néron-Severi d'une variété projective lisse complexe est le groupe des diviseurs modulo équivalence algébrique.

Le groupe de Néron-Severi d'une surface *générique* de degré donné dans $\mathbb{P}^3$ est libre de rang 1, engendré par la classe d'une section hyperplane. On définit classiquement le lieu de Noether-Lefschetz comme l'ensemble des polynômes homogènes de degré donné définissant une surface dans $\mathbb{P}^3$ dont le groupe de Néron-Severi n'est *pas* libre de rang 1. Cet ensemble est réunion d'une famille dénombrable de variétés algébriques irréductibles et sa structure reste encore mystérieuse, malgré d'importants progrès récents ([3], [2], [8], [9]).

Le groupe de Néron-Severi d'une variété abélienne complexe *générique* de polarisation et dimension fixées est libre de rang 1, engendré par la classe de la polarisation. Par analogie, on peut définir, dans l'espace des modules des variétés abéliennes de polarisation et dimension fixées, le lieu de Noether-Lefschetz comme l'ensemble des points correspondant aux variétés abéliennes dont le groupe de Néron-Severi n'est *pas* libre de rang 1.

Cette Note est consacrée à la démonstration du résultat suivant, basée sur des travaux de Shimura, qui explicite complètement la structure de ce lieu :

THÉORÈME. — *Dans l'espace des modules des variétés abéliennes complexes de polarisation fixée et de dimension g, les composantes irréductibles du lieu de Noether-Lefschetz sont :*

(*a*) *pour tout entier k compris entre* 1 *et* $g/2$, *la famille des variétés abéliennes contenant une sous-variété abélienne de dimension k sur laquelle la polarisation induite est de type fixé ; la codimension de ces familles est* $k(g-k)$;

(*b*) *pour tout diviseur n de g différent de g, les composantes de la famille des variétés abéliennes de Shimura-Hilbert-Blumenthal* (*dont la définition et la construction sont données au paragraphe* 4) *; la codimension de ces composantes est* $g(g-n)/2$.

Remarques. — 1. Il résulte de [1] que toutes les composantes du lieu de Noether-Lefschetz sont *algébriques* (*cf.* § 4).

2. Dans le cas (*b*), une variété abélienne correspondant à un point générique de la composante est simple et le rang de son groupe de Néron-Severi est g/n ([6], Theorem 5, p. 176). Dans le cas (*a*), ce rang est génériquement 2.

3. Les composantes de type (*b*) sont toutes de dimension plus petite que les composantes de type (*a*), sauf lorsque g est pair et que $n=k=g/2$.

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

4. Les variétés abéliennes de Hilbert-Blumenthal usuelles [cas (*b*) avec $n=1$] forment des composantes du lieu de Noether-Lefschetz de codimension $g(g-1)/2$. C'est la codimension « attendue », à savoir la dimension de $H^{2,0}$ [3], c'est-à-dire la codimension *maximale*. Lorsque g est *premier*, les seules composantes du lieu de Noether-Lefschetz qui n'ont pas la codimension attendue correspondent aux variétés abéliennes non simples.

2. Rappels sur les endomorphismes des variétés abéliennes. — Soit X une variété abélienne complexe. On note $\mathrm{NS}(\mathrm{X})$ son groupe de Néron-Severi, $\mathrm{End}(\mathrm{X})$ le groupe de ses endomorphismes et $\mathrm{End}^0(\mathrm{X})$ la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathrm{End}(\mathrm{X})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. Une polarisation sur X est une classe d'équivalence algébrique de faisceaux inversibles *amples* sur X. A toute polarisation l, on associe un morphisme injectif de $\mathbb{Z}$-modules $\alpha_l : \mathrm{NS}(\mathrm{X}) \to \mathrm{End}^0(\mathrm{X})$ ([4], p. 178).

La variété abélienne X s'identifie au quotient de son espace tangent holomorphe à l'origine V par un réseau Γ. En associant à un endomorphisme de X son application tangente à l'origine, on définit une représentation fidèle $\rho_{\mathbb{C}} : \mathrm{End}^0(\mathrm{X}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$. Notons $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\Gamma\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. On a alors $\rho_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}^0(\mathrm{X}))=\{f\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})\,|\,f(\Gamma_{\mathbb{Q}})\subset\Gamma_{\mathbb{Q}}\}$, d'où une autre représentation fidèle $\rho_{\mathbb{Q}} : \mathrm{End}^0(\mathrm{X}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{\mathbb{Q}})$.

Une polarisation l définit un produit scalaire hermitien H_l sur V et l'image de la composée $\rho_{\mathbb{C}}\circ\alpha_l : \mathrm{NS}(\mathrm{X}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$ est le $\mathbb{Z}$-module des endomorphismes de V hermitiens pour la forme H_l et qui préservent Γ ([4], p. 238).

3. Variétés abéliennes dont le groupe de Néron-Severi est de rang >1. — Soit (X, l) une variété abélienne polarisée. Si X n'est pas simple, c'est-à-dire si elle contient une sous-variété abélienne distincte d'elle-même et de zéro, le groupe $\mathrm{NS}(\mathrm{X})$ est de rang au moins 2.

Si X est simple, la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathrm{End}^0(\mathrm{X})$ est un corps (non commutatif) ([4], Corollary 2, p. 174). On suppose que le rang de $\mathrm{NS}(\mathrm{X})$ est au moins 2 et on choisit un élément m de $\mathrm{NS}(\mathrm{X})$ dont aucun multiple n'est multiple de l. Le sous-corps commutatif K de $\mathrm{End}^0(\mathrm{X})$ engendré par $u=\alpha_l(m)$ est isomorphe à la sous-$\mathbb{Q}$-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\Gamma_{\mathbb{Q}})$ engendrée par $\rho_{\mathbb{Q}}(u)$. Comme la représentation $\rho_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ est équivalente à $\rho_{\mathbb{C}}\oplus\bar{\rho}_{\mathbb{C}}$, le polynôme minimal de l'endomorphisme hermitien $\rho_{\mathbb{C}}(u)$ est aussi celui de $\rho_{\mathbb{Q}}(u)$, de sorte que K est *totalement réel.*

4. Construction des variétés abéliennes X telles que $\mathrm{End}^0(\mathrm{X})$ contienne un corps totalement réel. — Réciproquement, on se donne un corps totalement réel K de degré $d>1$ et (X, l) une variété abélienne polarisée. On garde les notations précédentes. En particulier, X est le quotient du $\mathbb{C}$-espace vectoriel V par le réseau Γ. On suppose qu'il existe une injection ι de K dans $\mathrm{End}^0(\mathrm{X})$ et que l'image de $\iota(\mathrm{K})$ par $\rho_{\mathbb{C}}$ consiste en des endomorphismes de V hermitiens pour la forme hermitienne H_l. On dira que (X, l, ι) est une variété abélienne de Shimura-Hilbert-Blumenthal. Nous allons donner, en suivant [6] et [7], une construction de la variété abélienne X.

Le groupe $\mathrm{NS}(\mathrm{X})$ contient l'ordre $\mathrm{K}\cap\mathrm{End}(\mathrm{X})$ de K; il est donc de rang au moins d et X est bien dans le lieu de Noether-Lefschetz. Quitte à remplacer X par la variété abélienne isogène $\mathrm{V}/\mathfrak{o}.\Gamma$, on supposera que cet ordre est l'ordre maximal $\mathfrak{o}$ de K.

On note $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ les plongements de K dans $\mathbb{R}$. Comme les représentations $\rho_{\mathbb{Q}}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ et $\rho_{\mathbb{C}}\oplus\bar{\rho}_{\mathbb{C}}$ de K sont équivalentes, chaque σ_i doit intervenir avec la même multiplicité n dans la représentation $\rho_{\mathbb{C}}$. En particulier, on a $\dim(\mathrm{X})=nd$. Soit E_l la restriction de la forme bilinéaire alternée $\mathrm{Im}\,\mathrm{H}_l$ à Γ.

LEMME. — *Il existe des idéaux fractionnaires* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *de* K *et un isomorphisme* $\psi : \Gamma \to \mathfrak{o}^n \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n$ *de* $\mathfrak{o}$*-modules, tels que :*

$$\forall x, y \in \Gamma, \quad E_l(x, y) = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}((\psi x) . J . {}^t(\psi y)),$$

où J *est la matrice alternée standard de taille* $2n$.

L'isomorphisme ψ induit un isomorphisme $\Gamma_{\mathbb{Q}} \simeq K^n \oplus K^n$ de K-espaces vectoriels. On fixe une base de V de façon que le morphisme :

$$i_2 : \quad K^n \to \{0\} \oplus K^n \subset K^n \oplus K^n \simeq \Gamma_{\mathbb{Q}} \subset V \simeq \mathbb{C}^{nd}$$

soit donné par :

$$i_2(k) = (\sigma_1 k, \sigma_2 k, \ldots, \sigma_d k).$$

Pour tout élément v de K, la matrice de l'endomorphisme $\rho_{\mathbb{C}}(v)$ de V dans cette base est $\mathrm{diag}(\sigma_1(v) I_n, \ldots, \sigma_d(v) I_n)$, où I_n est la matrice unité d'ordre n. Il existe d matrices complexes $\tau_1, \ldots, \tau_d$ telles que le morphisme :

$$i_1 : \quad K_n \to K^n \oplus \{0\} \subset K^n \oplus K^n \simeq \Gamma_{\mathbb{Q}} \subset V \simeq \mathbb{C}^{nd}$$

vérifie, pour tout élément k de K^n :

$$i_1(k) = (\tau_1 \sigma_1 k, \ldots, \tau_d \sigma_d k).$$

Dans la base fixée de V, le réseau Γ est égal à $\tau i_2 \mathfrak{o}^n \oplus i_2(\mathfrak{a}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{a}_n)$, où τ est la matrice $\mathrm{diag}(\tau_1, \ldots, \tau_d)$. Le corps K et les idéaux fractionnaires $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ déterminent (X, l). D'autre part, les τ_i sont symétriques à partie imaginaire définie positive.

Réciproquement, si on se donne un corps K totalement réel de degré d, un entier non nul n, et des idéaux fractionnaires $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ de K, la procédure ci-dessus permet d'associer à tous éléments $\tau_1, \ldots, \tau_d$ du demi-espace de Siegel $\mathscr{H}_n$ une variété abélienne de Shimura-Hilbert-Blumenthal (X, l, ι) de dimension $g = nd$.

Shimura montre dans [6] que les variétés ainsi construites admettent un espace de modules grossier — pour les isomorphismes de variétés abéliennes polarisées respectant l'injection ι — qui est isomorphe au quotient de $(\mathscr{H}_n)^d$ par un groupe discontinu. D'après [1], un tel quotient a une structure naturelle de variété quasi projective, de sorte que les images de ces espaces dans les espaces de modules usuels de variétés abéliennes polarisées sont des sous-variétés algébriques.

5. LIEN AVEC LES VARIATIONS INFINITÉSIMALES DE STRUCTURES DE HODGE. — Il est intéressant de faire le lien avec l'approche de [5], qui consiste à calculer l'espace tangent de Zariski à une composante du lieu de Noether-Lefschetz en un point donné. Conservons nos notations. Il existe une déformation universelle locale $\mathscr{X} \to B$ de la variété abélienne polarisée (X, l) telle que X soit la fibre d'un point b de B et que l'application de Kodaira-Spencer induise un isomorphisme de $T_b B$ avec

$$H^1(X, TX)_l = \{ x \in H^1(X, TX) \mid x \cup \omega_l = 0 \},$$

où ω_l est la classe de la polarisation l dans $H^1(X, \Omega^1 X)$. La forme hermitienne H_l induit un isomorphisme $V \simeq \bar{V}^*$ qui permet les identifications $H^1(X, TX)_l \simeq S^2 V$ et $H^{p,q} \simeq \wedge^p V^* \otimes \wedge^q V$. Le diagramme de variation infinitésimale de structures de Hodge s'écrit alors :

$$T_b B \simeq S^2 V \to \mathrm{Hom}(\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V), \wedge^2 V),$$

où la flèche envoie l'élément $v_1 . v_2$ de $S^2 V$ sur l'homomorphisme :

$$A \mapsto A v_1 \wedge v_2 - v_1 \wedge A v_2.$$

Supposons maintenant que le rang de NS(X) soit au moins deux et prenons une autre polarisation m. La classe ω_m s'identifie à un élément A_m de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, qui n'est autre que $\rho_{\mathbb{C}} \circ \alpha_l(m)$. Les directions $(T_b B)_m$ dans $T_b B$ le long desquelles ω_m reste de type (1,1) au premier ordre sont celles correspondant à $H^1(X, TX)_m \cap T_b B$, c'est-à-dire à :

$$\{ v_1 . v_2 \in S^2 V \mid A_m v_1 \wedge v_2 = v_1 \wedge A_m v_2 \}.$$

Or l'endomorphisme A_m est diagonalisable car hermitien pour H_l. Il en ressort que l'espace $(T_b B)_m$ est de dimension $\sum n_i (n_i + 1)/2$, où les n_i sont les multiplicités des valeurs propres de A_m.

Lorsque X contient une sous-variété abélienne de dimension $k \in \{1, \ldots, [g/2]\}$, on peut choisir m de façon que 0 et 1 soient valeurs propres de multiplicités respectives k et $g-k$, de sorte que :

$$\dim (T_b B)_m = k(k+1)/2 + (g-k)(g-k+1)/2 = g(g+1)/2 - k(g-k),$$

qui est bien la dimension de la famille des variétés abéliennes de dimension g contenant une sous-variété abélienne de dimension k (où la polarisation induite est de type fixé).

Lorsque X est simple, c'est une variété abélienne de Shimura-Hilbert-Blumenthal et on peut choisir m de façon que A_m ait d valeurs propres de multiplicité n. On a alors :

$$\dim (T_b B)_m = dn(n+1)/2 = g(g+1)/2 - g(g-n)/2,$$

qui est bien la dimension des composantes des familles de variétés abéliennes de Shimura-Hilbert-Blumenthal.

Les composantes du lieu de Noether-Lefschetz pour les variétés abéliennes polarisées sont donc *réduites*.

Les auteurs remercient Jacques Tilouine de ses longues et patientes explications.

Note remise le 7 juin 1990, acceptée le 26 juin 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] W. L. Baily et A. Borel, On the compactification of arithmetically defined quotients of bounded symmetric domains, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70, 1964, p. 588-593.

[2] M. Green, Components of maximal dimension in the Noether-Lefschetz locus, *J. Diff. Geom.*, 29, 1989, p. 295-302.

[3] P. Griffiths et J. Harris, Infinitesimal Variations of Hodge Structures II, *Comp. Math.*, 50, 1983, p. 207-265.

[4] D. Mumford, *Abelian Varieties*, Oxford University Press, 1974.

[5] G. P. Pirola, Base Number Theorem for Abelian Varieties, *Math. Ann.*, 282, 1988, p. 361-368.

[6] G. Shimura, On Analytic Families of Polarized Abelian Varieties and Automorphic Functions, *Ann. of Math.*, 78, 1963, p. 149-192.

[7] G. Van der Geer, *Hilbert Modular Surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Flge, 16, Springer-Verlag, 1988.

[8] C. Voisin, Composantes de petite dimension du lieu de Noether-Lefschetz, *Comm. Math. Helv.*, 64, 1989, p. 515-526.

[9] C. Voisin, Sur le lieu de Noether-Lefschetz en degré 6 et 7, *Comp. Math.*, 75, 1990, p. 47-68.

Mathématiques, Bât. n° 425, *Université Paris-Sud*, 91405 *Orsay Cedex.*